

# **Физические основы механики**

*Семестр 1*

# ЛЕКЦИЯ № 3 ( часть I )

## Принцип относительности в механике

1. Принцип относительности Галилея. Переход из одной инерциальной системы отсчета в другую. Преобразования Галилея. Инвариантность уравнения движения.
2. Неприменимость принципа относительности Галилея к описанию динамики электромагнитного поля. опыты А. Майкельсона и Э. Морли по измерению скорости света.
3. Основные положения специальной теории относительности. Преобразования Лоренца. Сокращение длины и замедление времени. Принцип относительности Галилея. Общезначимый принцип относительности.
4. Импульс и энергия частицы в релятивистской механике. Формула Эйнштейна. Энергия покоя. Принцип соответствия.
5. Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции.
6. Релятивистская теория тяготения (общая теория относит.)

# ЛЕКЦИЯ № 3 (часть II)

## Динамика системы материальных точек

---

1. Система материальных точек. Центр масс (инерции). Аддитивность массы в нерелятивистской механике.

2. Полный импульс системы материальных точек.

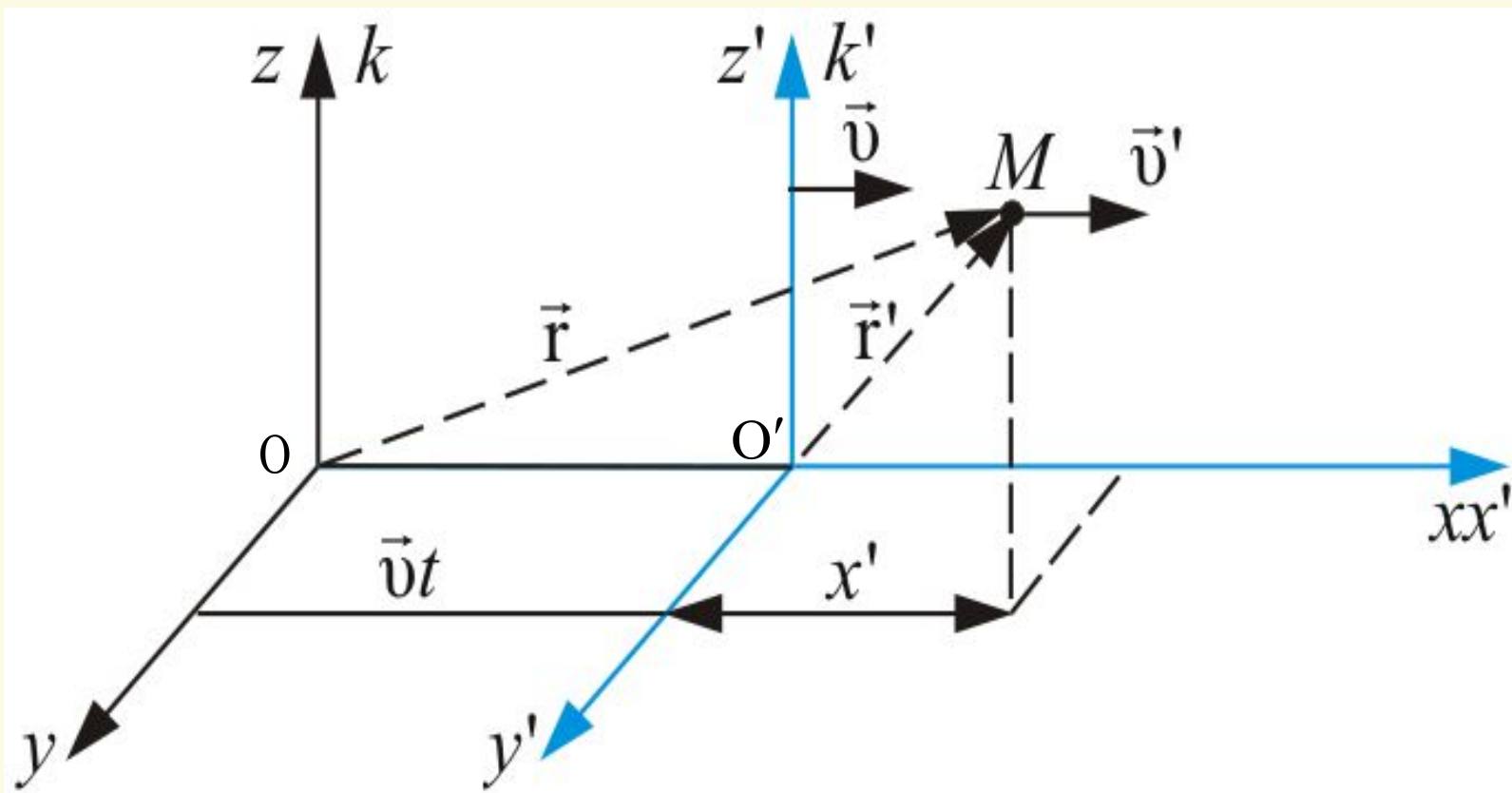
3. Закон сохранения импульса. Внутренние и внешние силы.

4. Теорема о движении центра масс. Система центра масс.

5. Реактивное движение. Уравнение Мещерского. Формулы Циолковского.

# Принцип относительности Галилея.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $k$  и  $k'$ . Система  $k'$  движется относительно  $k$  со скоростью  $v = \text{const} \ll c$  вдоль оси  $x$ . Точка  $M$  движется в двух системах отсчета:



# Галилео Галилей (Galileo Galilei)

---

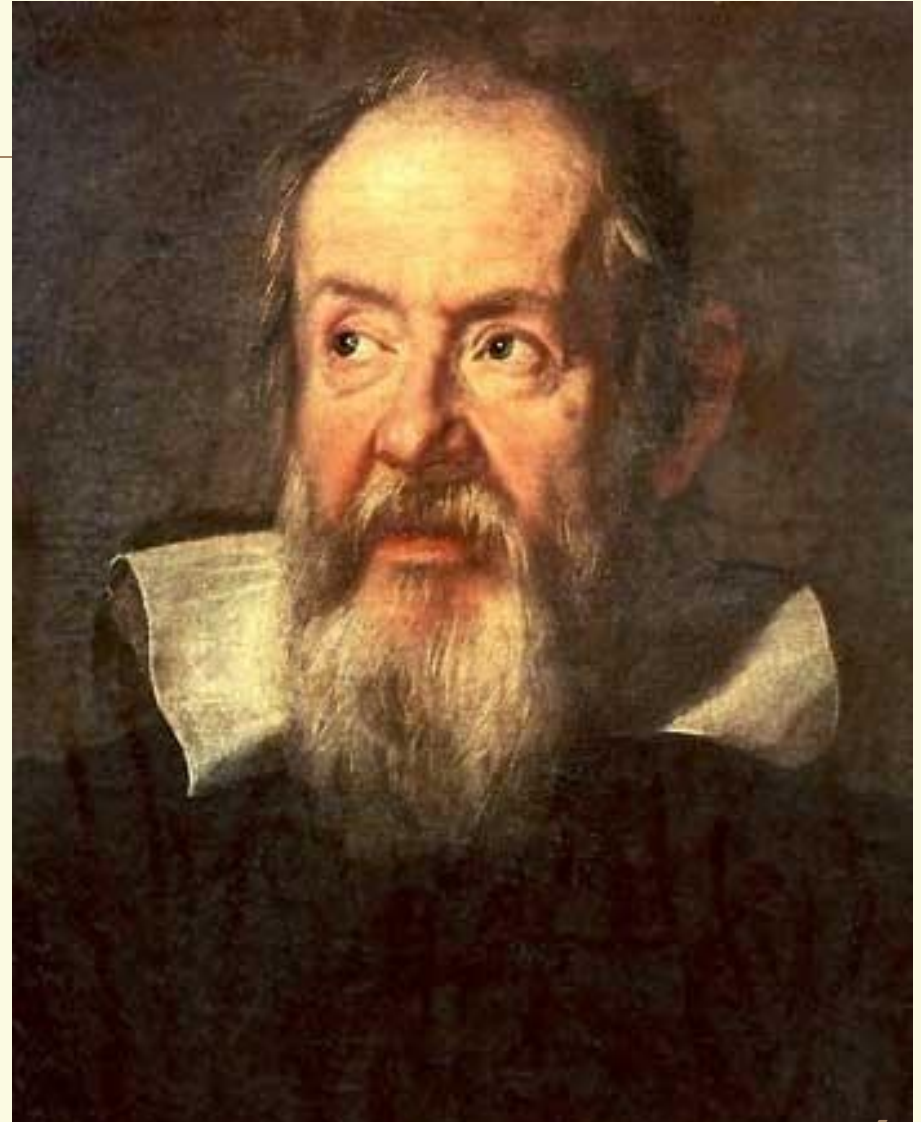
Родился *15 февраля 1564*  
*Пиза (Pisa)*  
*Италия*

Умер *8 января 1642*  
*Арчетри (Arcetri)*  
*Италия*

**астроном, философ и  
физик.**

*важнейшие работы*

**улучшение телескопа  
разнообразии  
астрономических  
наблюдений, первый закон  
движения**



Запишем движение точки М в этих двух системах, задав это движение радиус-векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  соответственно в системе  $k$  и  $k'$ :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$$

$\vec{r}_0$  - радиус-вектор, определяющий положение точки  $O'$  системы  $k'$  в системе отсчёта  $k$ .

К моменту времени  $t$  ( $t=t'$ ):  $\vec{r}_0 = \vec{v} \cdot t$

Спроецировав на координатные оси, запишем в скалярной форме:

$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

- преобразование  
Галилея

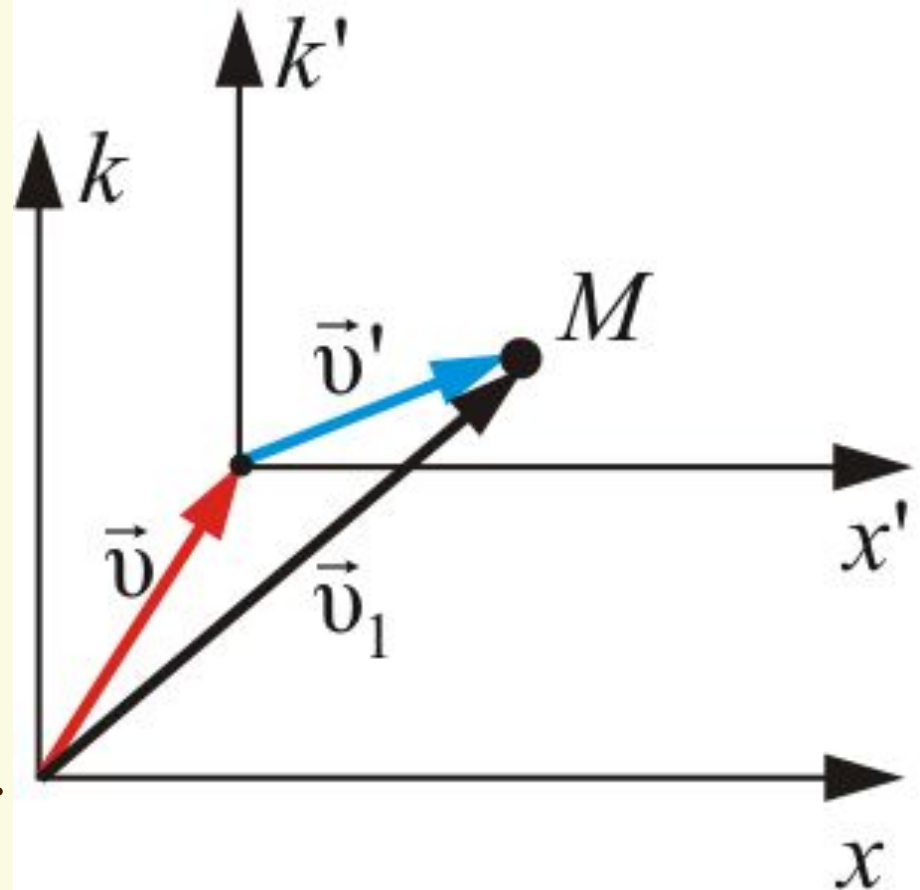
Продифференцируем это выражение по времени, получим: *закон сложения скоростей в классической механике (нерелятивистской механике):*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{v}$$

или

$$\vec{v}_1 = \vec{v}' + \vec{v}$$

Скорость движения точки  $M$  (сигнала) в системе  $k'$   $\vec{v}'$  и  $\vec{v}_1$  в системе  $k$  различны.



## Ускорение в системе отсчета $k$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'$$

**Инвариантность ускорения** (одинаковость во всех инерциальных системах отсчёта- ИСО)

Изучение медленных ( $v \ll c$ ) механических движений показало, что

$$m = m' , \quad \vec{F} = \vec{F}' .$$

Таким образом, **масса и сила также являются инвариантами** при переходе из одной ИСО в другую.



Уравнения движения частицы имеют одинаковый вид во всех ИСО:  $m \frac{d^2 r}{dt^2} = F$  и  $m' \frac{d^2 r'}{dt'^2} = F'$

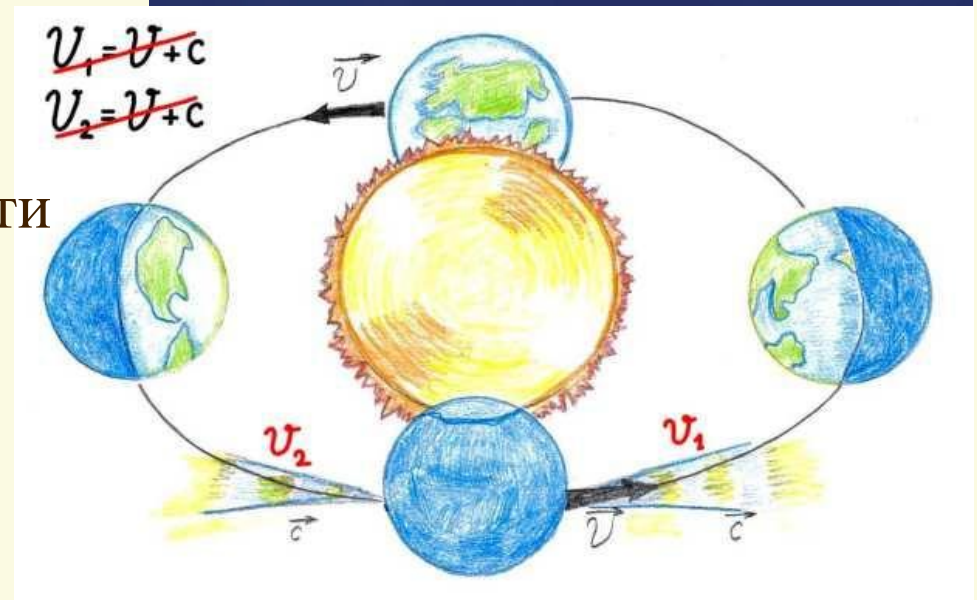
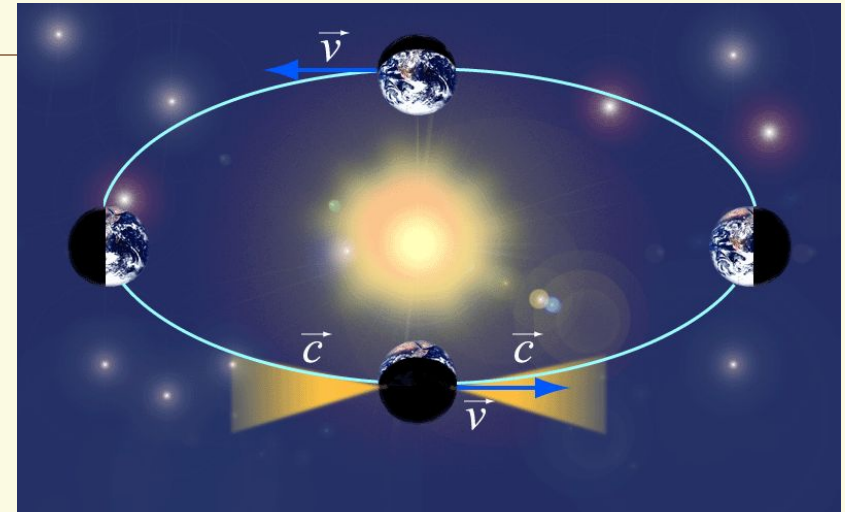
---

Обобщение полученных выше результатов формулируется в виде **принципа относительности**

**Галилея** (Г. Галилей, 1636 г.): *законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта, поэтому никакими механическими опытами внутри ИСО, изолированных от внешних воздействий, невозможно обнаружить её движение с постоянной скоростью. К этому принципу Г. Галилей пришёл на основе опыта и мысленных экспериментов. Принцип относительности Галилея утверждает **равноправие всех ИСО***

# Расхождение классической теории с опытом Майкельсона - Морли.

В 1881 – 1887 гг. Альберт Майкельсон и Эдуард Морли экспериментально исследовали влияние движения Земли на скорость распространения света, испущенного земным источником. Эти опыты показали независимость скорости света от скорости движения источника, что противоречит правилу сложения скоростей в классической механике.



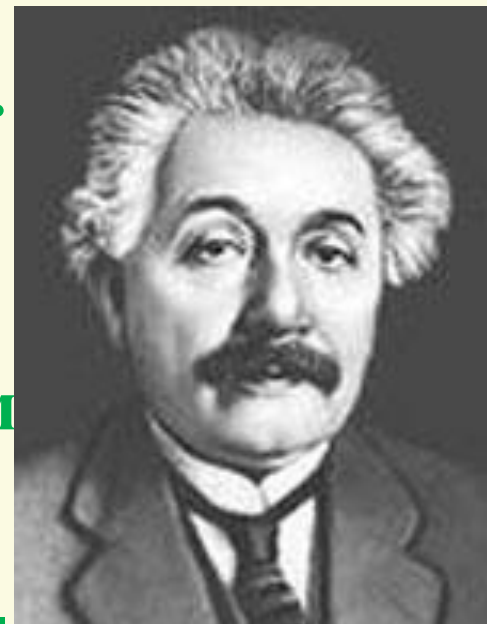
# Основные постулаты СТО (специальной теории относ)

*Первый постулат теории относительности.*

Все законы природы одинаковы  
в инерциальных системах отсчета.

*Второй постулат теории  
относительности.*

Скорость света  $c=3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  в вакууме  
одинакова во всех инерциальных  
системах отсчета и является макси-  
мальной для любого физического  
взаимодействия (сигнала).



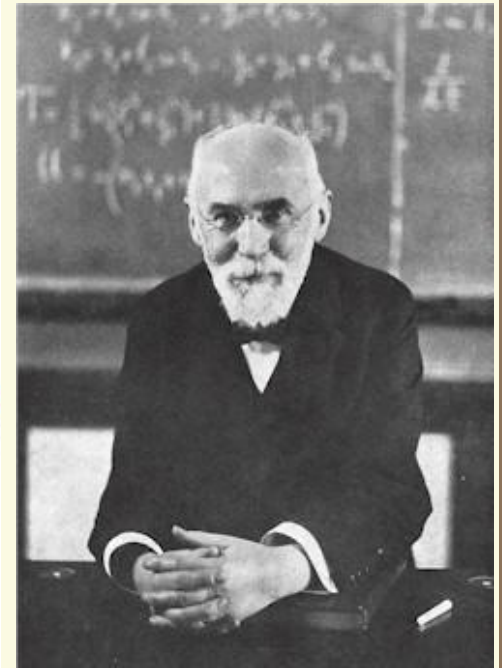
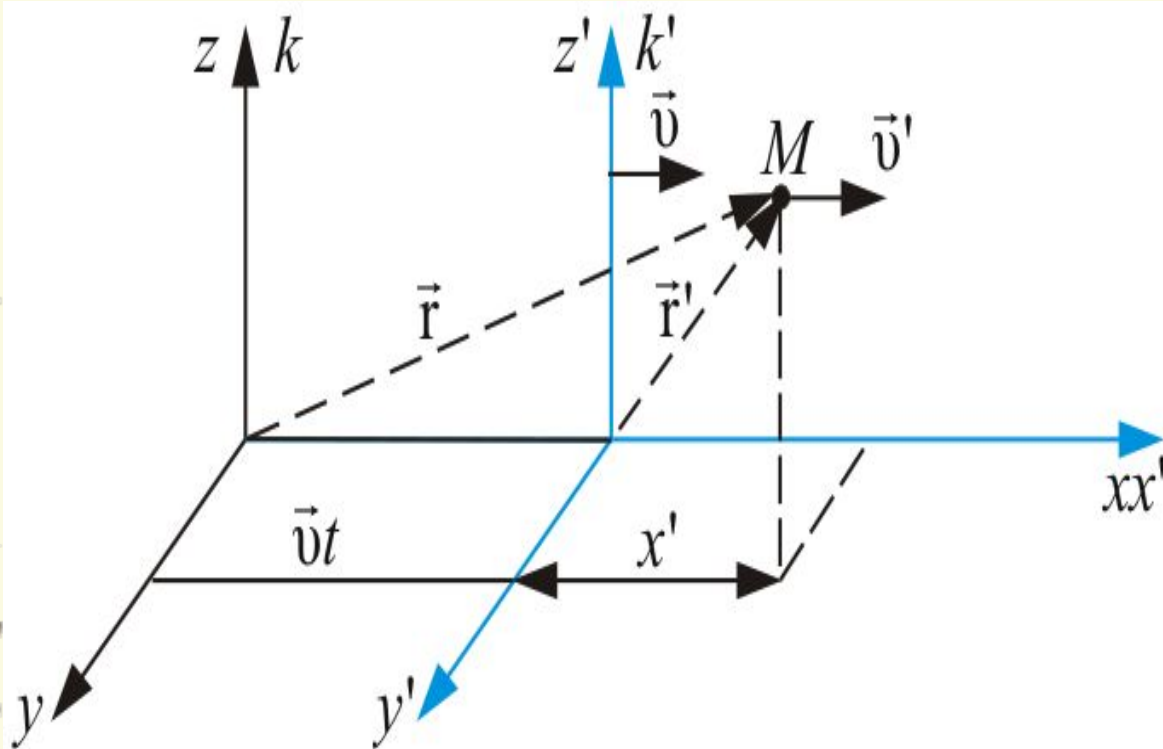
Альберт  
Эйнштейн  
1879-1955

# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Для систем отсчёта  $k$  и  $k'$  преобразования Лоренца имеют вид ( $V \sim c$ ) релятивистский

случай:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$



Лоренц

# Сокращение длины

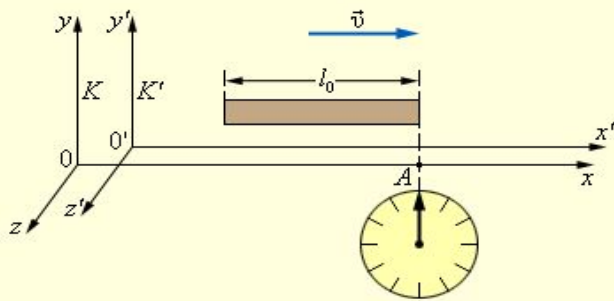
Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси  $x'$  и покоящийся относительно системы  $K'$ . Длина

его в этой системе равна  $l_0 = x'_2 - x'_1$ .

Для определения длины стержня в системе  $K$

нужно отметить координаты концов стержня в

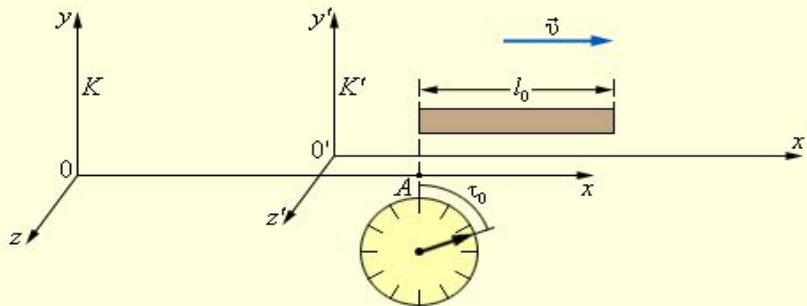
один и тот же момент времени  $t$ .



$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

$$x_2 - x_1 \equiv l;$$



$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

# Замедление времени

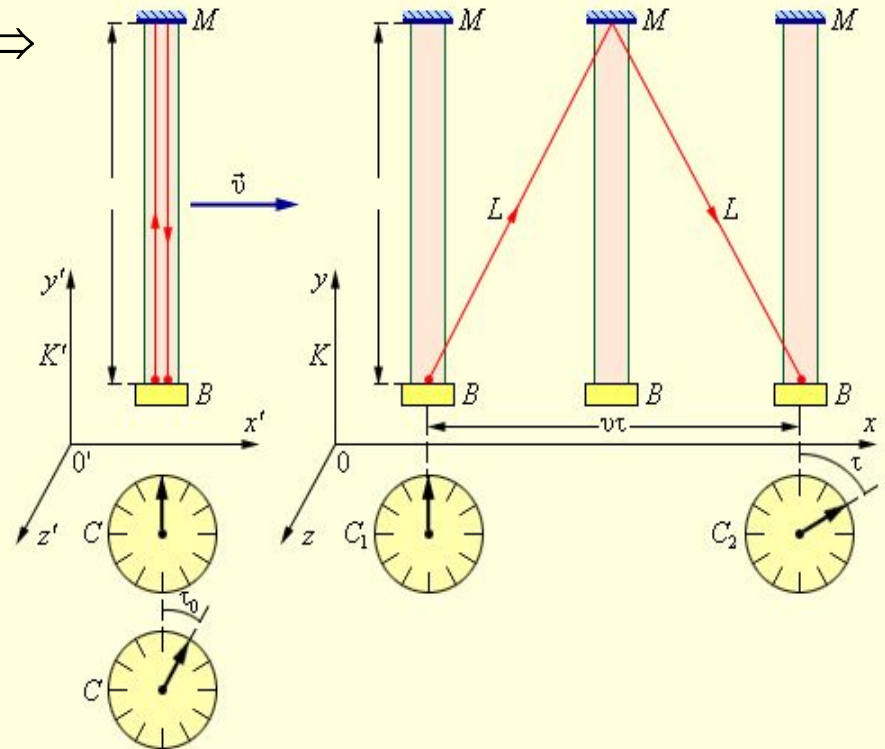
Пусть в одной и той же точке  $x'_1 = x'_2 = x'$  системы  $K'$  происходят два события в моменты времени  $t'_1$  и  $t'_2$ . Этим событиям соответствуют в системе  $K$  моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

$$t_2 - t_1 \equiv \Delta t; \quad t'_2 - t'_1 \equiv \Delta \tau$$

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$



# Общезфизический принцип относительности

Принцип относительности в трактовке Эйнштейна:

*“Законы природы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из инерциальных систем отсчёта относятся эти изменения”.*

В релятивистской механике **импульс** частицы:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

где для сохранения классической формулы  $\vec{p} = m\vec{V}$

вводят понятие **релятивистской массы** :

$$m_{\text{рел}} = \frac{m}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad m \text{ - масса покоя (при } V=0)$$

## Релятивистская энергия частицы

в отсутствие действия внешних физических полей:

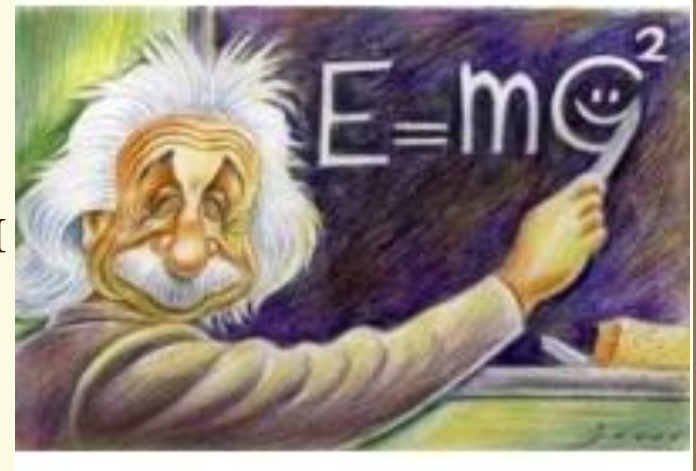
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Связь между импульсом и энергией :

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad - \text{ формула Эйнштейна}$$

$$E_0 = mc^2$$

- энергия покоя частицы ( $V = 0$ )



Кинетическая энергия частицы

$K$  определяется выражением:

$$K = E - E_0 = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - E_0$$

В области малых скоростей, где  $V \ll c$  и  $pc \ll E_0$ ,

кинетическая энергия:

$$K \approx \frac{p^2 c^2}{2E_0} = \frac{p^2}{2m} = \frac{mV^2}{2}$$



# РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

В специальной теории относительности уравнение движения имеет тот же вид, что и в механике

Ньютона:  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ , но:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \right) = \vec{F} \Rightarrow$$

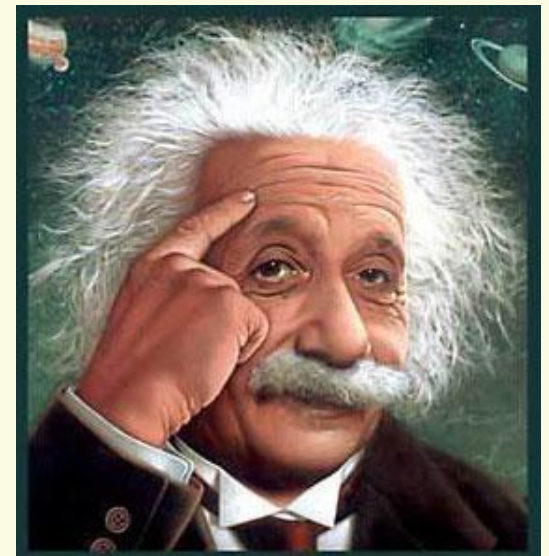
$$\frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + \frac{m(\vec{V}/c^2)(\vec{V} \cdot \vec{a})}{(1-V^2/c^2)^{3/2}} = \vec{F}.$$

$$\vec{a} = \sqrt{1-V^2/c^2} \left( \frac{\vec{F}}{m} - \frac{\vec{V}\vec{V}}{mc^2} \cdot \vec{F} \right).$$

# Принцип соответствия

Суть этого принципа в том, что любая новая теория, претендующая на более глубокое описание физической действительности и на более широкую область применимости, чем старая теория, должна включать в себя эту старую теорию как предельный случай. В полном согласии с принципом соответствия *преобразования*

*Лоренца переходят в преобразования Галилея, а релятивистский закон динамики переходит в классический закон Ньютона.*



# Неинерциальные системы отсчёта

Для описания механического движения можно также использовать **неинерциальные системы**

**отсчета** (НСО), построенные на телах, которые движутся ускоренно. Нерелятивистский второй закон Ньютона в НСО имеет вид:

$$m a_{отн.} = F + F_{инер.}$$

где  $a_{отн.}$  - относительное ускорение частицы, измеряемое в НСО,  $F$  - обычная сила взаимодействия данной частицы с другими частицами или внешними физическими полями и  $F_{инер.}$  - **сила инерции**. Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета.

Силы инерции инвариантны относительно перехода из одной системы отсчета в другую. Они не подчиняются закону действия и противодействия. Движения тела под действием сил инерции аналогично движению во внешнем силовом поле.

Силы инерции всегда являются внешними по отношению к любому движению системы материальных тел.

Допустим, что НСО движется поступательно с ускорением  $\vec{a}$  относительно некоторой ИСО. В этом случае сила инерции (поступательная сила инерции) в уравнении принимает вид:

$$\vec{F}_{инер.} = -m\vec{a}$$

Ускорение  $\vec{a}$ , с которым движется ИСО, обычно называется переносным ускорением и обозначается как  $\vec{a}_{пер.}$ . Ускорение частицы, измеряемое в ИСО, называется абсолютным ускорением и обозначается как  $\vec{a}_{абс.}$ . Все три перечисленные выше ускорения связаны простым соотношением:

$$\vec{a}_{абс.} = \vec{a}_{пер.} + \vec{a}_{отн.}$$

Уравнение относительного движения частицы:

$$m\vec{a}_{отн.} = F - m\vec{a}_{пер.}$$

# Центробежная сила инерции

Если НСО и рассматриваемая частица вращаются с одинаковой постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $Z$  неподвижной ИСО, то на частицу действует центробежная сила инерции

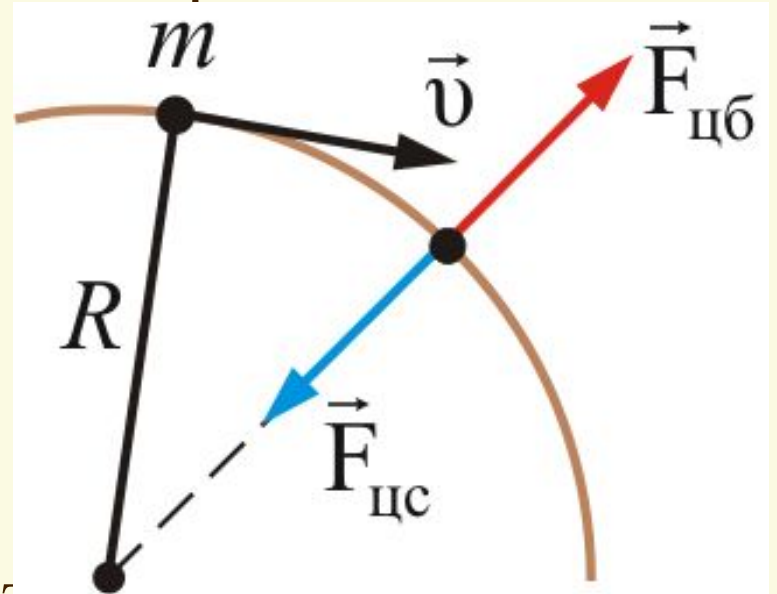
$$\vec{F}_{ц.б.} = -m\vec{a}_{пер.}$$

$$\vec{a}_{пер.} = -\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

$\vec{r}'_{\perp}$  - радиус-вектор частицы

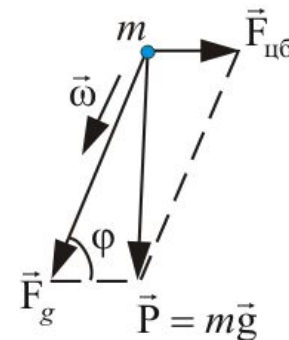
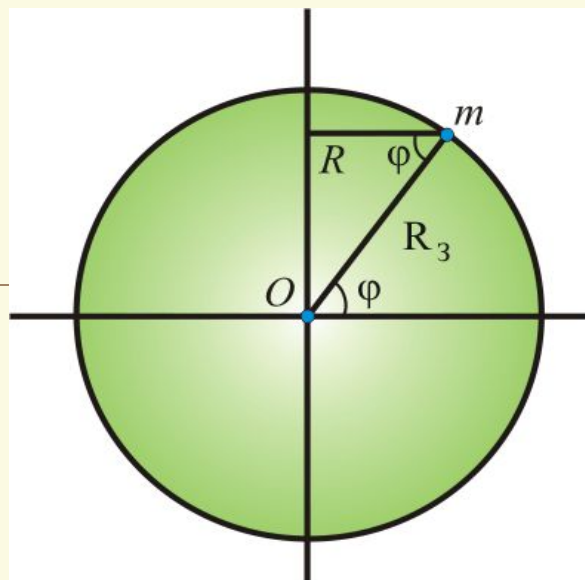
в НСО, лежащий в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

$$a_{пер.} = a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R; \quad F_{цб} = m\omega^2 R.$$



$$R = R_3 \cos \varphi$$

где  $\varphi$  – широта местности



$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_3 \cos \varphi,$$

Сила тяжести есть результат сложения

$$\vec{F}_g \text{ и } \vec{F}_{\text{цб}} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{цб}}$$

$g$  (а значит и  $mg$ ) зависят от широты местности

$g = 9,80665 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного

падения тела. Направлено  $g$  к центру только на

полюсе и на экваторе.

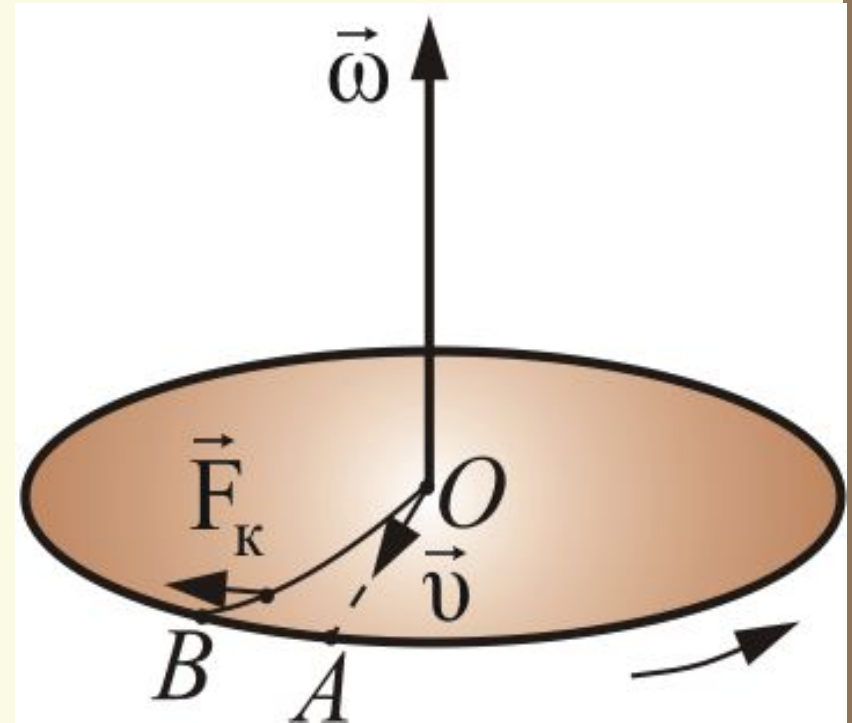
# Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной и центробежной сил, появляется еще одна сила, называемая *силой Кориолиса* или *кориолисовой силой инерции* (Г. Кориолис (1792 – 1843) – французский физик).

$$\vec{F}_K = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$$

$$\vec{F}_K \perp \vec{v}$$

$$\vec{F}_K \perp \vec{\omega}$$





## Сила Кориолиса,

действует на тело,  
движущееся вдоль

меридиана

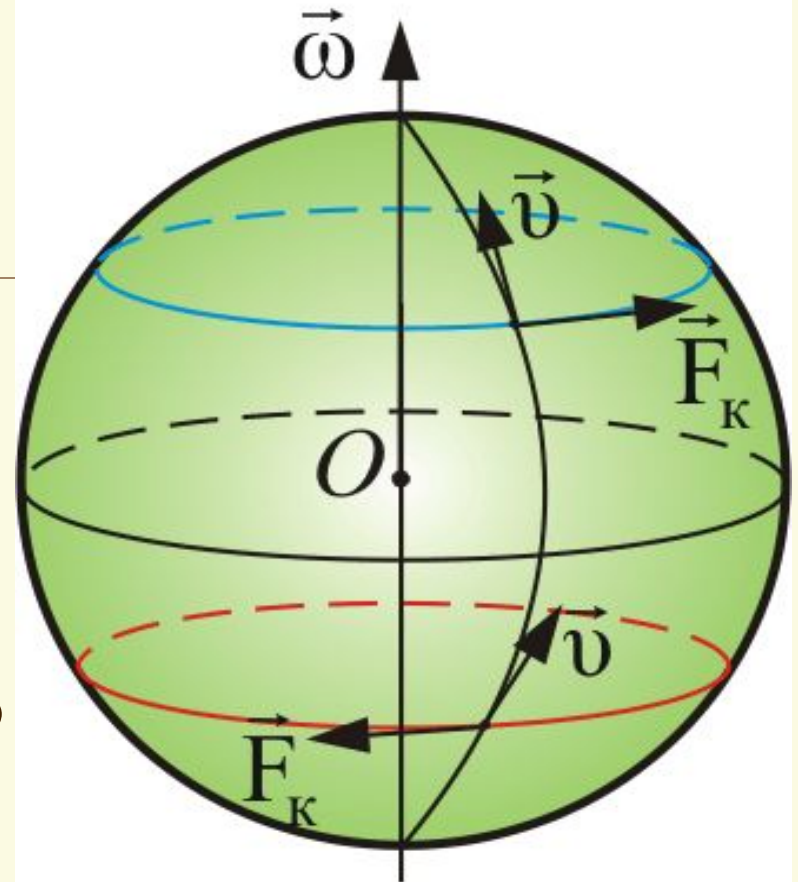
в северном полушарии

вправо и в южном –

влево.

Это приводит к тому, что  
у рек подмывается всегда  
правый берег в северном  
полушарии и левый – в южном.

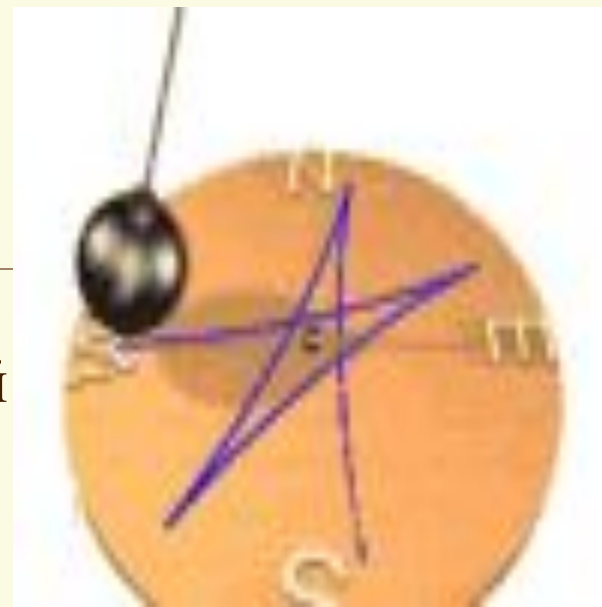
Эти же причины объясняют  
неодинаковый износ рельсов  
железнодорожных путей.



Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника (**маятник Фуко**). Плоскость качаний маятника вследствие вращения Земли поворачивается, и проекция траектории маятника на поверхность Земли имеет вид розетки. Для простоты предположим, что маятник расположен на полюсе.



● Колебания маятника Фуко зависят от того, как они были возбуждены. Если маятник отклонить на максимальный угол, а затем отпустить его без начальной скорости, то маятник будет колебаться, как изображено на верхней анимации. Скорость движения маятника в положении максимального отклонения будет равна нулю



● Несколько иной характер траектории получится, если маятник приводится в движение коротким толчком из положения равновесия. Этому случаю соответствует нижняя анимация. Скорость маятника в положении максимального отклонения соответствует скорости вращения Земли на широте наблюдения.



С учетом всех сил инерции, уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета примет вид:

$$m \overset{\rceil}{a}_{отн.} = \overset{\rceil}{F} + \overset{\rceil}{F}_{ин} + \overset{\rceil}{F}_{цб} + \overset{\rceil}{F}_к,$$

$\overset{\rceil}{F}_{ин}$  – сила инерции, обусловленная поступательным движением неинерциальной системы отсчета;

$\overset{\rceil}{F}_{цб} + \overset{\rceil}{F}_к$  – две силы инерции, обусловленные вращательным движением системы отсчета;

$$\overset{\rceil}{F}_{ин} = -m \overset{\rceil}{a}, \quad \overset{\rceil}{F}_к = 2m [\overset{\rceil}{v}, \overset{\rceil}{\omega}],$$

$$\overset{\rceil}{F}_{цб} = m \overset{\rceil}{a}_n.$$

# Релятивистская теория тяготения (общая теория относительности)

Теория тяготения Ньютона неприменима для описания движения частиц вблизи массивных тел (в частности, для описания траектории движения света в поле тяготения). Неприменима теория тяготения Ньютона и для описания переменных полей тяготения, создаваемых движущимися телами.

Обобщение теории тяготения на основе специальной теории относительности было сделано А. Эйнштейном в 1908 – 1916 гг. Эта теория была названа им *общей теорией относительности (ОТО)*.

Потенциальная энергия тела массы  $m$  в поле тяготения равна:

$$U = m\varphi, \quad \text{где } \varphi \text{ – потенциал поля тяготения.}$$

Если величина  $U$  мала по сравнению с энергией тела  $mc^2$  т.е. если  $(\varphi / c^2) \ll 1$

и тело движется со скоростью, много меньшей скорости света  $(v \ll c)$  то мы имеем дело с **классическим гравитационным полем** для которого справедлив закон всемирного тяготения Ньютона.

В полях тяготения обычных небесных тел это условие выполняется:

на поверхности Солнца  $\varphi / c^2 \approx 4 \cdot 10^{-6}$ ,

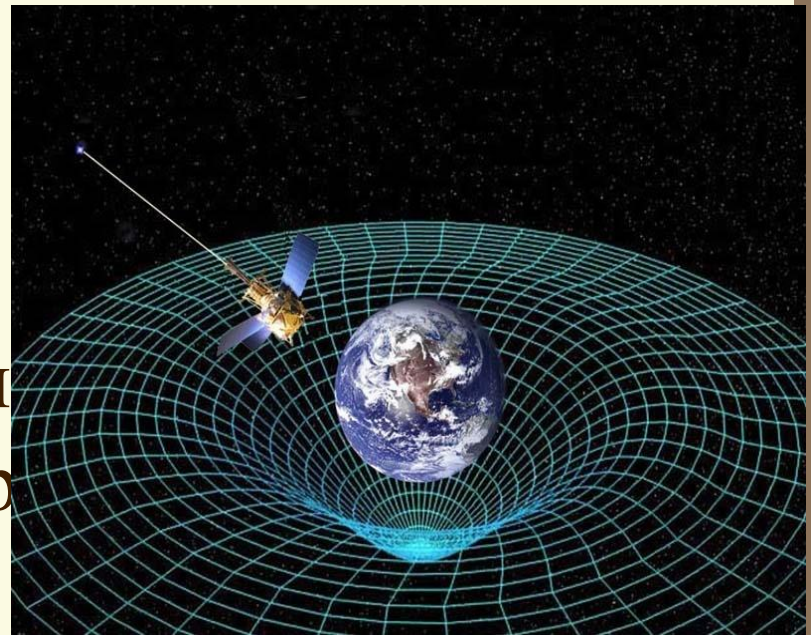
на поверхности белых карликов,  $10^{-3}$ .

Теория тяготения Ньютона предполагает мгновенное распространение полей тяготения, что не согласуется с принципами специальной теории относительности, основанной на том экспериментальном факте, что любое взаимодействие распространяется со скоростью, меньшей или равной скорости света. Поэтому **теорию тяготения Ньютона нельзя применять к сильным полям тяготения, разгоняющим частицы до скорости, близкой к скорости света:**

$$(\varphi / c^2 \approx 1)$$

В ОТО описываются *сильные гравитационные поля* ( $\varphi / c^2 \approx 1$ ) и движение в них с большими скоростями ( $v \approx c$ )

В ОТО учитывается воздействие материи на свойства пространства и времени (искривление пространства массивным телом), а эти измененные свойства пространства – времени влияют на сам характер физических процессов.





# Принцип эквивалентности сил инерции и сил тяготения

Важнейшей особенностью полей тяготения является то, что тяготение совершенно одинаково действует на разные тела, сообщая им одинаковые ускорения, независимо от свойств тел.

Между **силами инерции**, пропорциональными инертной массе тела, и **силой всемирного тяготения**, пропорциональной гравитационной массе, есть глубокое сходство, основанное на равенстве этих масс для любого тела

$$m_g = m_{in} \text{ с относительной погрешностью } 10^{-12}.$$

Тождественность инерциальной и гравитационной масс  $m_g = m_{in}$  является следствием эквивалентности сил инерции и сил тяготения.

Этот факт называется *принципом эквивалентности Эйнштейна*. Согласно этому принципу, все физические процессы в истинном поле тяготения и в ускоренной системе отсчета, в отсутствии тяготения, протекают одинаковым образом. Это фундаментальный закон природы. В отношении механического движения в достаточно малой области, где , переход в НСО, движущуюся с постоянным ускорением , позволяет компенсировать силу всемирного тяготения.

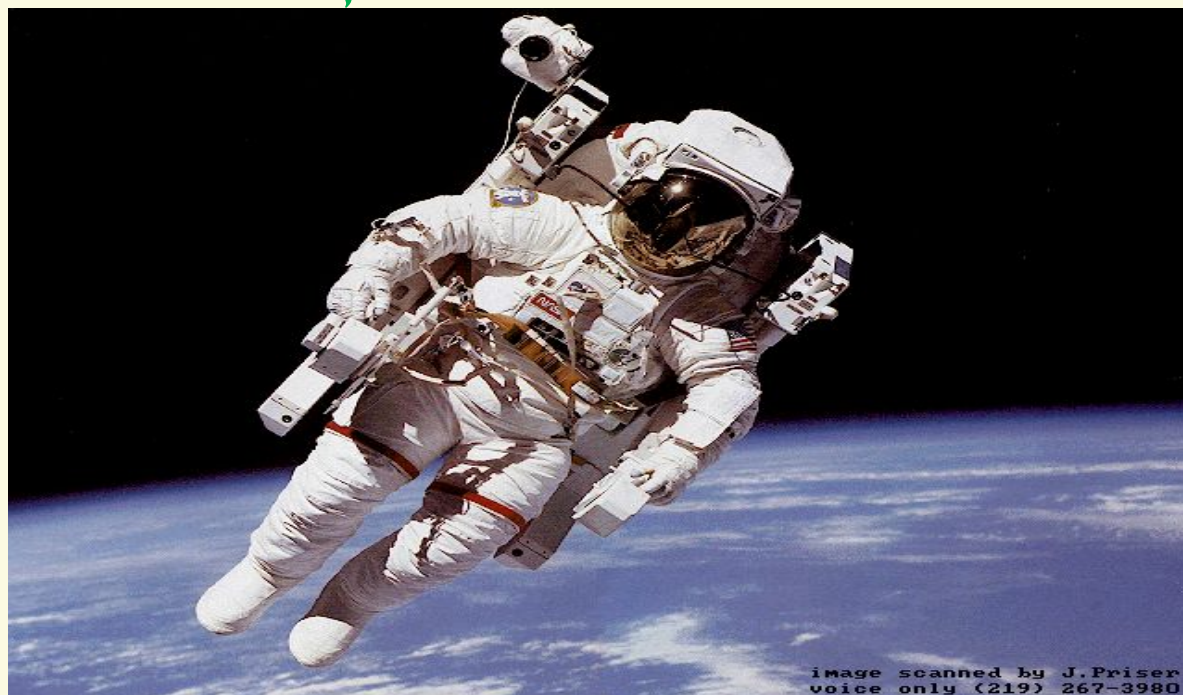
$$\vec{g} = -\vec{a}$$

Принцип эквивалентности был использован А. Эйнштейном при создании **релятивистской теории гравитации** (общей теории относительности) в 1915 – 1916 гг., в основу которой были положены два постулата:

1) все физические процессы в поле тяготения и в НСО в достаточно малой пространственно-временной области, где  $\overset{\vee}{g} = const$ , протекают по одинаковым законам (принцип эквивалентности сил инерции и сил гравитации);

2) максимальная скорость распространения любых физических взаимодействий, включая гравитационные, равна скорости света в вакууме.

Ярчайшим доказательством равенства сил инерции и гравитации является **состояние невесомости космонавтов** в космическом корабле (падают под действием гравитационных сил и отлетают под действием центробежных сил инерции). **Принцип эквивалентности** — **основополагающий в ОТО Эйнштейна.**



СТО оперирует плоским пространством-временем, а ОТО – искривленным.

*Любая масса, искривляет пространство-время, другая масса, попадая в область искривления, испытывает силу притяжения.*

*Замедление времени в гравитационных полях.*

Общая теория относительности предсказывает замедление хода часов в гравитационных полях.

С точки зрения неподвижного наблюдателя промежутки времени  $dt$  в неподвижной и  $dt_0$  в подвижной системах отсчета связаны

соотношением:

$$dt \cong dt_0 \left( 1 + \frac{\varphi}{c^2} \right) \quad (dt > dt_0)$$

# Чёрные дыры

Уже есть достаточно веские доказательства существования **чёрных дыр**. Основная трудность состоит в том, что они поглощают все и почти ничего не излучают. Поэтому об их существовании можно судить по косвенным данным: поглощению вещества и испусканию в этом процессе излучения. **Пространство внутри чёрных дыр сворачивается, время практически останавливается.** Можно оценить размеры  $r_g$  и массу  $M$  космического объекта, способного стать черной дырой.

Если  $r_g \leq G \frac{2M}{c^2}$  то **свет не сможет** покинуть данный космический объект.

Джет →

Диск аккреции

излучение



Черная дыра (схема)



ОТО предполагает наличие во Вселенной **черных дыр** - космических объектов, поглощающих все частицы, в том числе фотоны, подходящие к их поверхности. Они образуются в результате взрыва гигантских звезд массой более 3 масс Солнца. Вблизи черной дыры газ сильно разогревается

и становится

источником

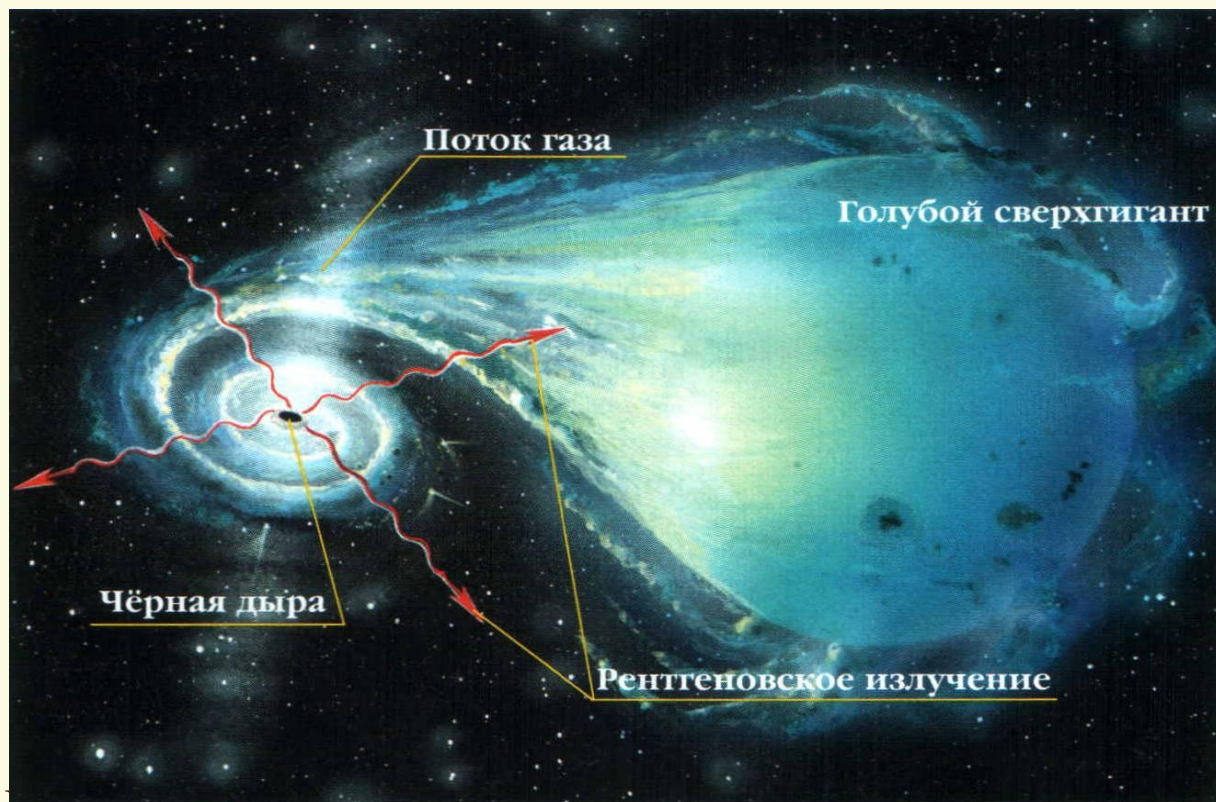
высокоэнер-

гичного элек-

тромагнитного

излучения в

рентгеновском и гамма - диапазоне.





Согласно современным экспериментальным данным лишь 5% всей массы Вселенной составляет известное нам вещество. При этом примерно для 30% массы Вселенной справедлив закон гравитационного притяжения, а для ~70% (так называемой “темной энергии”) наблюдается гравитационное отталкивание. Благодаря гравитационному отталкиванию материи в виде “темной энергии” наша Вселенная расширяется ускоренно. Роль антигравитации в динамике Вселенной со временем будет только возрастать, поэтому именно неизвестная нам “темная энергия” определяет будущее Вселенной.



# Система материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  материальных точек с заданными массами  $m_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$  - номер частицы. Состояние системы материальных точек задаётся путём определения состояния всех материальных точек, входящих в данную систему:

$$\{\overset{\boxtimes}{r}_i(t), \overset{\boxtimes}{V}_i(t)\}$$

**Центром масс** (или **центром инерции**) системы материальных точек называется воображаемая точка  $C$ , положение которой характеризует распределение массы этой системы.

Ее **радиус-вектор** равен:

$$\overset{\boxtimes}{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overset{\boxtimes}{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overset{\boxtimes}{r}_i}{m}$$

# Центр масс ( инерции )

Воображаемую точку  $C$  с радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

где  $i$  - номер точки,

$n$  - количество точек,

$m_i$  - масса  $i$ -ой точки и

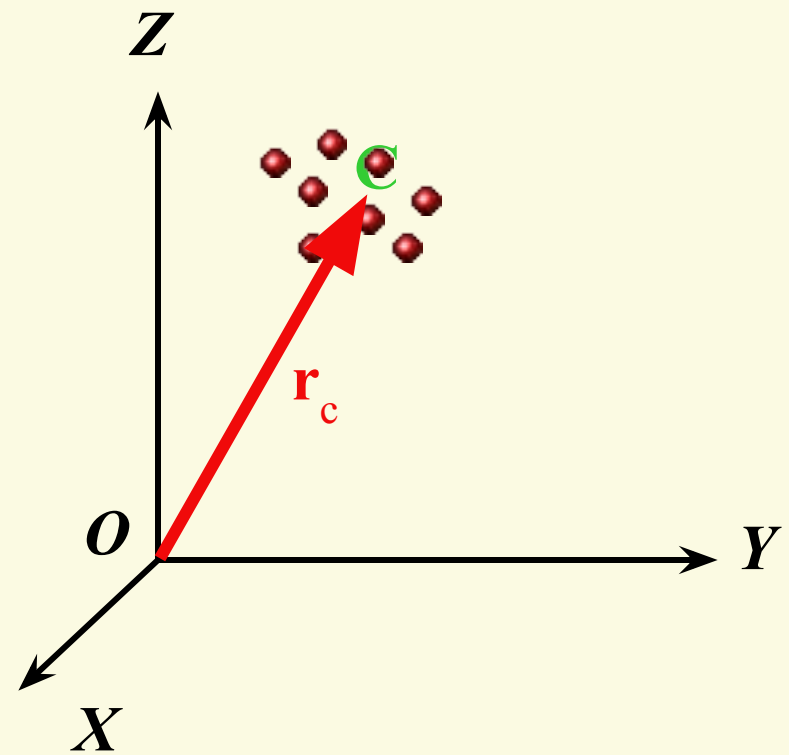
$m$  - масса всей системы

точек

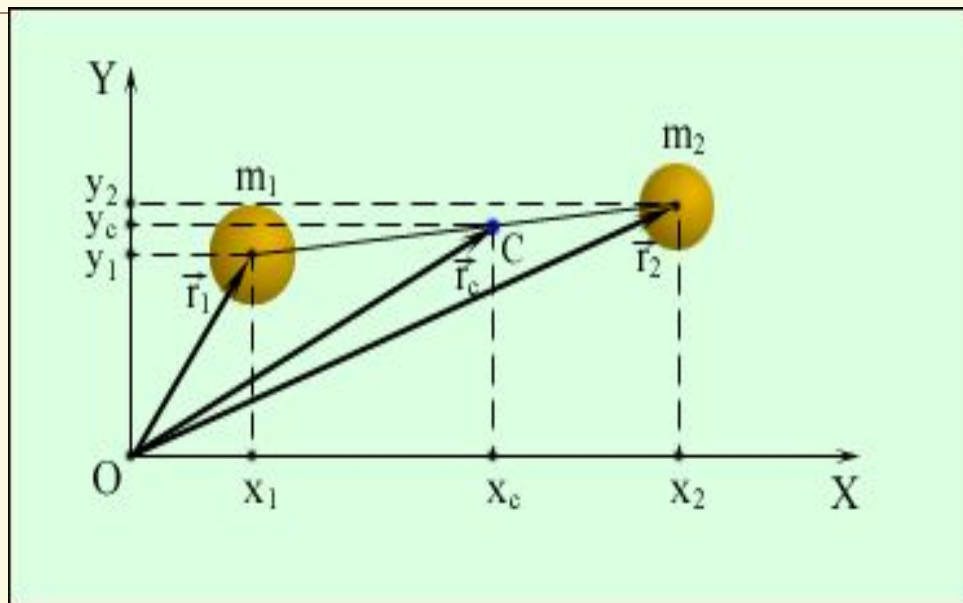
называют **центром масс**

системы материальных

точек



# ЦЕНТР МАСС (ЦЕНТР ИНЕРЦИИ)



$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}; \quad \text{- радиус-вектор центра масс}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{m};$$

# Аддитивность массы в нерелятивистской механике.

Полная масса системы материальных точек:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

в области малых скоростей  $v \ll c$  находится путём сложения масс всех частиц систем (здесь используется **аддитивность массы** в нерелятивистской механике). В релятивистской механике масса системы частиц зависит от энергии взаимодействия между частицами, поэтому последняя формула не справедлива.

# Скорость центра масс системы материальных точек

Взяв производную  $\overset{\Delta}{r}_c$  по времени, получим  
скорость центра масс:

$$\overset{\Delta}{v}_c = \frac{d\overset{\Delta}{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\overset{\Delta}{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overset{\Delta}{v}_i$$

где  $\frac{d\overset{\Delta}{r}_i}{dt} = \overset{\Delta}{v}_i$  - скорость  $i$ -ой материальной  
точки системы

# Полный импульс системы материальных точек (частиц)

В нерелятивистской механике **полный импульс системы материальных точек** равен сумме импульсов всех частиц системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

где  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  - импульс  $i$ -ой частицы.

Так как  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c$ , где  $m = \sum_{i=1}^n m_i$   
 $\vec{v}_c$  - скорость ц.м.

то импульс системы частиц можно определить по формуле:

$$\vec{p} = m \vec{v}_c$$

$$\vec{p}_c = m\vec{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i$$

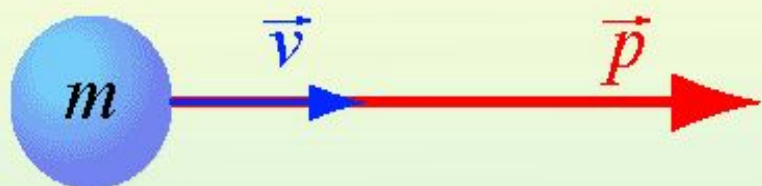
- импульс центра масс

Импульс системы материальных точек (импульс центра масс) равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

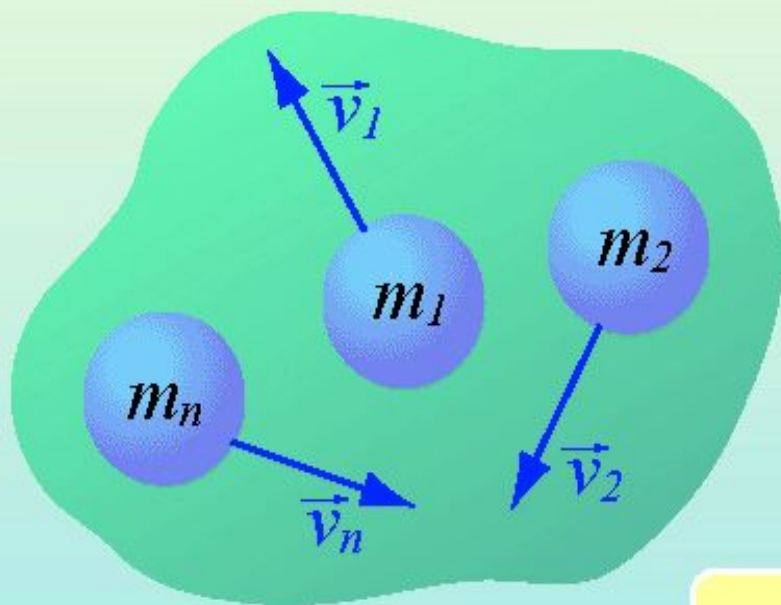
Таким образом связь импульса  $\vec{p}_c$  со скоростью  $\vec{v}_c$  такая же, как для материальной точки с массой  $m$  (масса системы).



Импульс тела – мера механического движения



$$\vec{p} = m\vec{v}$$



$$\vec{p}_{\text{сум}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

$$\vec{p}_{\text{сум}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n$$

# Основное уравнение динамики поступательного движения произвольной системы частиц

Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называют **внешними телами**, а силы, действующие на систему со стороны этих тел — **внешними силами**. Силы взаимодействия между телами внутри системы, называют **внутренними силами**.

Результирующая всех внутренних сил действующих на  $i$ -ое тело:

$$\vec{F}_i^{\text{внутр.}} = \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ik} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{in},$$

где  $k \neq i$  — т.к.  $i$ -ая точка не может действовать сама на себя.

Обозначим  $\vec{F}_i^{\text{внеш.}}$  – результирующая всех **внешних сил** приложенных к  $i$ -ой точке системы.

По второму закону Ньютона можно записать систему уравнений:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) = \vec{F}_1^{\text{внеш.}} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n},$$

$$\frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) = \vec{F}_2^{\text{внеш.}} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n},$$

.....,

$$\frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) = \vec{F}_n^{\text{внеш.}} + \vec{F}_{n1} + \dots + \vec{F}_{n,n-1}.$$

Сложим эти уравнения и сгруппируем попарно силы  $\vec{F}_{ik}$  и  $\vec{F}_{ki}$ :

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}} + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + \dots + (\vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_{n,n-1}).$$

По третьему закону Ньютона  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ , поэтому все выражения в скобках в правой части уравнения равны нулю. Тогда получаем:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Назовем  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}}$  — **главным вектором всех внешних сил**, тогда:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  Скорость изменения импульса системы  
равна главному вектору всех внешних сил,  
действующих на эту систему.

Это уравнение называют **основным уравнением динамики поступательного движения системы тел**. Так как импульс

системы  $\vec{p} = m\vec{v}_c$  то:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = \vec{F}$$

Тогда можно записать **основное уравнение динамики поступательного движения системы тел** в виде:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}$$

где  $\vec{a}_c$  – ускорение центра масс.

Центр механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе:  $m a_c = \vec{F}$

На основании *третьего закона Ньютона*, силы, действующие на тела системы со стороны других тел системы (*внутренние силы*), *взаимно компенсируют друг друга*. Остаются только *внешние силы*.

В общем случае движение тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью  $\vec{v} = \vec{v}_c$  и вращательного вокруг *центра масс*.

# Теорема о движении центра масс

Рассмотрим подробнее силы, действующие на частицы механической системы

Силы, действующие на каждую точку системы, разобьем на два типа

- *внутренние силы*

- *результатирующая всех внешних сил*

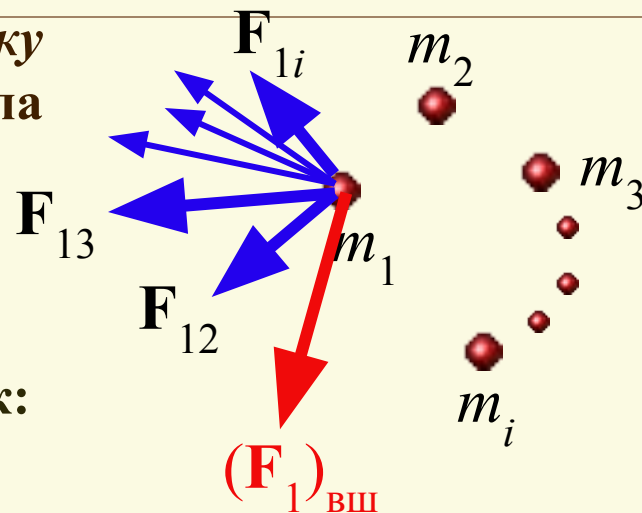
В общем виде это можно записать так:

$$\vec{F}_i = \sum_{k=1}^{n-1} \vec{F}_{ik} + (\vec{F}_i)_{\text{вн}}$$

По 3 закону Ньютона:  $\sum_{i,k} \vec{F}_{ik} \equiv 0$

И теорема о движении центра масс принимает вид:

$$\vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i)_{\text{вн}}$$



Если система находится во внешнем стационарном и однородном поле, то никакими действиями внутри системы невозможно изменить движение центра масс системы

# Закон сохранения импульса

Механическая система называется **замкнутой** (или изолированной), если на неё не действуют внешние силы, т.е. она не взаимодействует с внешними телами или  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}} = 0$ .

Строго говоря, каждая реальная система тел всегда не замкнута, т.к. подвержена, как минимум воздействию гравитационных сил. Однако если внутренние силы гораздо больше внешних, то такую систему можно считать замкнутой (например – Солнечная система).

**Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv 0$$



отсюда

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_c = \text{const.}$$

*Это есть закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы не изменяется во времени.*

Импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции:

$$\vec{p} = m \vec{v}_c$$

$$m \vec{v}_c = \text{const}$$

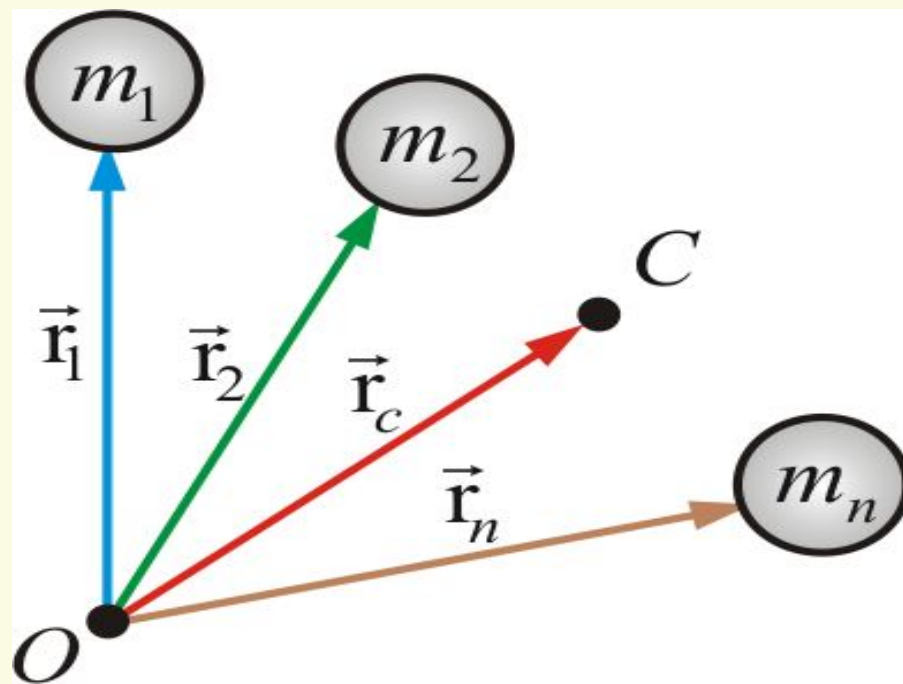
*При любых процессах, происходящих в замкнутых (изолированных) системах, скорость центра масс сохраняется неизменной.*

Закон сохранения импульса является одним из основных законов природы. Он был получен как следствие законов Ньютона, но он справедлив и для микрочастиц и для релятивистских скоростей, когда  $v \approx c$

# Система центра масс

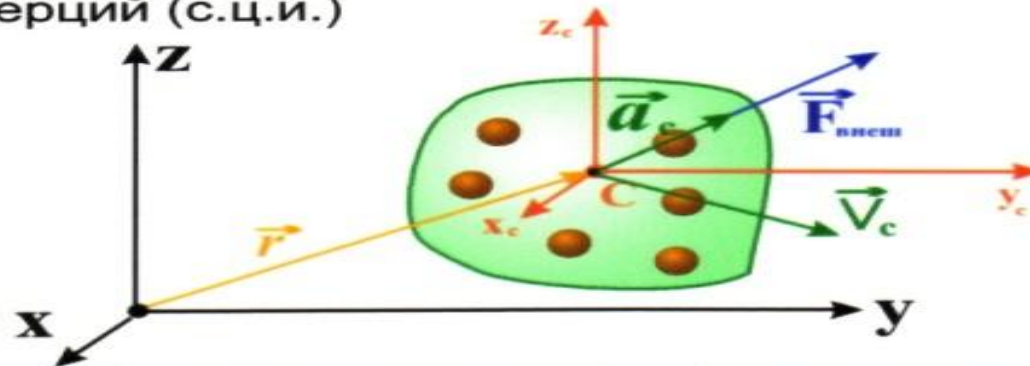
Система отсчёта, движущаяся со скоростью центра масс, называется **системой центра масс**.

В этой системе отсчёта полный импульс системы частиц равен нулю и наблюдается только относительное движение частиц, поэтому она удобна для анализа столкновения частиц.



## Система центра инерции

Система отсчета, связанная с центром масс **C** системы **N** материальных точек называется системой центра инерций (с.ц.и.)



В инерциальной системе отсчета (x,y,z) закон движения центра масс (**C**)

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

**m** - масса системы  $\vec{F}_{\text{внеш}}$  - сумма внешних сил

**Следствие 1:**  $\vec{F}_{\text{внеш}} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{v}_c = \mathbf{const}$

Система центра инерции - **инерциальная** и закон движения тела **m<sub>i</sub>** в (с.ц.и.)

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

**Следствие 2:**  $\vec{F}_{\text{внеш}} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{a}_c \neq \mathbf{0}$

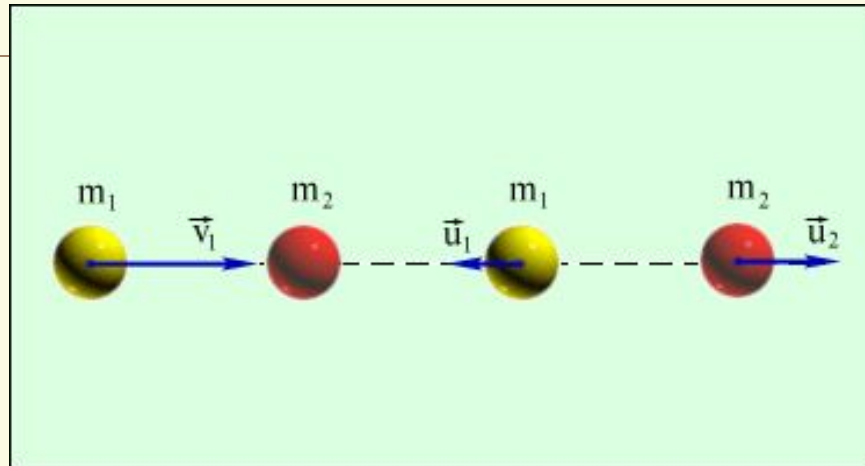
Система центра инерции - **неинерциальная**

В системе центра инерции к реально действующим силам  $\vec{F}_i$  следует добавлять силы инерции  $\vec{F}_u$  и закон движения тела **m<sub>i</sub>** в (с.ц.и.)

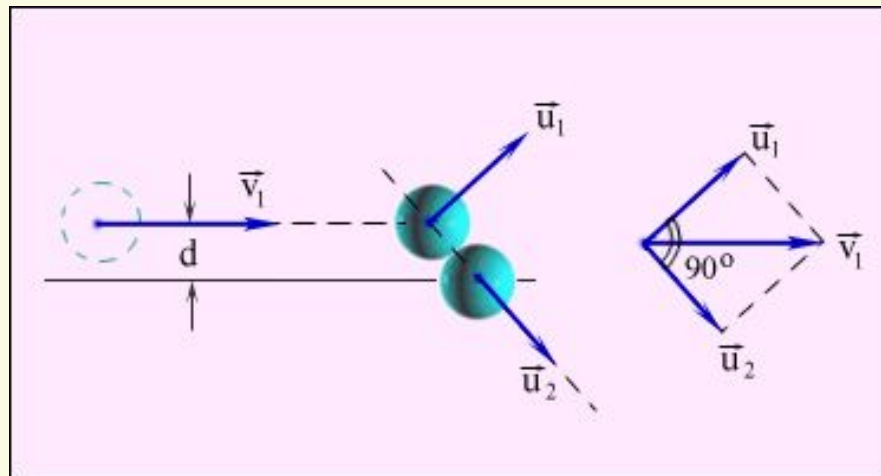
$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{F}_u$$

# Абсолютно упругий удар

Абсолютно упругий центральный удар шаров.

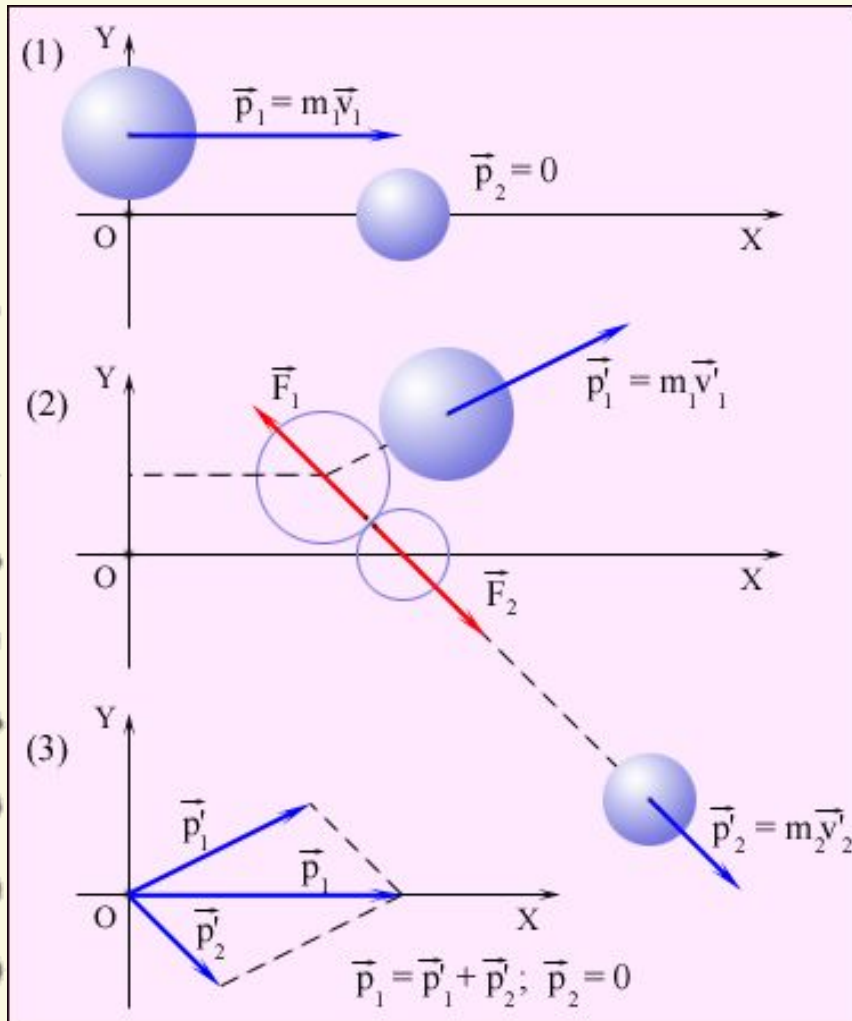


Нецентральное упругое соударение шаров одинаковой массы,  $d$  – прицельное расстояние.





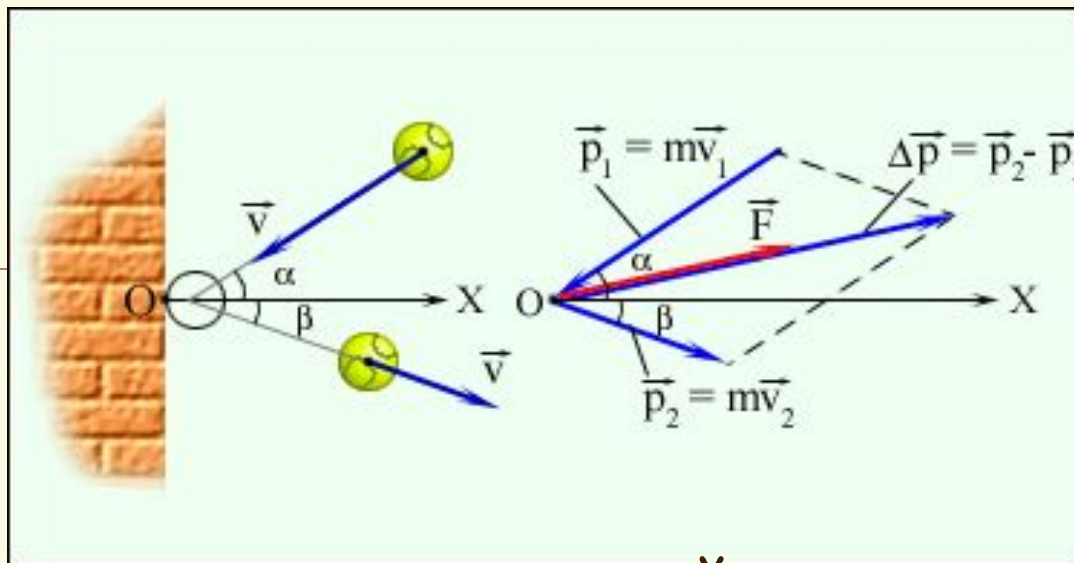
# Нецентральное соударение шаров разных масс:



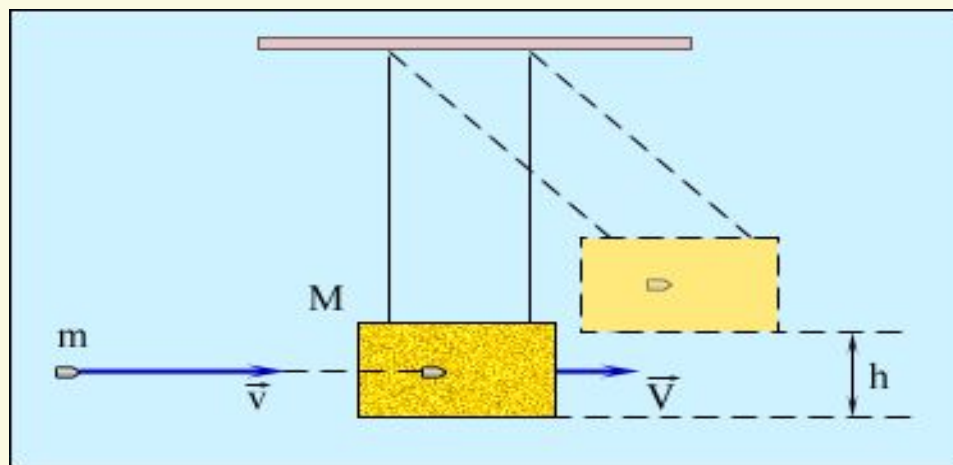
1 – импульсы до соударения;

2 – импульсы после соударения;

3 – диаграмма импульсов и закон сохранения импульса.



Отскок мяча от шероховатой стенки и диаграмма импульсов.

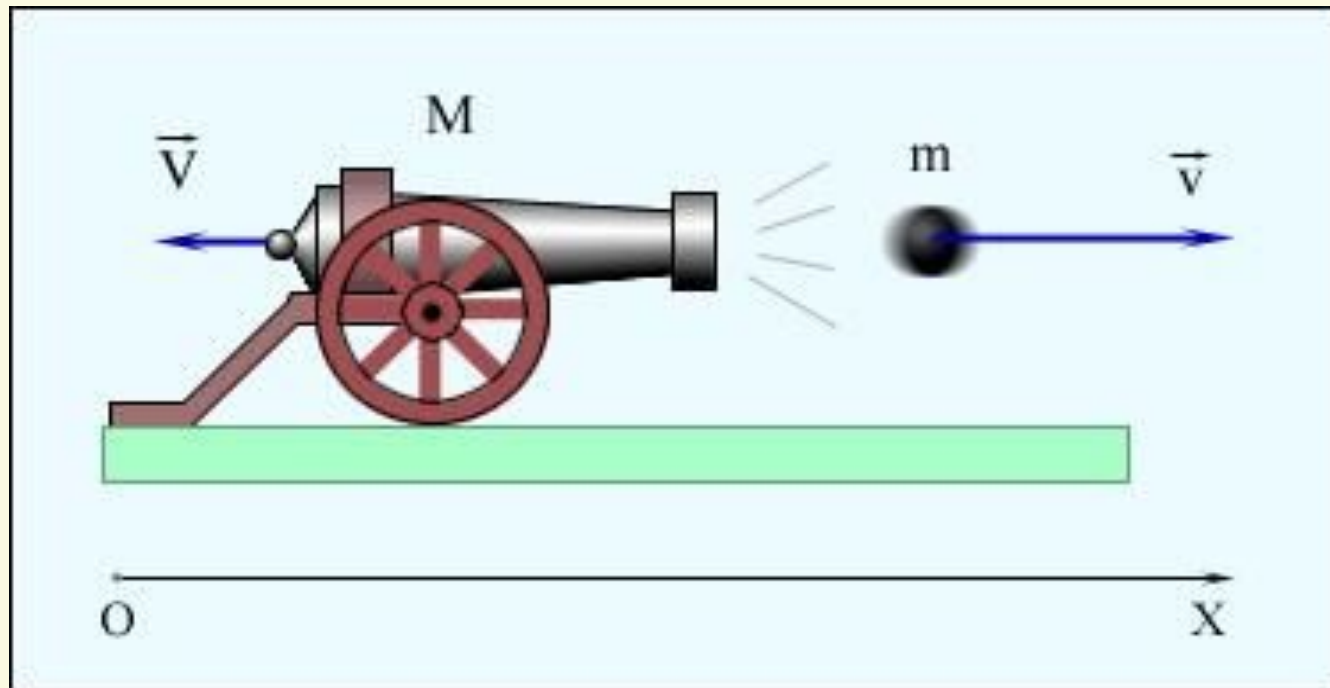


Баллистический маятник (неупругий удар).





При стрельбе из орудия возникает **отдача** – снаряд движется вперед, а орудие – откатывается назад. Снаряд и орудие – два взаимодействующих тела. Скорость, которую приобретает орудие при отдаче, зависит только от скорости снаряда и отношения масс.



$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

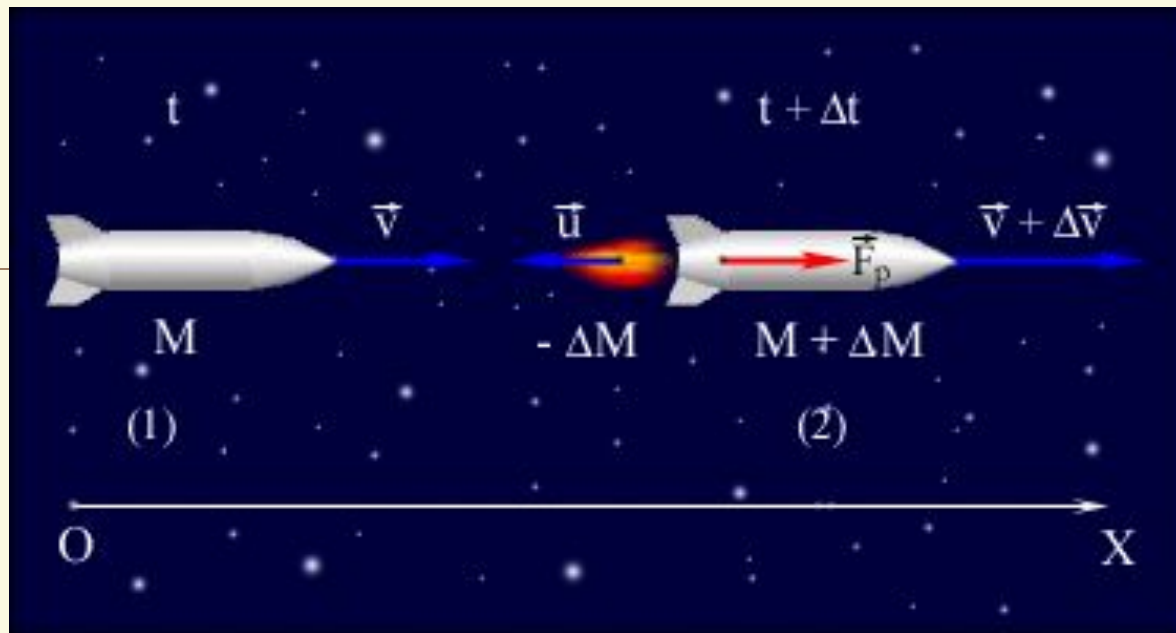


# Реактивное движение ( движение тел с переменной массой)

Движение тела, возникающее вследствие отделения от него части его массы с некоторой скоростью, называют реактивным. Масса ракеты уменьшается вследствие истечения газов, образующихся при сгорании топлива.

Получим уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты.





Если в момент времени  $t$  масса ракеты  $M$ , а ее скорость  $\vec{v}$ , то по истечении времени  $dt$  ее масса уменьшится на  $dM$  (или  $\Delta M$ ) и станет равной  $M - dM$ , а скорость станет равной

$$\vec{v} + d\vec{v}$$

Запишем изменение импульса за отрезок времени  $dt$

$$dp^{\square} = [(M - dM)(v^{\square} + dv^{\square}) + dM(v^{\square} + u^{\square})] - Mv^{\square}$$

где  $u^{\square}$  - скорость истечения газов относительно ракеты.

Тогда 
$$dp^{\square} = Mdv^{\square} + u^{\square}dM$$

(пренебрегаем слагаемым)  $dMdv^{\square}$

Если на систему действуют внешние силы, то

$$dp^{\square} = F^{\square}dt, \text{ тогда}$$

$$F^{\square}dt = Mdv^{\square} + u^{\square}dM \quad \text{или}$$

$$M \frac{dv^{\square}}{dt} = F^{\square} - u^{\square} \frac{dM}{dt}$$

Второе слагаемое в правой части называют

**реактивной силой**  $F_p$

Если  $u$  противоположен  $v$  по направлению, то ракета ускоряется, а если совпадает с  $v$ , то тормозится.

Получено уравнение движения переменной массы (**уравнение Мещерского**):

$$Ma = F + F_p$$

где **реактивная сила**

$$F_p = u \frac{dM}{dt}$$



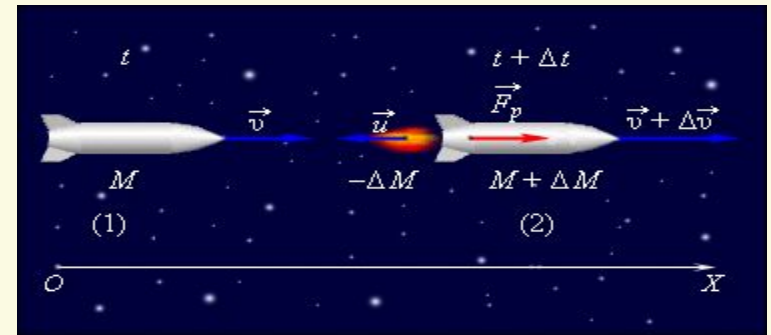
**ИВАН ВСЕВОЛОДОВИЧ МЕЩЕРСКИЙ  
(1859—1935)**

**И. В. Мещерский является основоположником  
механики тел переменной массы.**

Применим уравнение к движению ракеты, на которую **не действуют никакие внешние силы.**

Полагая  $\vec{F} = 0$  и считая, что скорость выбрасываемых газов относительно ракеты постоянна (ракета движется прямолинейно) и в начальный момент скорость ракеты равна нулю, а масса равна  $M_0$ , получим:

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt}$$



В проекции на ось  $X$ :

$$M dv = -u dM; dv = -u \frac{dM}{M}$$

$$v = -u \int \frac{dM}{M} = -u \ln M + C$$



Значение постоянной интегрирования  $C$  определим из начальных условий. Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее стартовая масса  $M_o$ , то

$$C = u \cdot \ln M_o, \quad \text{следовательно,}$$

$$v = u \cdot \ln \left( \frac{M_o}{M} \right) - \text{формула Циолковского}$$

Чем больше конечная масса ракеты  $M$ , тем больше должна быть стартовая масса ракеты  $M_o$ .

Чем больше скорость истечения газов  $u$ , тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.



Константин Эдуардович  
Циолковский  
(1857-1835)

К.Э.Циолковский  
разработал принципы  
реактивного движения,  
ученый и  
изобретатель,  
основоположник  
современной  
космонавтики и  
ракетной техники.

# Ракеты





**Реактивный самолёт-амфибия**

# Реактивный катер



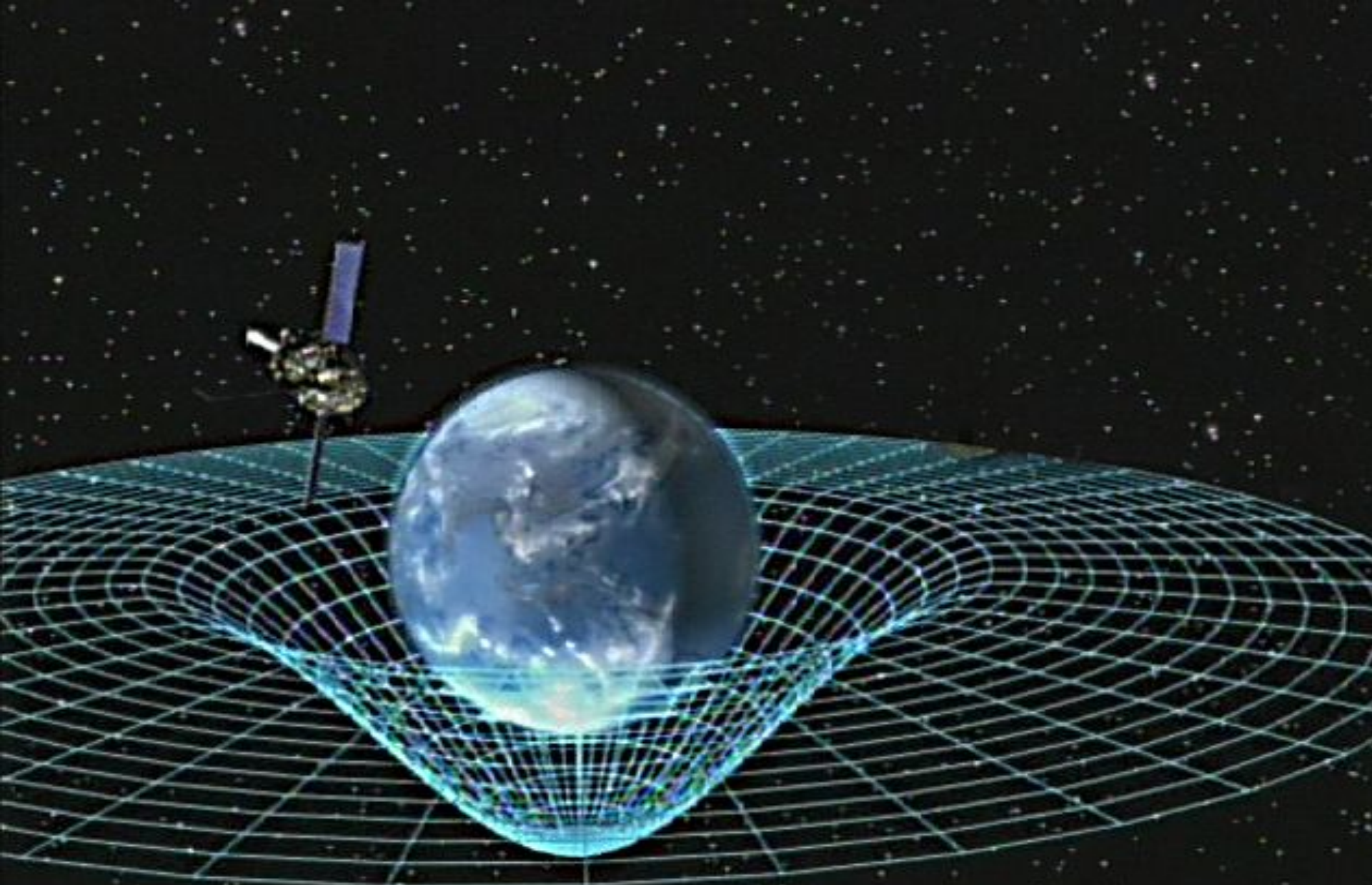
# Реактивная система залпового огня “Смерч”

---



# Реактивный ранец





**ЛЕКЦІЯ ЗАКОНЧЕНА!**