Теория матричных игр

Основные понятия теории матричных игр

Теория игр – математическая теория конфликтных ситуаций, целью которой является выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.

Конфликтная ситуация – это столкновение интересов двух или более сторон.

Игра – это математическая модель конфликтных ситуаций, а также система предварительно оговоренных правил и условий.

Партией называется частичная реализация правил и условий игры. Результатом игры всегда является число v, которое называется выигрышем, проигрышем или ничьей.

- если v **> 0** – выигрыш
- если v **< 0** – проигрыш
- если v **= 0** – ничья

Партии состоят из ходов. ***Ходом*** называется выбор игроком одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление.

Ходы бывают:

личными – когда игрок сознательно выбирает и осуществляет тот или другой вариант действия (пример — любой ход в шахматах);

случайными – когда выбор осуществляется не волей игрока, а каким-то механизмом случайного выбора (бросание монеты, игральной кости).

Игры бывают:

парные – игра между двумя игроками;

множественные – в них участники могут образовывать коалиции (постоянные или временные);

кооперативные – играют более двух человек, которые образуют кооперации до конца игры;

коалиционные – объединение, но не до конца игры;

не коалиционные – с начала и до конца каждый играет сам за себя.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. В зависимости от стратегий игры делятся на ***конечные*** и ***бесконечные***.

Игра называется ***конечной***, если у каждого игрока имеется в распоряжении только конечное число стратегий (в противном случае игра называется ***бесконечной***).

Игра с нулевой суммой – это игра, в которой сумма выигрышей игроков равна нулю (т.е. каждый игрок выигрывает только за счет других). Самый простой случай – парная игра с нулевой суммой – ***антагонистическая игра,*** здесь два игрока четко играют друг против друга.

Игры бывают с ***полной информацией***, в этом случае игроки четко знают все правила игры и четко знают все шаги противника, и с ***неполной информацией***.

Результат игры записывается в ***платежную матрицу***.

Игра «орел - решка»

	B_1 “орел”	B_2 ” решка”
A_1 ” орел”	**1**	**-1**
A_2 ” решка”	**-1**	**1**

Нижней чистой ценой игры называется $$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Верхней чистой ценой игры называется $$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Игра, для которой $\alpha = \beta$, называется ***игрой с седловой точкой***,

где $\alpha = \beta = v$ называется ***ценой игры***.

Элемент, стоящий на пересечении α и β, называется ***седловым элементом*** матрицы.

Задача теории игр – поиск оптимальных стратегий (решений).

Решением игры называется пара оптимальных стратегий для игроков *A* и *B*, значение цены игры.

Наличие седловой точки означает наличие равновесия в игре.

Чистые и смешанные стратегии

Чистой стратегией называют ход, выбранный с вероятностью 1.

Смешанной стратегией игрока *А* называется вектор

$$\vec{p} = (p_1, \ldots\ldots p_m) \quad p_i \geq 0 \, (i = \overline{1, m}), \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Смешанной стратегией игрока *В* называется вектор

$$\vec{q} = (q_1, \ldots\ldots q_n) \quad q_j \geq q \, (j = \overline{1, n}), \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

$$f(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$ – *платежная функция*.

$$\overrightarrow{P_i}\,(0,0,0,\ldots,1,0\ldots)$$ – *чистая стратегия*

Пара стратегий $\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}$ называется ***оптимальной***, если

$$f(\vec{p}, \overrightarrow{q^*}) \leq f(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}) \leq f(\overrightarrow{p^*}, \vec{q}).$$

Теорема1 $\alpha \le \beta$

Средний выигрыш или проигрыш лежит между α и β.

Теорема 2 (основная теорема теории игр). В терминах смешанных стратегий любая конечная игра имеет решение.

Теорема 3 Для того, чтобы смешанные стратегии $\overrightarrow{p^*} = (p_1, \ldots\ldots p_m)$ $\overrightarrow{q^*} = (q_1, \ldots\ldots q_n)$ были оптимальными в матричной игре $(a_{ij})_{m \times n}$, необходимо и достаточно :

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge \upsilon \quad (j = \overline{1,n}), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \upsilon \quad (i = \overline{1,m}). \end{cases}$$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{array} \\
\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

p_i – вероятность применения игроком i – ой стратегии

$$
\begin{cases}
a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \ge v \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \le v
\end{cases}
$$

Активной стратегией называется стратегия, входящая в оптимальную смешанную стратегию с ненулевой вероятностью.

Теорема 4 Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равен цене игры, не зависимо от того, какую стратегию принимает второй игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Пример:

$$\begin{array}{c c}
\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & -6 \\ 2 & 7 & -9 & -10 \\ 2 & -5 & 3 & -7 \\ -10 & 12 & -15 & 25 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \\
\begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} &
\end{array}$$

невыгодна (A_3)

Стратегия A_k игрока *А* называется ***доминирующей*** над стратегией A_l, если $a_{k,j} > a_{l,j} \ (j = \overline{1,n})$,

а ***стратегия*** A_l - ***доминируемой***.

B_k - доминирующая над B_l, если $b_{i,k} \le b_{i,l} \ (i = \overline{1,n})$

Доминируемые стратегии можно убирать из матрицы игры, от этого решение не изменится.

$$(a_{i,j})_{m\times n} \quad (1)$$

$$(ba_{i,j}+c)_{m\times n} \quad (2)$$

$$b, c \geq 0$$

Теорема 5 Оптимальные смешанные стратегии p^* и q^* в матричной игре (1) с ценой игры *v* будут оптимальными и в матричной игре (2) с ценой $v = bv + c$.

Пример исследования матричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение матричной игры 2×2

$$\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \\ p_2 = 1 - p_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array}$$

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = v$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1) = v$$

$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = v$$

$$p_1(a_{12} - a_{22}) + a_{22} = v$$

$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = p_1(a_{12} - a_{22}) + a_{22}$$

$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = v$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}$$ — аналитический метод решения

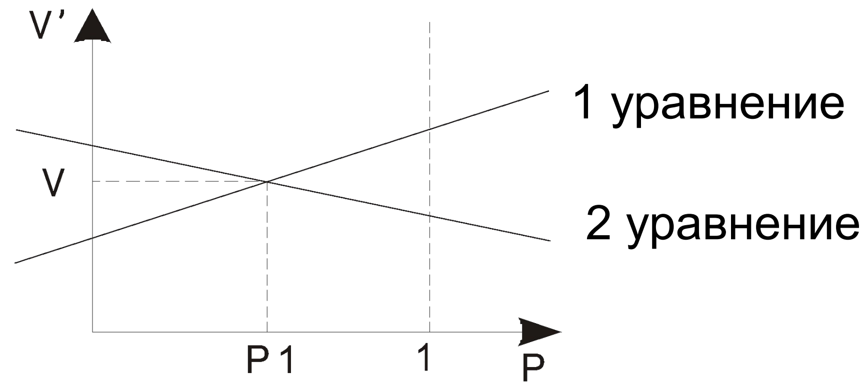
Для q_i: $a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = v$

Игры (геометрия) Статические игры

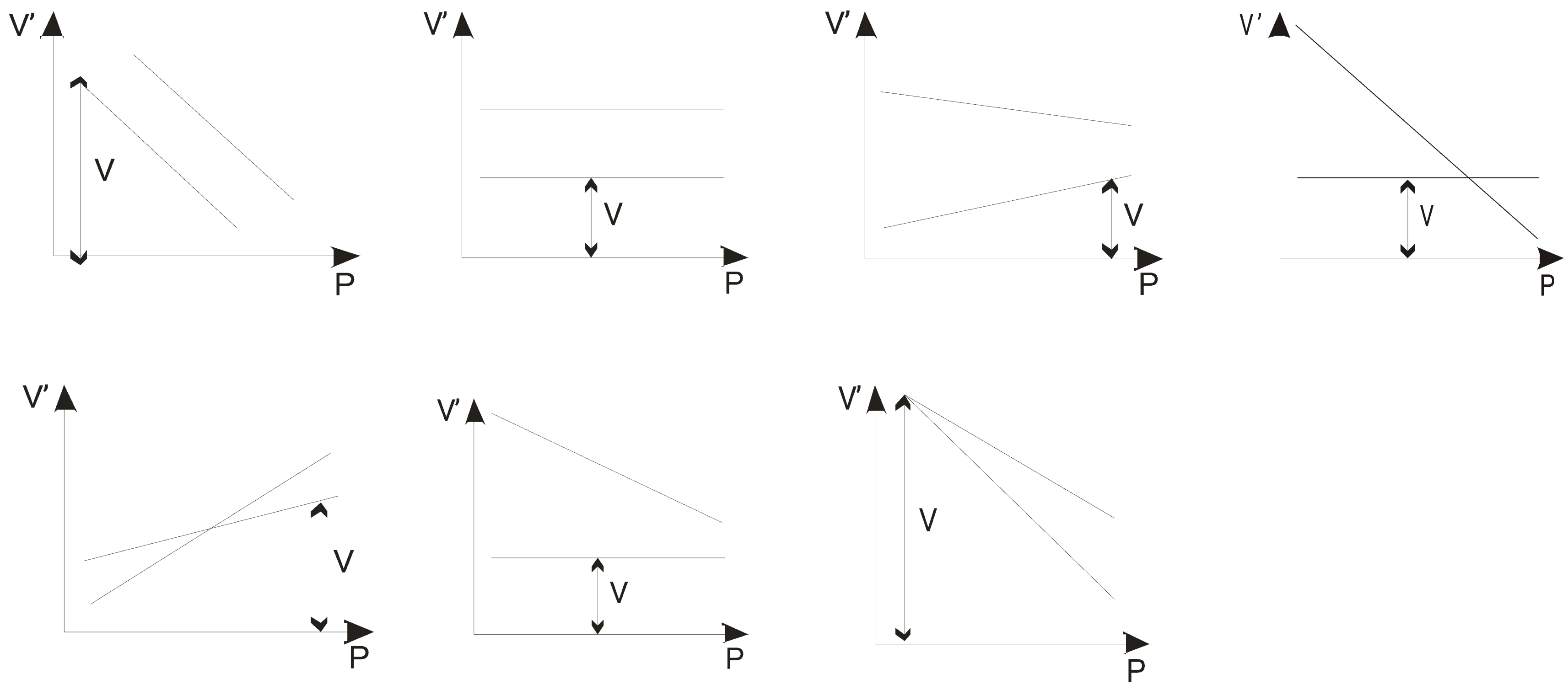
Геометрический способ решения игры(2x2)

$$V = (a_{11} - a_{21}) p_1 + a_{21}$$

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21}(1 - p_1) = V \\ a_{12} p_1 + a_{22}(1 - p_1) = V \end{cases}$$



Варианты решений:



Геометрическое решение игры (2xN) и (Mx2)

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & q_3 & q_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 = 1 - p_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2p_1 + 4(1-p_1) = V \\ 2p_1 + 3(1-p_1) = V \\ 3p_1 + 2(1-p_1) = V \\ -p_1 + 6(1-p_1) = V \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2p_1 + 4 = V \\ -p_1 + 3 = V \\ p_1 + 2 = V \\ -7p_1 + 6 = V \end{cases}$$

$$p_1 + 2 = -7p_1 + 6$$

$$8p_1 = 4$$

$$p_1^* = \frac{1}{2}, \quad p_2^* = \frac{1}{2}$$

$$V = 2{,}5$$

$$3q_3 - q_4 = 2{,}5$$

$$3q_3 - 1 + q_3 = 2{,}5$$

$$4q_3 = 3{,}5$$

$$q_3^* = \frac{7}{8}, \quad q_4^* = \frac{1}{8}$$

Геометрическое решение игры (2xN) и (Mx2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Отв. P=(0; 0,6; 0; 0; 0,4); Q=(0,8; 0,2); V=5,4

Приведение игры к ЗЛП

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq V$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_i = \frac{p_i}{V}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{V} \to \min$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq V$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad q_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

$$y_j = \frac{q_j}{V}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1 \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m = \frac{1}{V} \to \max$$

$$y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

Пример приведения матричной игры к ЗЛП

4	3	4	2
3	4	6	5
2	5	1	3

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 + y_5 = 1, \\ 3y_1 + 4y_2 + 6y_3 + 5y_4 + y_6 = 1, \; y_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, 7. \\ 2y_1 + 5y_2 + y_3 + 3y_4 + y_7 = 1. \end{cases}$$

			0	1	1	1	1	0	0	0
N	**Базис**	**Сб**	A_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
1	A_1	1	3/14	*1*	1/2	4/7	0	5/14	-1/7	0
2	A_4	1	1/14	0	1/2	6/7	*1*	-3/14	2/7	0
3	A_7	0	5/14	0	5/2	-19/7	0	-1/14	-4/7	*1*
	$W_j - C_j$		2/7	0	0	3/7	0	1/7	1/7	0

Статические игры (игры с “природой”)

$$\begin{array}{cc} & \Pi_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \Pi_n - \text{поведение природы} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \\ A_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \\ & q_1 \ldots\ldots\ldots\ldots q_n \end{array}$$

<u>Существуют два класса игр с природой:</u>

1. Первый класс, когда к каждому состоянию природы можно приписать некоторую вероятность.

- Второй класс, когда к каждому состоянию природы не можем приписать некоторую вероятность.

Принципы и критерии для выбора решения

1. **Критерий Байеса**

Оптимальной стратегией будет стратегия, в которой достигается

$$\max \overline{a_i}$$

$$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$$

2. **Принцип недостаточного основания Лапласа**

Если мы не знаем вероятности, то положим состояние природы равновероятными:

$$q_j = \frac{1}{n}$$

3. **Максиминный критерий Вальда**

Оптимальна та стратегия, в которой лежит элемент $\alpha = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$.

Это пессимистический критерий (рассчитан на самый хороший вариант в самом плохом случае).

4. Критерий минимального риска Сэвиджа

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} - \text{риск игрока А}$$

$$\beta_j = \max a_{ij}$$

$$(r_{ij})_{mxn} - \text{матрица риска}$$

Риск – плата за отсутствие информации.

Оптимальна та стратегия, в которой лежит минимальный из максимальных рисков:

$$w = \min_i \max_j r_{ij}.$$

5. **Критерий оптимизма – пессимизма Гурвица**

$$\max_i [\lambda \min_j (a_{ij}) + (1-\lambda) \max_j (a_{ij})], \text{ где } 0 \le \lambda \le 1$$

λ – коэффициент оптимизма

$\lambda = 1$ – крайний пессимизм $\rightarrow$ критерий Вальда

$\lambda = 0$ – крайний оптимизм

$\lambda = 0{,}6$

Пример:

	B1	*B2*	*B3*	*B4*	*L*
A1	7	8	5	6	5
A2	4	3	2	2	2
A3	8	4	3	8	3
A4	7	1	9	12	1
B	8	8	9	12	

1. Критерий Байеса

	7	8	5	6	6,65
	4	3	2	2	2,8
	8	4	3	8	5,8
	7	1	9	12	**6,85**
P	0,25	0,3	0,2	0,25	

2. Максиминный критерий Вальда

<table>
<tr><td>7</td><td>8</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>L</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>3</td><td>8</td><td>3</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>9</td><td>12</td><td>1</td></tr>
</table>

3. Критерий минимального риска Сэвиджа

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td>7</td><td>8</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>3</td><td>8</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>9</td><td>12</td></tr>
<tr><td>B</td><td>8</td><td>8</td><td>9</td><td>12</td></tr>
</table>

Матрица рисков

1	0	4	6	**6**
4	5	7	10	10
0	4	6	4	**6**
1	7	0	0	7

4. Критерий Гурвица

				min	max
7	8	5	6	5	8
4	3	2	2	2	4
8	4	3	8	3	8
7	1	9	12	1	12

	min*0,5	max*0,5	+
$\lambda = 0{,}5$	2,5	4	**6,5**
	1	2	3
	1,5	4	5,5
	0,5	6	**6,5**

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

Игры с природой

Игры с природой

Определение. Игра, в которой осознанно действует только один из игроков, называется игрой с природой.

Природа может принимать одно из своих возможных состояний и не имеет целью получение выигрыша.

Игра с природой представляется в виде платежной матрицы, элементы которой – выигрыши игрока А, но не являются проигрышами природы П.

Имеем. Игрок А, $S_A=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$, $F_A(P,П_j)$

Природа П с состояниями $S_П=\{п_1,п_2,\ldots,п_n\}$

Игры с природой

А/П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	….	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}
….					
A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mn}

Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} – выигрыш игрока А при стратегии A_i в состоянии природы $П_j$

С одной стороны, задача выбора оптимальной стратегии для игрока А упрощается

С другой, задача осложняется из-за дефицита информации о поведении природы

Игры с природой

Алгоритм решения задач остается прежним

1. Анализируется наличие доминирующей стратегии игрока А. Если она есть, то эта стратегия выбирается в качестве оптимальной

2. Производится редуцирование матрицы. При этом рассматриваются только строки, т.к. «Природа» действует не осознанно

Замечание. Матрица выигрышей не всегда однозначно определяет выбор оптимальной стратегии

На выбор стратегии оказывают влияние еще и показатели «удачности» или «неудачности» выбора

Это условие называется «благоприятностью» природы

Игры с природой

<u>Определение.</u> Показателем благоприятности состояния $П_j$ природы П для увеличения выигрыша называется наибольший выигрыш игрока А при этом состоянии природы, т.е. наибольший элемент в j-ом столбце платежной матрицы: $\beta_j=\max(a_{ij})$, $j=1,2,\ldots,n$.

Для характеристики «удачности» применения игроком стратегии A_i в состоянии природы $П_j$ вводится понятие риска.

<u>Определение.</u> Риском r_{ij} игрока А при выборе стратегии A_i называется разность между показателем благоприятности β_j в состоянии природы $П_j$ и выигрышем a_{ij}: $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$.

<u>Риск</u> – упущенная возможность получения максимального выигрыша в данном состоянии природы.

Из определения следует: $r_{ij} \geq 0$.

Игры с природой

Определение. Верхняя граница рисков для каждого состояния природы: w_j=min(a_{ij}), j=1,2,…,n.

Или W_i –минимальный выигрыш при данном состоянии природы

Колебание выигрыша в заданном состоянии природы: $\Delta r_j=\beta_j-w_j$.

Если $a_{ij}= W_i$ – то риск является максимальным. Следовательно по критерию риска эта стратегия наихудшая

Если $a_{ij}= \beta_j$ (r_{jj}=0), то стратегия A_i - безрисковая

Каждой платежной матрице игры можно поставить в соответствие матрицу рисков.

Обратное не верно.

Игры с природой

Пример.

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	9	4	5	1	3
A_2	4	8	3	0	1
A_3	4	7	4	8	2
β_j	9	8	5	8	3

Матрица игры

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	0	4	0	7	0
A_2	5	0	2	8	2
A_3	5	1	1	0	1

Матрица рисков

Если игрок выбирает стратегию A_3, то игрок получает одинаковый выигрыш при состояниях природы $П_1$ и $П_3$: $a_{31}=a_{33}=4$

Однако, эти выигрыши не равноценны в смысле рисков, т.к. удачность стратегии A_3 к этим состояниям природы различно. Благоприятность $\beta_1=9$, а $\beta_3=5$ соответственно риски $r_{31}=5$, а $r_{33}=1$

Игры с природой

Пример. (Продолжение)

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	9	4	5	1	3
A_2	4	8	3	0	1
A_3	4	7	4	8	2
β_j	9	8	5	8	3

Матрица игры

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	0	4	0	7	0
A_2	5	0	2	8	2
A_3	5	1	1	0	1

Матрица рисков

Может быть и другая ситуация. Выигрыши $a_{21}=a_{31}=4$ при этом риски у стратегий при состоянии природы $П_1$ одинаковы $r_{21}=r_{31}=5$

Стратегии, у которых при одинаковых состояниях природы равны риски, называются равноценными относительно этих состояний природы

Игры с природой

Различают два вида задач в играх с природой:

1. Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний

2. Задачи о принятии решений в условиях неопределенности, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы

Принятие решений в условиях риска

Пусть имеем игру с природой в условиях риска относительно выигрышей

А/П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	….	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}
….					
A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mn}
q_i	q_1	q_2	q_3	….	q_n

Игрок A имеет m возможных чистых стратегий

Природа – n возможных состояний

Каждое состояние появляется с вероятностью q_i

Задача. Выбрать оптимальную стратегию поведения игрока A в заданных условиях

В понятие оптимальности вкладываются различные соображения, которые составляют содержание различных критериев

Критерий Бейса в принятии решений в условиях риска

Определение. Показателем эффективности чистой стратегии игрока – среднее значение выигрыша игрока при применении i-ой стратегии:

$$\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \qquad (8.1)$$

Определение. Оптимальной по Бейсу чистой стратегией игрока относительно выигрышей считается такая стратегия, которая имеет максимальный показатель эффективности (8.1)

$$\overline{a}_i^0 = \max\left(\overline{a}_i\right) = \max\left(\sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}\right) \qquad (8.2)$$

Критерий Бейса в принятии решений в условиях риска

Замечание. Стратегия, выбранная по критерию Бейса, является оптимальной не в каждом применении, а в среднем

Критерий Бейса можно распространить и на случай игры в смешанных стратегиях

Пусть $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ смешанная стратегия игрока A, тогда выигрыш игрока есть

$$H_j(P,\Pi_j)=\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \qquad (8.3)$$

Тогда показатель эффективности смешанной стратегии P есть:

$$\overline{H}(P)=\sum_{j=1}^{n} q_j H_j(P)=\sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}=\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}=\sum_{i=1}^{m} p_i \overline{a}_i \qquad (8.4)$$

Показатель эффективности по Бейсу относительно выигрышей – среднее взвешенное значение показателей эффективности чистых стратегий по тому же критерию

Критерий Бейса в принятии решений в условиях риска

<u>Определение.</u> Пусть S_A – множество всех стратегий игрока A. Оптимальной среди всех стратегий из множества S_A – называется стратегия P^0, показатель эффективности которой максимален:

$$\max \overline{H}(P) = H(P^0)$$

<u>Теорема</u>. Стратегия A_i^0 оптимальная среди всех чистых стратегий игрока A по критерию Бейса относительно выигрышей, является оптимальной по тому же критерию критерию среди всех смешанных стратегий S_A

Теорема говорит о том, что при принятии решения в условиях риска по критерию Бейса относительно выигрышей, можно обойтись только чистыми стратегиями

Критерий Бейса в принятии решений в условиях риска

<u>Пример</u>. Найти оптимальную стратегию предприятия при выпуске продукции, если платежная матрица имеет вид:

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\overline{a}_i$
A_1	0.25	0.35	0.40	0.31
A_2	0.70	0.20	0.30	0.47
A_3	0.35	0.85	0.20	0.47
A_4	0.80	0.10	0.35	0.50
q_j	0.5	0.3	0.2	

Для удобства решения задач платежная матрица дополняется столбцом a_i и строкой q_i

Оптимальной стратегией предприятия по критерию Бейса относительно выигрышей является A_4

$a_1 = 0.5*0.25+0.3*0.35+0.2*0.4=0.31$

Критерий Бейса относительно рисков

Пусть имеем игру относительно рисков в условиях риска

А/П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	….	$П_n$
A_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	….	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	….	r_{2n}
….	….	….	….	….	….
A_m	r_{m1}	r_{m2}	r_{m3}	….	r_{mn}
q_j	q_1	q_2	q_3	….	q_n

Определение. Показателем неэффективности стратегии A_i по критерию Бейса относительно рисков называется средне взвешенное значение риска в i-ой строке:

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij} \quad при \quad i = 1,2,\dots,m$$

Определение. Оптимальной по критерию Бейса в игре относительно рисков является стратегия A_i, показатель неэффективности которой минимальный

$$\bar{r}_i^{\,0} = \min \bar{r}_i$$

Критерий Бейса относительно рисков

Риск смешанной стратегии $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$, принадлежащей множеству S_A, при состоянии природы Π_J, определяется как:

$$r_j(P,\Pi_j)=\left[\max_{u\in S_A} H(u,\Pi_j)\right]-H(P,\Pi_j) \quad при \quad j=1,2,\ldots,n$$

Показатель неэффективности смешанной стратегии $P\{p_1,p_2,\ldots p_m\}$, принадлежащей множеству S_A, относительно рисков определяется как средне взвешенное рисков по строке

Оптимальной среди всех смешанных стратегий по критерию Бейса относительно рисков считается та стратегия, для которой показатель неэффективности имеет минимальное значение

<u>Теорема</u>. Если стратегия A_i^0 – оптимальная по критерию Бейса относительно рисков среди всех чистых стратегий, то она является оптимальной по тому же критерию среди всех смешанных стратегий

Критерий Бейса относительно рисков

Пример.

Исходная матрица

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	a_i
A_1	0.25	0.35	0.40	0.31
A_2	0.70	0.20	0.30	0.47
A_3	0.35	0.85	0.20	0.47
A_4	0.80	0.10	0.35	0.50
β_j	0.8	0.85	0.4	
q_j	0.5	0.3	0.2	

Матрица рисков

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	r_i
A_1	0.55	0.50	0	0.425
A_2	0.10	0.65	0.10	0.265
A_3	0.45	0	0.20	0.265
A_4	0	0.75	0.05	0.235
q_j	0.5	0.3	0.2	

Часто принимают, что q_i=Const, т.к. у игрока нет информации о законе распределения состояний природы

Принятие гипотезы о равновероятном распределении вероятностей состояний природы называется принципом недостаточного основания Лапласса (q_i=1/n)

Принятие решения в условиях неопределенности

Особенность задачи – отсутствие информации о вероятностях появления состояний природы

Для решения задачи Гурвиц предложил следующий подход

От платежной матрицы перейти к вспомогательной, которая формируется из платежной матрицы путем сортировки элементов каждой строки по возрастанию

Вспомогательную матрицу будем обозначать как В

В этой матрице в 1-ом столбце сгруппированы элементы с минимальными выигрышами при всех стратегиях игрока и всех состояниях природы

В последнем столбце наоборот содержатся максимальные выигрыши при всех стратегиях и состояниях природы

Принятие решения в условиях неопределенности

Для учета возможности появления выигрышей вводится набор коэффициентов λ_1, λ_2, …,λ_n, которые обладают свойством $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$

Величина:

$$G_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{ij} \qquad (8.5)$$

называется показателем эффективности стратегии A_i по Гурвицу

Величина (8.5) учитывает все выигрыши возможные при i – ой стратегии и зависит от значений коэффициентов λ_1, λ_2, …,λ_n, которые выступают в качестве весов вклада каждой стратегии в показатель эффективности

Принятие решения в условиях неопределенности

Определение. Обобщенным критерием пессимизма-оптимизма Гурвица с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ относительно выигрышей называется критерий, по которому оптимальной среди чистых стратегий является стратегия A_i с максимальным показателем эффективности (8.5)

Числа

$$Л_p = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} Л_j \qquad Л_o = \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} Л_j$$

называются показателями пессимизма и оптимизма соответственно

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ выбираются субъективно

Критерий Вальда (критерий крайнего пессимизма)

Критерий Вальда является частным случаем обобщенного критерия Гурвица относительно выигрышей со специальными значениями коэффициентов: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_n=0$

Подставляя значения коэффициентов в показатель эффективности (8.5) получим:

$$W_i = G_i(1,0,0,\ldots,0) = b_{i1} = \min_{1\le j\le n} a_{ij} \quad \text{при} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (8.6)$$

W_i представляет собой минимальный выигрыш при каждой стратегии, а оптимальной считается стратегия с максимальным значением показателя эффективности W_i

Критерий Вальда (критерий крайнего пессимизма

Другими словами, оптимальной среди чистых стратегий по критерию Вальда считается та чистая стратегия, при которой минимальный выигрыш является максимальным среди минимальных выигрышей всех чистых стратегий.

По критерию Вальда показатель пессимизма λ_p=1, а показатель оптимизма λ_o=0

Критерий Вальда ориентирует игрока на неблагоприятные для него состояния природы

Отсюда название «Критерий крайнего пессимизма»

Критерий крайнего оптимизма

Данный критерий является противоположностью критерия Вальда

Предполагается, что $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{n-1}=0$, $\lambda_n=1$, тогда

$$M_i = G_i(0,0,\ldots,0,1) = b_{in} = \max_{1\le j\le n} a_{ij} \quad \text{при} \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Оптимальной среди чистых стратегий по критерию максимального оптимизма будет стратегия A^0, для которой справедливо условие:

$$M = \max_{1\le i\le m} M_i = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le n} a_{ij}$$

В этом случае $\lambda_p=0$, $\lambda_o=1$

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

Данный критерий является некоторым обобщением критериев крайнего пессимизма и крайнего оптимизма и также представляет собой частный случай обобщенного критерия Гурвица относительно выигрышей при следующем допущении:

$\lambda_1=1-\lambda,\ \lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_{n-1}=0,\ \ \lambda_n=\lambda,$ где $0\leq\lambda\leq1$

Тогда показатель эффективности стратегии A_i по Гурвицу есть:

$$G_i = G_i(1-\text{л},0,0,\ldots,\text{л}) = (1-\text{л})b_{i1} + \text{л}b_{in} = (1-\text{л})\min_{1\leq j\leq n} a_{ij} + \text{л}\max_{1\leq j\leq n} a_{ij} \qquad (8.7)$$

Оптимальной стратегией A_i^0 считается стратегия с максимальным значением показателя эффективности (8.7)

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

Показатели пессимизма и оптимизма при этом равны соответственно λ_p=1-λ, λ_o=λ

Показатель эффективности (8.7) соответствует показателю эффективности крайнего пессимизма при λ=0 и крайнего оптимизма при λ=1

При λ=0.5 (реалистичная ситуация) λ_p=0.5, λ_o=0.5

Замечание. Рассмотренные критерии не учитывают всех возможных состояний природы. Принятие решения производится на основании только крайних значений выигрыша

Только обобщенный критерий Гурвица позволяет учесть весь спектр возможных выигрышей!

Обобщенный критерий Гурвица относительно выигрышей

Т.к. в матрице B все элементы по строкам упорядочены в порядке возрастания, это свойство положено в основу определения значений неизвестных коэффициентов λ_j

Введем следующие обозначения:

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}$$

Сумма выигрышей по j-ому столбцу матрицы B

$$\overline{b}_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} b_j$$

Среднее значение выигрыша по J-ому столбцу матрицы B

$$b = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Общая сумма выигрышей по всей матрице

$b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ и $\overline{b}_1 \le \overline{b}_2 \le \ldots \le \overline{b}_n$

Обобщенный критерий Гурвица относительно выигрышей

Игроку предлагаются два подхода к выбору оптимальной стратегии:

- более осторожный, при котором коэффициенты λ убывают с ростом средних значений выигрышей по столбцам

- более оптимистичный, при котором значения коэффициентов λ возрастают с ростом средних значений выигрышей по столбцам

Выбор подхода (оценка реальной ситуации опасная/безопасная) возлагается на игрока

Обобщенный критерий Гурвица относительно выигрышей

Безопасная ситуация (оптимистичный подход)

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\ldots:\lambda_n = b_1:b_2:b_3:\ldots:b_n$$

$$\text{Л}_j = \frac{\overline{b}_j}{b} \qquad (8.8)$$

Опасная ситуация (пессимистический подход)

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\ldots:\lambda_n = b_n:b_{n-1}:b_{n-2}:\ldots:b_1$$

$$\text{Л}_j = \frac{\overline{b}_{n-j+1}}{b} \qquad (8.9)$$

Пример игры с природой

Задача. «Покупка акций»

Пусть инвестор может купить акции трех компаний $К_1$, $К_2$ и $К_3$, руководствуясь показателем доходности акций.

Ситуация на фондовом рынке меняется со временем, что сказывается на показателях доходности

Тогда в качестве игрока можно принять инвестора, а в качестве природы – ситуацию на рынке в различные моменты времени

Пусть известны показатели доходности акций за 4-ре последовательных месяца «январь» - «апрель»

Вопрос. Какие акции целесообразно купить акционеру?

Пример игры с природой

Матрица игры

П / А	Январь $П_1$	Февраль $П_2$	Март $П_3$	Апрель $П_4$
A_1	8	4	6	20
A_2	7	7	7	7
A_3	6	12	8	10

Вспомогательная матрица B

J / A	1	2	3	4
A_1	4	6	8	20
A_2	7	7	7	7
A_3	6	8	10	12

Таким образом, в распоряжении игрока имеется матрица игры, в которой представлены показатели доходностей акций при каждом состоянии природы и вспомогательная матрица, полученная путем упорядочивания показателей доходностей в каждой строке

Пример игры с природой

J \ A	1	2	3	4	W_i	M_i	$G_{i(опт)}$	$G_{i(пес)}$
A_1	4	6	8	20	4	20	8.86	15.4
A_2	7	7	7	7	7	7	7.00	7.00
A_3	6	8	10	12	6	12	7.82	10.18
B_j	17	21	25	39				

Стратегии оптимальные с позиций критериев Вальда и крайнего оптимизма находятся очень просто Найдем оптимальные стратегии по критерию пессимизма – оптимизма Гурвица

Подход пессимиста. λ выбирается из условия невозрастания среднего:

$$\lambda = \lambda_4 = \frac{b_1}{b_1 + b_4} = \frac{17}{17+39} = \frac{17}{56} = 0.304 \qquad \lambda_1 = 1 - 0.304 = 0.696$$

$G_1(\lambda)=\lambda_1 * W_1+\lambda_4 * M_1=0.696*4+0.304*20=8.86$

$G_2(\lambda)=0.696*7+0.304*7=7;$ $G_3(\lambda)=0.696*6+0.304*0.696=7.82$

Подход оптимиста. λ выбирается из условия неубывания среднего

$\lambda=\lambda_1=b_4/(b_1+b_4)=0.696$ $\lambda_4=(1-\lambda)=0.304$

Пример игры с природой

$A \quad J$	1	2	3	4	$G_{пес}$	$G_{опт}$
A_1	4	6	8	20	7.98	11.5
A_2	7	7	7	7	7.00	7.00
A_3	6	8	10	12	8.31	9.69
b_j	17	21	25	39		
$\lambda_{пес}$	$\frac{39}{102}$	$\frac{25}{102}$	$\frac{21}{102}$	$\frac{17}{102}$		
$\lambda_{опт}$	$\frac{17}{102}$	$\frac{21}{102}$	$\frac{25}{102}$	$\frac{39}{102}$		

Найдем оптимальные стратегии по обобщенному критерию Гурвица

Опасная ситуация. Коэффициенты λ вычисляются по (8.9)

b=17+21+39=102

λ_1=39/109; λ_2=25/102; λ_3=21/102; λ_4=17/102

Показатели эффективности по Гурвицу по (8.5)

$$G_1^{пес} = 4\frac{39}{102} + 6\frac{25}{102} + 8\frac{21}{102} + 20\frac{17}{102} = 7.98$$

$$G_2^{пес} = 7\frac{39}{102} + 7\frac{25}{102} + 7\frac{21}{102} + 7\frac{17}{102} = 7.00$$

$$G_3^{пес} = 6\frac{39}{102} + 8\frac{25}{102} + 10\frac{21}{102} + 12\frac{17}{102} = 8.31$$