Уравнение касательной к графику функции

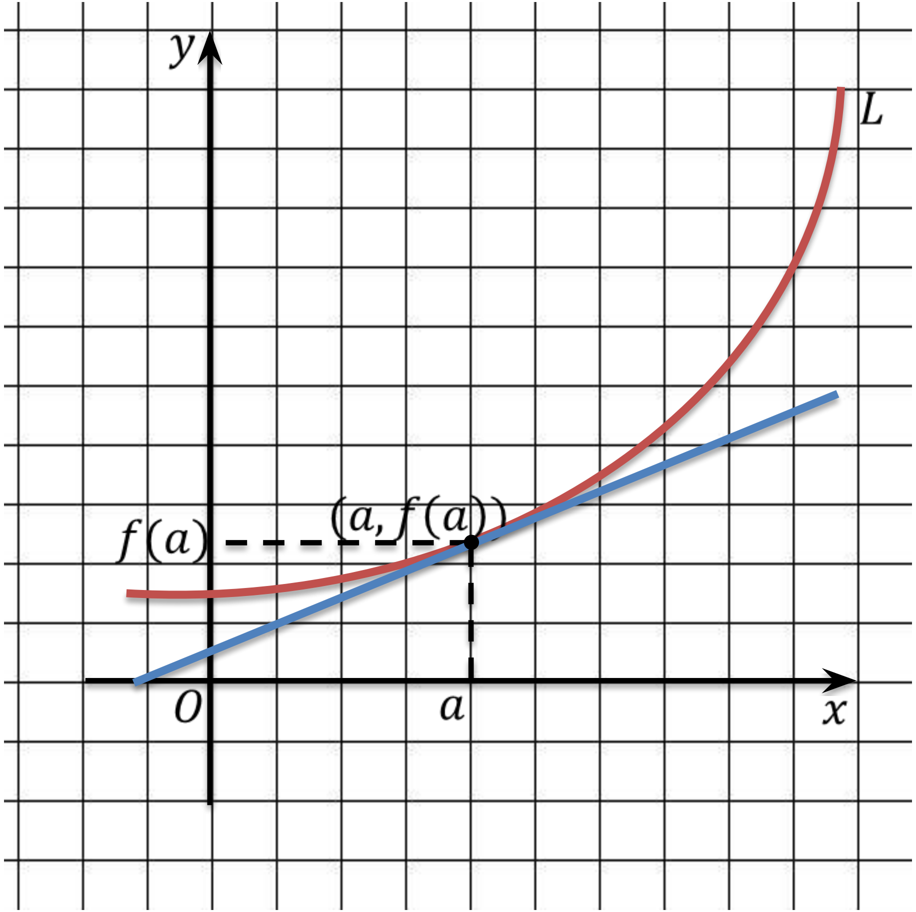
Упражнение:

- Найдите производные функций:

$y = (4x - 6)^{15}$ $\quad$ $y' = 60(4x - 6)^{14}$

$y = sin\, x - 5x + 7$ $\quad$ $y' = cos\, x - 5$

$y = \sqrt{5x + 7}$ $\quad$ $y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x + 7}}$



$y = f(x)$

Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$.

Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция дифференцируема и $f'(a)$ существует

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси OY, то $f'(a)$ выражает *угловой коэффициент касательной*: $k = f'(a)$

$y = kx + m$

$k = f'(a)$

$f(a) = f'(a) \cdot a + m$

$m = f(a) - f'(a) \cdot a$

$y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$

$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$

Пример:

- К графику функции $y = x^2$ провести касательную в точке $a = 1$.

Решение:

$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$

$a = 1$

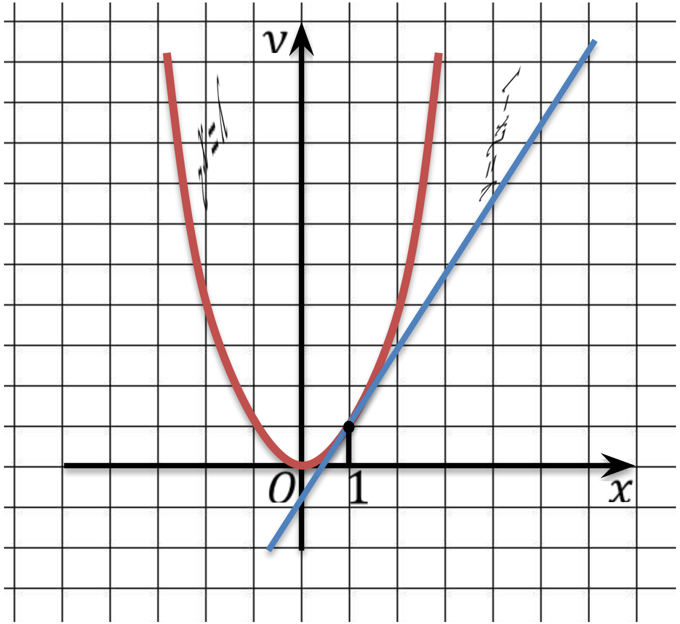
$f(a) = a^2 = 1^2 = 1$

$f'(x) = (x^2)' = 2x$

$f'(a) = 2 \cdot 1 = 2$

$y = 1 + 2(x - 1)$

$y = 1 + 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x - 1$



Пример:

- К графику функции $y = sin\,x$ провести касательную в точке $a = 0$.

Решение:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

$$a = 0$$

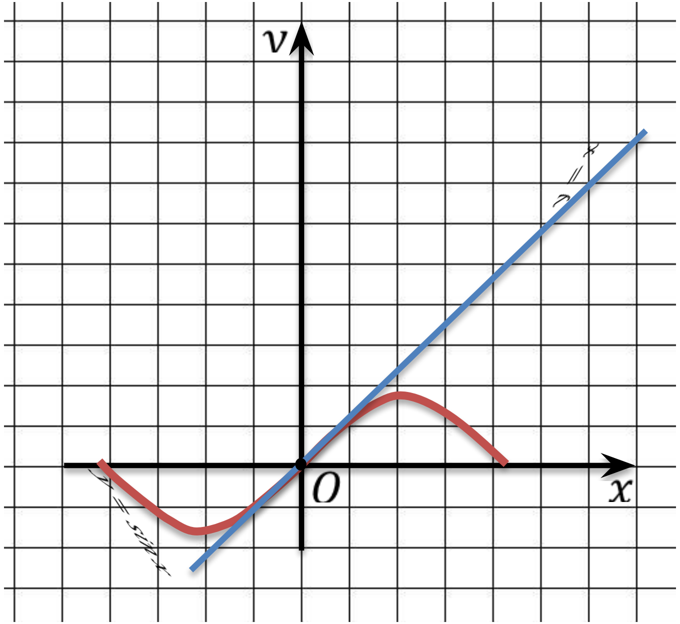
$$f(a) = sin\,a = sin\,0 = 0$$

$$f'(x) = (sin\,x)' = cos\,x$$

$$f'(a) = cos\,0 = 1$$

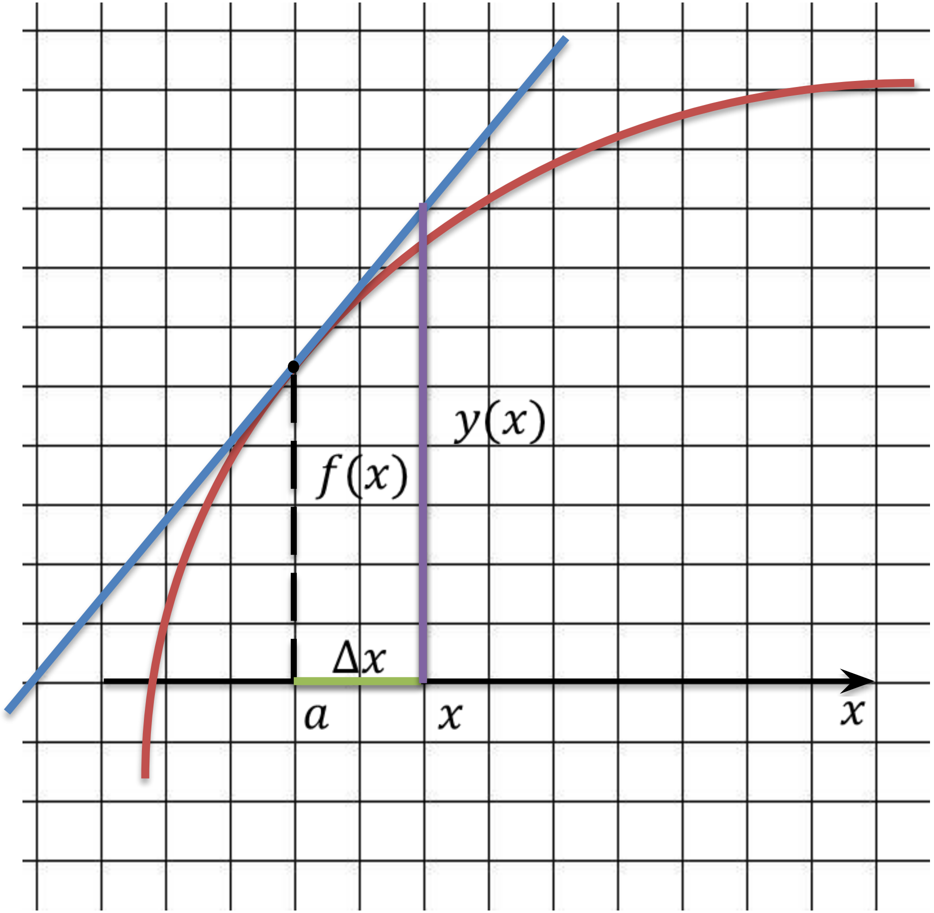
$$y = 0 + 1(x - 0)$$

$$y = x$$



Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$:

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа $a, f(a), f'(a)$ в общее уравнение касательной $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$.



$$y = f(x)$$

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

$$f(x) \approx y(x)$$

$$y = f(a) + f'(a) \cdot \Delta x$$

Пример:

Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}08}$.

Решение:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot \Delta x$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$a = 4$$

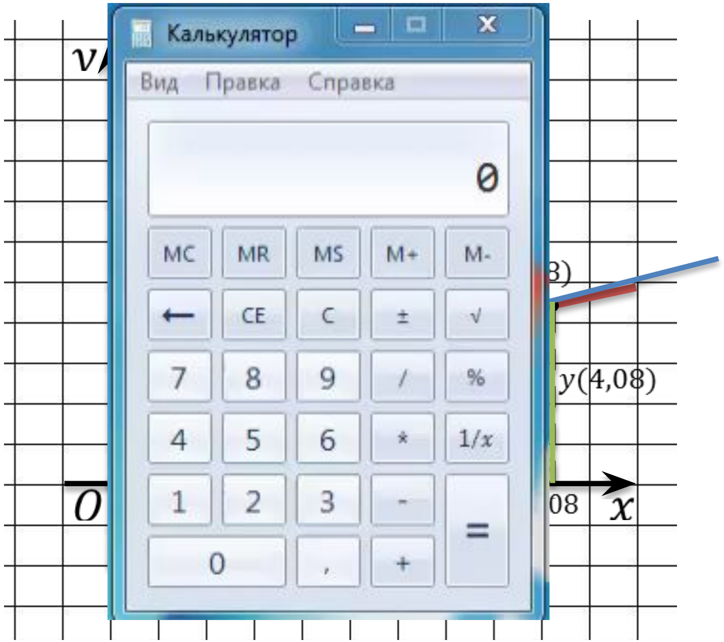
$$f(a) = 2$$

$$\Delta x = 4{,}08 - 4 = 0{,}08$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = 0{,}25$$

$$y = \sqrt{4{,}08} = 2 + 0{,}25 \cdot 0{,}08 = 2{,}02$$

Ответ: $\sqrt{4{,}08} \approx 2{,}02$



Пример:

- Вычислить приближенное значение выражения $\frac{1}{0{,}997^{30}}$.

Решение:

$$\frac{1}{0{,}997^{30}} = 0{,}997^{-30}$$

$$y = f(a) + f'(a) \cdot \Delta x$$

$$y = x^{-30}$$

$$a = 1 \Rightarrow f(1) = 1^{-30} = 1, \Delta x = 0{,}997 - 1 = -0{,}003$$

$$f'(x) = -30x^{-31} \Rightarrow f'(1) = -30 \cdot 1^{-31} = -30$$

$$y = 1 - 30 \cdot (-0{,}003) = 1{,}09$$

Ответ: $\frac{1}{0{,}997^{30}} \approx 1{,}09$

Сложная кривая в окрестности точки x_0 заменяется прямой (касательной к графику функции) и если Δx не велики, то для каждой функции можно вывести соответствующую формулу, по которой осуществляются приближенные вычисления.