

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

(СМО)

- **СМО** – это случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

4 основных элемента:

- Входящий поток заявок;
- Очередь;
- Каналы обслуживания;
- Выходящий поток заявок

Типы СМО

В зависимости от *правил образования очереди*:

- **системы с отказами** - при занятости всех каналов обслуживания заявка покидает систему необслуженной;
- **системы с неограниченной очередью** - заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы обслуживания были заняты;
- **системы с ожиданием и ограниченной очередью** -ограниченно время ожидания или длина очереди.

Потоки событий

- ✓ Последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени
- ✓ **Характеризуется:**
 - ✓ Стационарностью
 - ✓ Интенсивностью;
 - ✓ Отсутствием последдействия;
 - ✓ Ординарностью.

Простейший
поток

Основные показатели

- Интенсивность потока (λ) - среднее число заявок, поступающих из потока за единицу времени.
$$\lambda = \frac{1}{\tau}.$$
- τ – среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками ,
- вероятность поступления на обслуживание m заявок за промежуток времени t определяется по закону Пуассона:

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Основные показатели

- Время между соседними заявками распределено по закону: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.
- Время обслуживания подчиняется показательному закону: $f(t) = \mu e^{-\mu t}$,
где μ – интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени,
- Отношение интенсивности входящего потока к интенсивности потока обслуживания называется *загрузкой системы* – среднее число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

СМО с отказами

- Вероятность того, что обслуживанием заняты k аппаратов

$$P_k = \frac{\rho^k}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}}, \quad (0 \leq k \leq n),$$

- Вероятность простоя

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}},$$

- Вероятность отказа

$$P_{отк} = P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} = \rho^n \frac{P_0}{n!}.$$

- Относительная пропускная способность, $\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}$ вероятность того, что заявка будет обслужена:

- Абсолютная пропускная способность $\bar{k} = 1 - P_{отк} = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1 - P_{отк}}{1 - P_{отк}}$ — среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени.

- Среднее число занятых каналов

$$A = \lambda P_{обсл.}$$

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho P_{обсл.}$$

Пример

На вход трехканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 4$ заявки в минуту. Время обслуживания заявки одним каналом $t_{обсл} = \frac{1}{\mu} = 0.5$ мин.

Найти показатели эффективности работы системы.

$$P_{обсл} = 1,$$

СМО

$$P_{отк} = 0.$$

с неограниченным ожиданием

- **Вероятность простоя** (того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):
- **Вероятность занятости обслуживанием k каналов:**
- **Вероятность занятости обслуживанием всех каналов при отсутствии очереди:**
- **Вероятность наличия очереди** - вероятность того, что число требований в системе больше числа каналов;
- **Вероятность для заявки попасть в очередь** - вероятность занятости всех каналов;
- **Среднее число занятых обслуживанием каналов:**
- **Доля каналов, занятых обслуживанием:**
- **Среднее число заявок в очереди** (длина очереди)
- **Среднее число заявок в системе**
- **Среднее время ожидания заявки в очереди**
- **Среднее время пребывания заявки в системе**

Пример

На вход трехканальной СМО с неограниченной очередью поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 4$ заявки в минуту. Среднее время обслуживания заявки

$$t_{\text{обсл}} = \frac{1}{\mu} = 0.5 \text{ ч.}$$

Найти показатели эффективности работы системы.

СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди

- **m** – длина очереди
- **Вероятность простоя** (того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):
- **Вероятность отказа в обслуживании** равна вероятности того, что в очереди уже стоят m заявок;
- **Относительная пропускная способность** - величина, дополняющая вероятность отказа до 1;
- **Абсолютная пропускная способность**
- **Среднее число занятых обслуживанием каналов**
- **Среднее число заявок в очереди** (средняя длина очереди)
- **Среднее время ожидания обслуживания в очереди**
- **Среднее число заявок в системе**
- **Среднее время пребывания заявки в системе**
-

Пример

В парикмахерской работают 3 мастера, в зале ожидания расположено 3 стула. Поток клиентов имеет интенсивность $\lambda = 12$ клиентов в час.

Среднее время обслуживания заявки

мин. $t_{\text{обсл}} = \frac{1}{\mu} = 20$

Определить относительную и абсолютную пропускную способность системы, среднее число занятых кресел, среднюю длину очереди, среднее время, которое клиент проводит в парикмахерской.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

к.т.н., доц. Калашникова Т.В.

tvkalash@tpu.ru