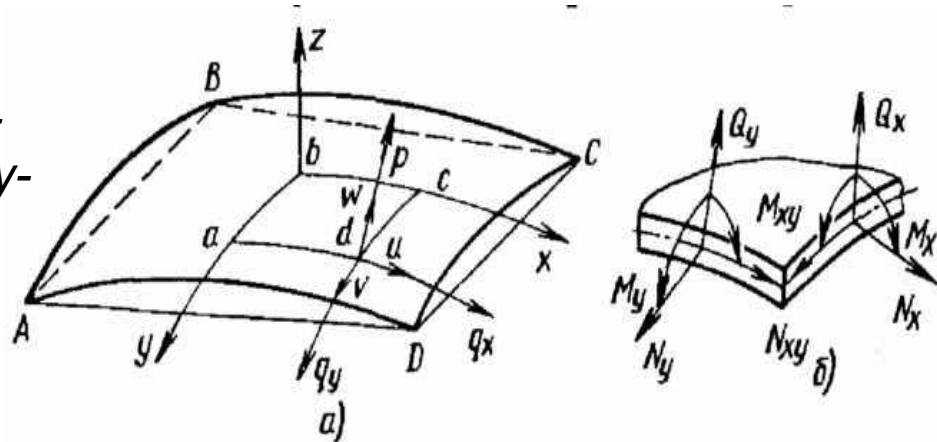


Пологие оболочки
Полубезмоментная теория
цилиндрических оболочек

ТЕОРИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Основные гипотезы и исходные соотношения

Пологой будем называть оболочку, на поверхности которой можно ввести некоторую систему криволинейных координат, такую, что расстояние между двумя точками и угол между двумя направлениями на поверхности можно приближенно отождествить с расстояниями между точками и углами между линиями, лежащими на некоторой плоскости.



Типичная форма пологой оболочки или искривленной панели показана на рис. а. Криволинейный элемент $abcd$ поверхности такой оболочки в координатах x, y можно приближенно отождествить с его проекцией на плоскость $ABCD$, а криволинейные координаты x, y — с декартовыми координатами.

Основное упрощение, вытекающее из этого предположения заключается в том, что метрическое соотношение $ds^2 = A^2 \cdot d\alpha^2 + B^2 \cdot d\beta^2$ общей теории в координатах x, y можно приближенно заменить следующим: $ds^2 = dx^2 + dy^2$, т. е. принять $A=B=1$.

Помимо этого, в теории пологих оболочек принимается, что при проектировании действующих на элемент сил на оси x и y можно в силу малой кривизны оболочки не учитывать составляющие от перерезывающих сил Q_x и Q_y (см. рис. б), а в геометрических соотношениях, определяющих изменения кривизн, учитывать только нормальное перемещение w .

В результате уравнения общей теории оболочек упрощаются следующим образом

Уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, & \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y = 0, & \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_x}{R_1} - \frac{N_y}{R_2} + p = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, & \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \end{aligned}$$

Соотношения упругости сохраняются без изменения:

$$\begin{aligned} N_x = \bar{E} \cdot h \cdot (\varepsilon_x^0 + \mu \cdot \varepsilon_y^0), \quad N_y = \bar{E} \cdot h \cdot (\varepsilon_y^0 + \mu \cdot \varepsilon_x^0), \quad N_{xy} = \bar{E} \cdot \frac{h}{2} \cdot (1 - \mu) \cdot \gamma_{xy}, \\ M_x = D \cdot (\kappa_x + \mu \cdot \kappa_y), \quad M_y = D \cdot (\kappa_y + \mu \cdot \kappa_x), \quad M_{xy} = \frac{D}{2} \cdot (1 - \mu) \cdot \kappa_{xy}, \end{aligned}$$

Геометрические соотношения записываются в форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \kappa_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x}, \end{aligned} \quad \text{где} \quad \vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

Полученные уравнения отличаются от соответствующих уравнений теории пластин наличием членов N_x/R_1 , N_y/R_2 во втором уравнении равновесия и членов w/R_1 , w/R_2 в геометрических соотношениях для линейных деформаций.

Соответственно упрощаются и выражения для перерезывающих сил. Из двух последних уравнений равновесия имеем

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Обобщенные перерезывающие силы, используемые для записи граничных условий имеют вид

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

С учетом приведенных зависимостей граничные условия записываются в той же форме как и в общей теории оболочек.

Полученные уравнения в силу своей простоты по сравнению с уравнениями общей теории широко применяются для решения самых разнообразных задач по расчету оболочек. Остановимся на некоторых приложениях.

РАСЧЕТ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

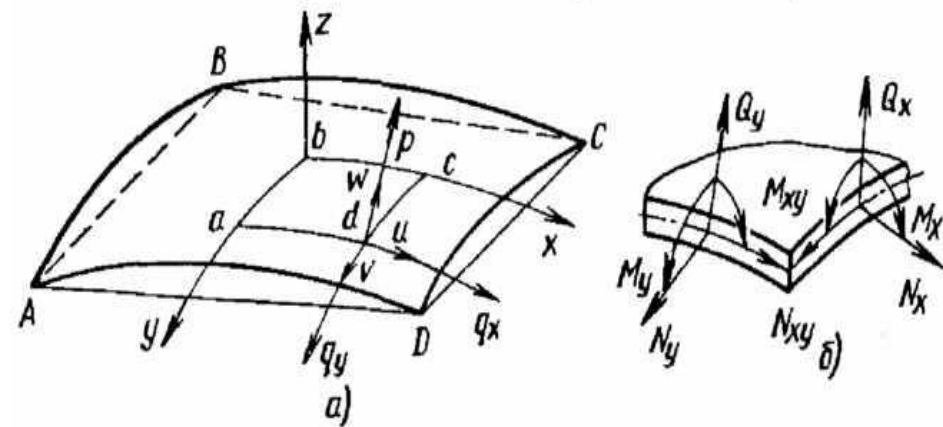
Совокупность сделанных выше упрощений не приводит к существенным погрешностям при расчете пологих оболочек двойной кривизны, если выполняется неравенство:

$$\frac{A \cdot B}{R_1 \cdot R_2} \ll 1$$

Ввиду того, что построенная система уравнений является приближенной, при расчете пологих оболочек, как правило, не учитывается переменность радиусов кривизны R_1 , R_2 . В частности, для оболочки, показанной на рисунке, R_1 и R_2 можно считать постоянными и равными их значениям в вершине оболочки.

Полученная в предыдущем вопросе система уравнений пологих оболочек может быть преобразована к трем уравнениям относительно перемещений u , v , w .

Исключая из первых трех уравнений равновесия Q_x и Q_y с помощью полученных зависимостей и выражая в них далее усилия и моменты через перемещения согласно соотношениям упругости и геометрическим соотношениям, получим



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1-\mu^2}{E \cdot h} \cdot q_x,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1-\mu^2}{E \cdot h} \cdot q_y,$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2 \cdot \mu}{R_1 \cdot R_2} \right) \cdot w + \frac{h^2}{12} \cdot \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1-\mu^2}{E \cdot h} \cdot p.$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Если на оболочку не действуют касательные поверхностные нагрузки, т. е. $q_x = q_y = 0$, система уравнений пологих оболочек может быть приведена к двум уравнениям. Введем функцию напряжений φ так, как это было сделано в теории пластин

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y}$$

Тогда первые два уравнения равновесия (при $q_x = q_y = 0$) удовлетворяются тождественно, а третье уравнение равновесия после исключения Q_x , Q_y и замены M_x , M_y , M_{xy} через w , а N_x , N_y — через φ примет вид

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = p$$

Используя выражения для деформаций $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ и путем их дифференцирования исключая функции u и v , получим уравнение совместности деформаций, аналогичное в теории пластин

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

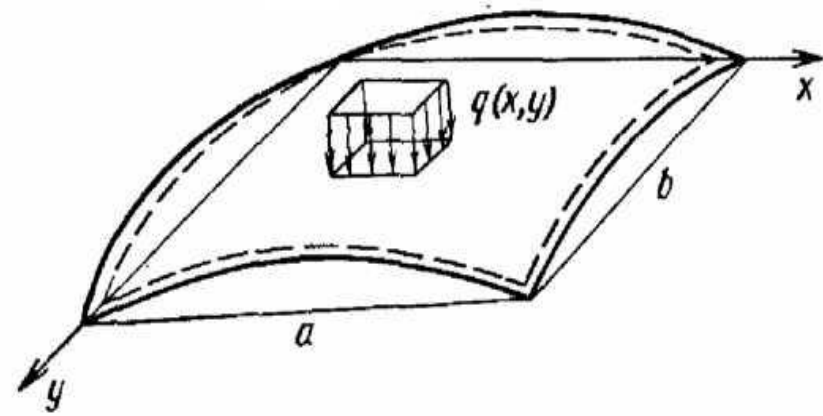
Заменяя $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ через N_x, N_y, N_{xy} с помощью соотношений упругости и вводя функцию напряжений φ , получим

$$\frac{1}{E \cdot h} \cdot \nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Таким образом, теория пологих оболочек сводится к двум уравнениям относительно прогиба w и функции напряжений φ . Эти уравнения можно привести к одному уравнению относительно w . Действуя бигармоническим оператором на уравнение первое уравнение и исключая $\nabla^2 \nabla^2 \varphi$ с помощью второго уравнения, можно записать одно уравнение восьмого порядка

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + E \cdot h \cdot \left(\frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 p$$

Для шарнирно опертой по краям прямоугольной в плане полой оболочки (см. рис) решение может быть построено путем разложения искомых функций в двойные тригонометрические ряды как в теме про расчет шарнирно опертых прямоугольных пластин.



Граничные условия в рассматриваемом случае записываются в следующем виде:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=a: w=v=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y=0 \text{ и } y=b: w=u=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

Для того чтобы удовлетворить эти граничные условия, искомые функции w и φ достаточно представить рядами вида

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \sin \frac{\pi \cdot m \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot y}{b}, \quad \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \cdot \sin \frac{\pi \cdot m \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot y}{b}$$

где w_{mn} , φ_{mn} — постоянные коэффициенты разложений, которые необходимо определить.

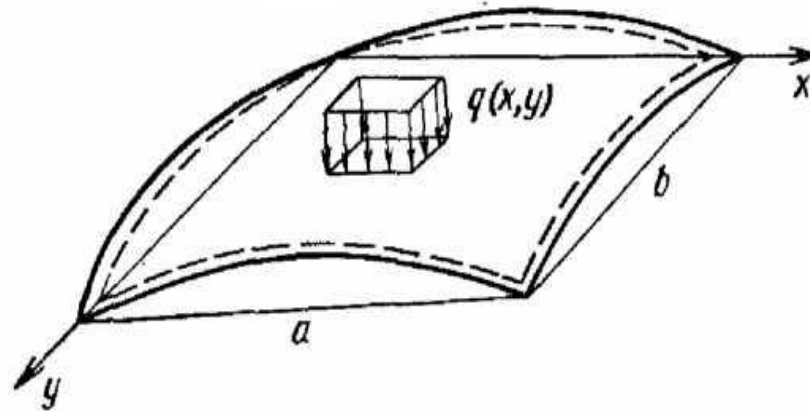
Представляя внешнюю нагрузку $p(x, y)$ таким же рядом

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot \sin \frac{\pi \cdot m \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot y}{b}$$

где p_{mn} — известные коэффициенты, и подставляя ряды для w и φ в два уравнения четвертого порядка, получим алгебраическую систему уравнений для определения w_{mn} и φ_{mn} :

$$D \cdot \left[\left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 \right]^2 \cdot w_{mn} - \left[\frac{1}{R_1} \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 + \frac{1}{R_2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 \right] \cdot \varphi_{mn} = p_{mn},$$

$$\frac{1}{E \cdot h} \cdot \left[\left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 \right]^2 \cdot \varphi_{mn} + \left[\frac{1}{R_1} \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 + \frac{1}{R_2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 \right] \cdot w_{mn} = 0.$$



Определяя из системы w_{mn} для оболочки, показанной на рисунке, окончательно получим

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \cdot \left[\left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 \right]^2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot m \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot y}{b}}{D \cdot \left[\left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 \right]^4 + E \cdot h \cdot \left[\frac{1}{R_1} \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 + \frac{1}{R_2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 \right]^2}$$

Решение может быть получено и в результате подстановки разложений для w и p в уравнение восьмого порядка. Полученный ряд для прогиба оболочки w сходится значительно медленнее соответствующего разложения для пластины, так как первое слагаемое знаменателя, обеспечивающее его сходимост, содержит малый коэффициент D , пропорциональный h^3 .

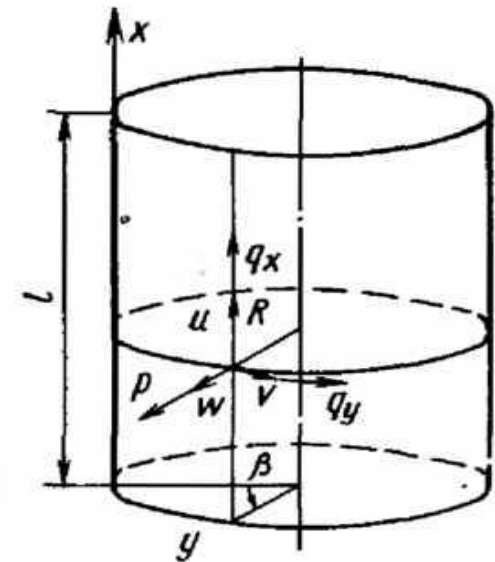
В случае, когда граничные условия не соответствуют условиям шарнирного опирания, решение может быть получено методами, рассмотренными в теории пластин. Значение полученных уравнений не исчерпывается только возможностью расчета пологих оболочек. Теория пологих оболочек в силу простоты ее уравнений и достаточной точности в большинстве практических случаев находит также широкое применение при решении задач локальной деформации оболочек при действии сосредоточенных нагрузок и задач устойчивости оболочек, когда на ее поверхности образуются местные складки. Основанием для этого является то, что на относительно малом участке поверхности оболочка практически всегда может считаться полой и соответствующее локальное напряженное состояние может быть описано полученными выше уравнениями.

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для цилиндрической оболочки $R_1 \rightarrow \infty$ и левая часть неравенства

$$\frac{A \cdot B}{R_1 \cdot R_2} \ll 1$$

обращается в нуль. Как известно, цилиндрическая поверхность может быть развернута на плоскость и в координатах x и $y=R \cdot \beta$, отсчитываемых вдоль образующей и параллели, метрическое соотношение принимает вид $ds^2=dx^2+dy^2$ т. е. основное допущение теории пологих оболочек ($A=B=1$) для цилиндрических оболочек выполняется точно. Что касается двух других допущений, связанных с отсутствием перерезывающих сил в



уравнениях равновесия и тангенциальных перемещений в геометрических соотношениях, то их введение определяет упрощенную, так называемую техническую теорию цилиндрических оболочек, использующуюся для решения широкого круга задач.

В рамках технической теории цилиндрические оболочки описываются уравнениями теории пологих оболочек, в которых следует принять $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2=R$ (см. рис.). Если по краям оболочка шарнирно оперта, решение так же, как и в предыдущем вопросе, может быть построено в двойных тригонометрических рядах.

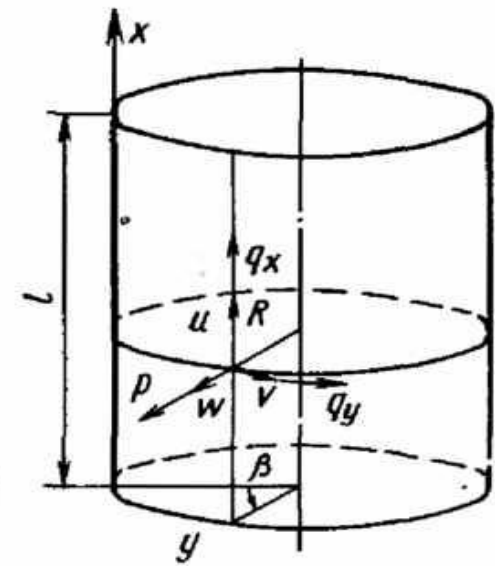
В качестве примера рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиуса R , шарнирно опертую на краях $x=0$ и $x=l$.

Граничные условия на этих краях имеют вид:

$$N_x = 0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \right), \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \right).$$

Пусть на оболочку действует нормальное давление $p(x, \beta)$, распределенное симметрично относительно радиальной плоскости $\beta=0$, а тангенциальные нагрузки отсутствуют ($q_x = q_y = 0$)

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot \sin \frac{\pi \cdot m \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n \cdot y}{R}$$



Подставляя разложения u, v, w и p в полученные уравнения теории пологих оболочек

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1-\mu^2}{E \cdot h} \cdot q_x,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1-\mu^2}{E \cdot h} \cdot q_y,$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2 \cdot \mu}{R_1 \cdot R_2} \right) \cdot w + \frac{h^2}{12} \cdot \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1-\mu^2}{E \cdot h} \cdot p.$$

и приравнявая по отдельности члены левых и правых частей уравнений, содержащие одинаковые тригонометрические функции, для каждой тройки неизвестных коэффициентов u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} получим по три линейных алгебраических уравнения:

$$-\left[\left(\frac{m \cdot \pi}{l}\right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \cdot \left(\frac{n}{R}\right)^2\right] \cdot u_{mn} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{m \cdot \pi}{l} \cdot \frac{n}{R} \cdot v_{mn} + \frac{\mu}{R} \cdot \frac{m \cdot \pi}{l} \cdot w_{mn} = 0,$$

$$\frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{m \cdot \pi}{l} \cdot \frac{n}{R} \cdot u_{mn} - \left[\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{l}\right)^2\right] \cdot v_{mn} + \frac{1}{R} \cdot \frac{n}{R} \cdot w_{mn} = 0,$$

$$\frac{\mu}{R} \cdot \frac{m \cdot \pi}{l} \cdot u_{mn} + \frac{1}{R} \cdot \frac{n}{R} \cdot v_{mn} + \frac{1}{R^2} \cdot w_{mn} + \frac{h^2}{12} \cdot \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2 \cdot w_{mn} = \frac{1-\mu^2}{E \cdot h} \cdot p_{mn}.$$

Решая эти уравнения, можно найти u_{mn} , v_{mn} , w_{mn} в зависимости от коэффициентов разложения нагрузки p_{mn} .

Аналогичным образом решаются и уравнения

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = p$$

$$\frac{1}{E \cdot h} \cdot \nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

В результате получается система из которой находятся w_{mn} и φ_{mn}

ПОЛУБЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Цилиндрическая оболочка является распространенным элементом конструкций самого разнообразного назначения и методы расчета цилиндрических оболочек разработаны наиболее полно. Уравнения теории цилиндрических оболочек могут быть получены из уравнений общей теории оболочек, если принять $A=B=1$, $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2=R$. Путем введения некоторых упрощающих предположений в предыдущем вопросе были получены уравнения технической теории цилиндрических оболочек. Преобразуем уравнение

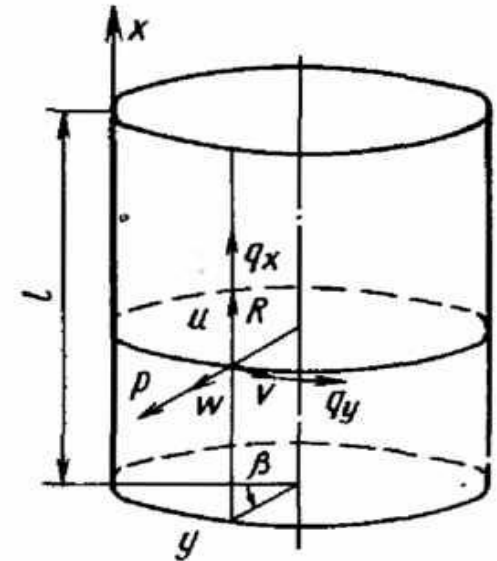
$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + E \cdot h \cdot \left(\frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 p$$

для цилиндрической оболочки, на которую не действуют поверхностные нагрузки, т. е. $q_x = q_y = p = 0$ (см. рис.). При $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 = R$ уравнение принимает вид

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{E \cdot h}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

В случае шарнирного опирания по краям решение этого уравнения может быть получено в виде двойного тригонометрического ряда типа

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \cdot \left[\left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 \right]^2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot m \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot y}{b}}{D \cdot \left[\left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 \right]^4 + E \cdot h \cdot \left[\frac{1}{R_1} \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{b} \right)^2 + \frac{1}{R_2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot m}{a} \right)^2 \right]^2}$$



Для других граничных условий решение данного уравнения в силу его периодичности по окружной координате y может быть представлено, в виде

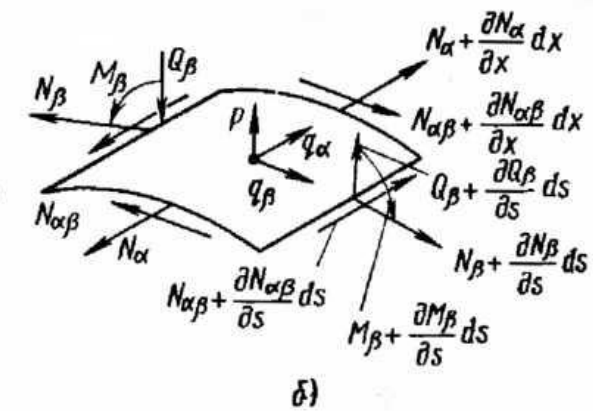
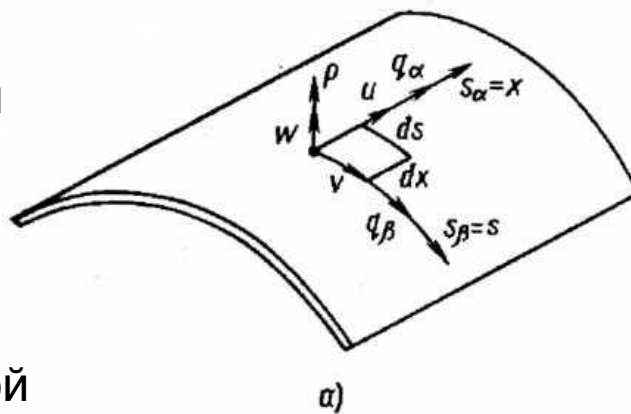
$$w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \cdot \cos \frac{n \cdot y}{R}$$

Подставляя данный ряд в решаемое уравнение и приравнявая нулю коэффициенты при $\cos(ny/R)$, получим для $w_n(x)$ обыкновенное дифференциальное Уравнение восьмого порядка

$$w_n^{VIII} - 4 \cdot \frac{n^2}{R^2} \cdot w_n^{VI} + \left(6 \cdot \frac{n^4}{R^4} + \frac{E \cdot h}{R^2 \cdot D} \right) \cdot w_n^{IV} - \frac{n^6}{R^6} \cdot w_n'' + \frac{n^8}{R^8} \cdot w_n = 0.$$

Решение данного уравнения $w_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_{ni} \cdot F_{ni}(x)$ содержащее восемь произвольных постоянных C_{in} для каждого n , позволяет удовлетворить любые граничные условия на краях $x=0$ и $x=l$. Однако практическое определение частных решений $F_{ni}(x)$ уравнения восьмого порядка связано с большими трудностями, что и вызывает потребность в дальнейшем упрощении теории для снижения порядка уравнения. Именно такой упрощенной теорией и является рассматриваемая в данном вопросе полубезмоментная теория цилиндрических оболочек, широко используемая при решении конкретных задач, в частности, для расчета цилиндрических оболочек средней длины, нагруженных таким образом, что их деформированное состояние меняется медленно в продольном направлении. В этой теории наряду с гипотезами Кирхгофа используются дополнительные упрощающие статические и кинематические допущения.

Если через $s_\alpha = x$ и $s_\beta = s$ обозначить координаты точки срединной поверхности оболочки, отсчитываемые в продольном и поперечном направлениях (рис., а), то допущения полубезмоментной теории можно записать в виде



$$\varepsilon_\beta^0 = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R_2} = 0, \quad \gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad M_\alpha \approx 0, \quad Q_\alpha \approx 0, \quad M_{\alpha\beta} \approx 0$$

То есть в продольном направлении оболочка ведет себя как безмоментная, а в кольцевом — как система нерастяжимых рам. Полубезмоментная теория особенно эффективна для расчета оболочек, подкрепленных системой часто расположенных шпангоутов, которые «размазываются» по длине оболочки, создавая высокую изгибную жесткость в кольцевом направлении.

Три компоненты перемещения u, v и w связаны между собой двумя кинематическими условиями, и поэтому при любой форме направляющей они могут быть представлены, через одну разрешающую функцию $\Phi(x, s)$:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad w = R_2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}$$

Справедливость данного представления может быть проверена непосредственной подстановкой в допущения, представленные выше.

Усилие N_α и изгибающий момент M_β определяются по закону Гука:

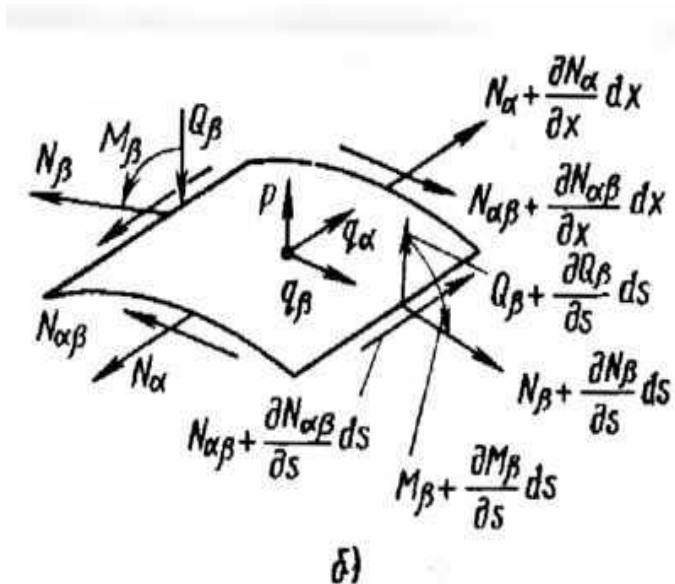
$$N_\alpha = E_\alpha \cdot h \cdot \varepsilon_\alpha^0 = E_\alpha \cdot h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = E_\alpha \cdot h \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

$$M_\beta \approx D_\beta \cdot \kappa_\beta = D_\beta \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{\partial w}{\partial s} \right) = -D_\beta \cdot \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + R_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} \right)$$

Здесь в силу сделанного выше замечания о возможности применения полубезмоментной теории для расчета оболочек, подкрепленных шпангоутами, введены различные обозначения для жесткостей $E_\alpha \cdot h$ и D_β . При этом в полубезмоментной теории влиянием коэффициента Пуассона пренебрегают, полагая $\mu=0$. Сдвигающее усилие (поток касательных напряжений) в срединной поверхности оболочки определяется из уравнения равновесия в продольном направлении:

$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial s} = -\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} - q_\alpha = -E_\alpha \cdot h \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} - q_\alpha$$

Уравнение для неизвестной функции Φ можно получить с помощью вариационного принципа Лагранжа.



Потенциальная энергия деформации полубезмоментной оболочки с учетом введенных допущений будет иметь вид

$$U = \frac{1}{2} \iint [N_\alpha \cdot \varepsilon_\alpha^0 + M_\beta \cdot \kappa_\beta] \cdot dx \cdot ds = \frac{1}{2} \iint \left[E_\alpha \cdot h \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + D_\beta \cdot \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + R_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} \right)^2 \right] \cdot dx \cdot ds$$

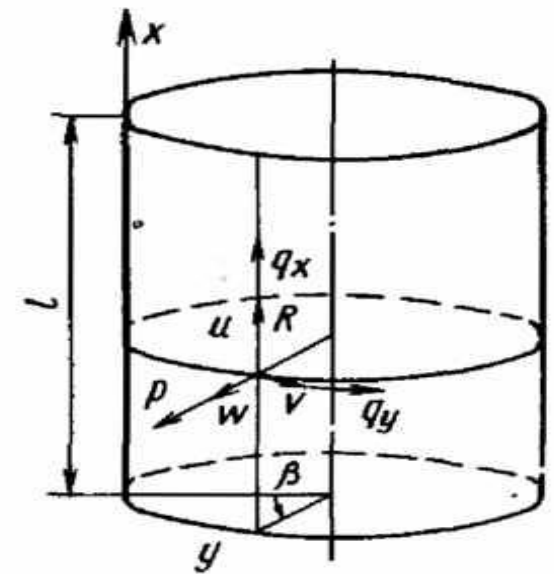
Вариация работы поверхностных нагрузок определяется равенством

$$\delta A = \iint [q_\alpha \cdot \delta u + q_\beta \cdot \delta v + p \cdot \delta w] \cdot dx \cdot ds = \iint \left[q_\alpha \cdot \frac{\partial(\delta \Phi)}{\partial x} + q_\beta \cdot \frac{\partial(\delta \Phi)}{\partial s} + p \cdot R_2 \cdot \frac{\partial^2(\delta \Phi)}{\partial s^2} \right] \cdot dx \cdot ds$$

Подставляя полученные выражения в уравнение $\delta U - \delta A = 0$ и преобразуя его интегрированием по частям таким образом, чтобы под поверхностным интегралом в качестве общего множителя была вариация $\delta \Phi$, получим дифференциальное уравнение для функции Φ и естественные граничные условия.

Круговая цилиндрическая оболочка

Рассмотрим прямую замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, для которой $R_2 = R = \text{const}$ и $x = R \cdot \alpha$, $s = R \cdot \beta$ (см. рис.). После интегрирования по частям интегралов уравнения $\delta U - \delta A = 0$ по α и β с учетом периодичности Φ и ее производных в окружном направлении получим



$$\delta U - \delta A = \int_0^l \oint_{2\pi} \left[\frac{E_\alpha \cdot h}{R^4} \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{D_\beta}{R_6} \cdot \left(\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^8} + 2 \cdot \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial q_\beta}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} \right) \right] \cdot (\delta \Phi) \cdot R^2 \cdot d\alpha \cdot d\beta +$$

$$+ \oint_{2\pi} \left\{ \left[\frac{E_\alpha \cdot h}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial(\delta \Phi)}{\partial \alpha} - \left(\frac{E_\alpha \cdot h}{R^2} \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} + q_\alpha \right) \cdot \delta \Phi \right]_{\alpha=0}^{\alpha=\bar{l}} \right\} \cdot d\beta = 0,$$

где $\bar{l} = l/R$, l — длина оболочки.

Отсюда следует дифференциальное уравнение для функции Φ , которое запишем в виде

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{D_\beta}{R^2 \cdot E_\alpha \cdot h} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 \Phi = \frac{R^3 \cdot q}{E_\alpha \cdot h}, \quad \text{где} \quad q = \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} + \frac{\partial q_\beta}{\partial \beta} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial \alpha}$$

На торцах полубезмоментной оболочки граничные условия формулируются так же, как и для безмоментной оболочки — на каждом торце должны быть заданы или тангенциальные перемещения, или соответствующие им тангенциальные усилия, т. е. u или N_{α} , v или $N_{\alpha\beta}$. Аналогичный результат следует и из вариационного уравнения. Контурный интеграл представляет вариацию работы реакций на торцах; он может быть записан в виде

$$\oint \left\{ N_{\alpha} \cdot \delta u + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{R \cdot \partial \beta} \cdot \delta \Phi \right\} \cdot R \cdot d\beta = \oint \left\{ \left[N_{\alpha} \cdot \delta u + N_{\alpha\beta} \cdot \delta v \right]_{\alpha=0}^{\alpha=l} \right\} \cdot R \cdot d\beta$$

Чтобы этот интеграл обращался в нуль, на каждом торце должны быть заданы перемещения (тогда $\delta u=0$, $\delta v=0$) или должны быть равны нулю соответствующие им усилия $N_{\alpha}=0$, $N_{\alpha\beta}=0$. Поверхностные нагрузки, действующие на круговую цилиндрическую оболочку, могут быть представлены в форме тригонометрического ряда по окружной координате β . Например, при нагрузках, симметричных относительно образующей $\beta=0$, правая часть дифференциального уравнения для Φ может быть записана в виде ряда

$$\frac{R^3}{E_{\alpha} \cdot h} \cdot q(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha) \cdot \cos n\beta$$

Разрешающая функция $\Phi(\alpha, \beta)$ в этом случае находится в виде ряда

$$\Phi = \sum_n \Phi_n(\alpha) \cdot \cos n\beta$$

где $\Phi_n(\alpha)$ — неизвестные функции.

В силу ортогональности тригонометрических функций решение распадается на отдельные составляющие. При этом в случае $n=0$, представляющем осесимметричное напряженно-деформированное состояние, полубезмоментная теория неприменима (так как $\varepsilon_\beta=0$) и это состояние рассчитывается отдельно по безмоментной теории с учетом краевых эффектов. Для первой гармоники ($n=1$), представляющей изгиб оболочки как балки, полубезмоментная теория не учитывает сдвиг ($\gamma_{\alpha\beta}=0$), и поэтому более точное решение можно получить на основе общей безмоментной теории (здесь также можно учесть краевые эффекты изгиба).

Для каждой последующей гармоники ($n=2,3,\dots$) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 \Phi_n}{d\alpha^4} + 4 \cdot k_n^4 \cdot \Phi_n = f_n(\alpha) \quad \text{где} \quad 4 \cdot k_n^4 = \frac{D_\beta}{R^2 \cdot E_\alpha \cdot h} \cdot n^4 \cdot (n^2 - 1)^2$$

Полученное уравнение в отличие от уравнения пологой оболочки имеет уже четвертый порядок и по виду совпадает с уравнением осесимметричного краевого эффекта. Его решение можно записать в аналогичной форме

$$\Phi_n = e^{-k_n \alpha} \cdot (C_1 \cdot \cos k_n \alpha + C_2 \cdot \sin k_n \alpha) + e^{k_n \alpha} \cdot (C_3 \cdot \cos k_n \alpha + C_4 \cdot \sin k_n \alpha) + \Phi_n^0(\alpha)$$

где $\Phi_n^0(\alpha)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Параметр k в случае гладкой оболочки ($E_\alpha = E$, $D_\beta = Eh^3/12$) пропорционален величине $\sqrt{h/R}$ и при небольших значениях n является достаточно малым. Вследствие этого деформированное состояние тонкой оболочки при малых n меняется вдоль образующей медленно. В этом случае удобнее решение записать через функции А. Н. Крылова:

$$\Phi_n = A_1 \cdot K_1(k_n \cdot \alpha) + A_2 \cdot K_2(k_n \cdot \alpha) + A_3 \cdot K_3(k_n \cdot \alpha) + A_4 \cdot K_4(k_n \cdot \alpha) + \Phi_n^0(\alpha)$$

Функции А. Н. Крылова имеют вид :

$$K_1(x) = \operatorname{ch} x \cdot \cos x, \quad K_2(x) = \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{ch} x \cdot \sin x + \operatorname{sh} x \cdot \cos x), \quad K_3(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin x, \quad K_4(x) = \frac{1}{4} \cdot (\operatorname{ch} x \cdot \sin x - \operatorname{sh} x \cdot \cos x),$$

Они делятся на симметричные (K_1 и K_3) и антисимметричные (K_2 и K_4) относительно $x=0$ и их производные выражаются через эти же функции в виде:

$$K_1'(x) = -4 \cdot K_4(x), \quad K_2'(x) = K_1(x), \quad K_3'(x) = K_2(x), \quad K_4'(x) = K_3(x)$$

Произвольные постоянные C_i или A_i определяются из четырех граничных условий на торцах оболочки. В случае необходимости решение, полученное по полубезмоментной теории, при не слишком больших n может быть дополнено решением в виде осесимметричного краевого эффекта.

Полубезмоментная теория применима для расчета деформаций, медленно изменяющихся вдоль образующей; для гладкой оболочки это ограничение определяется неравенством $1 < n < \sqrt{R/h}$.