Глава I
Дифференциальные уравнения первого порядка.

1 Основные понятия.

Задача Коши.

Дифференциальное уравнение первого порядка

Это функциональное уравнение $F(x, y, y')$

Или $y' = f(x, y)$ связывающие между собой независимую переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$

Общее решение уравнения

$$F(x, y, y')$$

или $y' = f(x, y)$

Это функция $y = \varphi(x, c)$, если при любом допустимом параметре с она является частным решением этого уравнения и, кроме того, любое его частное решение может быть представлено в виде $y = \varphi(x, c_0)$ при некотором значении c_0 параметра c

Задача Коши

Найти решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворяющее заданному начальному условию: $y_0 = \varphi(x_0)$ то есть принимающее при $x = x_0$ заданное значение $y = y_0$

2. Уравнение первого порядка с разделяющими переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно имеет вид

$$\mathrm{X}(\chi)\times \mathrm{Y}(y)dx + X1(\chi)\times Y1(y)dx = 0$$

$X(x), X1(x)$ функции только переменной, x

$Y(y), Y1(y)$ функции только переменной, y

3.Дифференциальные уравнения, однородные относительно *x* и *y* и приводящиеся к ним

Функция $f(x; y)$ называется однородной функцией нулевого измерения, если при умножении аргументов и на произвольный параметр значение функции не изменится.

Теорема.

функция нулевого измерения может быть записана в виде:

$$f(x;y)=\varphi(\frac{y}{x})$$

Уравнение $y' = f(x; y)$ называется однородным относительно *x* и *y* , если функция является однородной функцией нулевого измерения и его можно записать в виде:

$$y' = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n-го измерения, если при замене переменных *x* и *y* соответственно на *tx* и *ty*, где *t*- произвольная величина (параметр), получается та же функция, умноженная на t^n, то есть выполняется условие:

$$f(xt, yt) = t^n \times f(x, y)$$

Число n называется измерением (степенью) однородностью функции.

Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (2) в котором $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - однородные функции одного и того же измерения, так же является дифференциальным уравнением, однородным относительно *x* и *y*.

Метод решения:

Однородные уравнения можно привести к уравнению с раздельными переменными подстановкой $y=xz$, где z- новая искомая функция переменной x.

Теорема.

Уравнение вида $y' = f(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 x + c_1})$ приводится к однородному или к уравнению с раздельными переменными.

Уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется обобщенным однородным уравнением, если можно выбрать показатель степени α так, чтобы подстановка $y = z^{\alpha}$ преобразовывала данное уравнение в однородное относительно x и y.