ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

РАНГ МАТРИЦЫ

<u>Определители.</u>(детерминанты). (Детерминанты квадратных матриц 2-го и 3-го порядка)

- Для квадратных матриц существует специальная числовая характеристика, называемая *детерминантом* (или *определителем*).

  Рассмотрим для начала определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.

Определение

- *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы 2-го порядка называется число .

$$\det \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

Определение

- *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы 3-го порядка называется число:

$$\det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} -$$

$$- \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} \quad .$$

Теорема

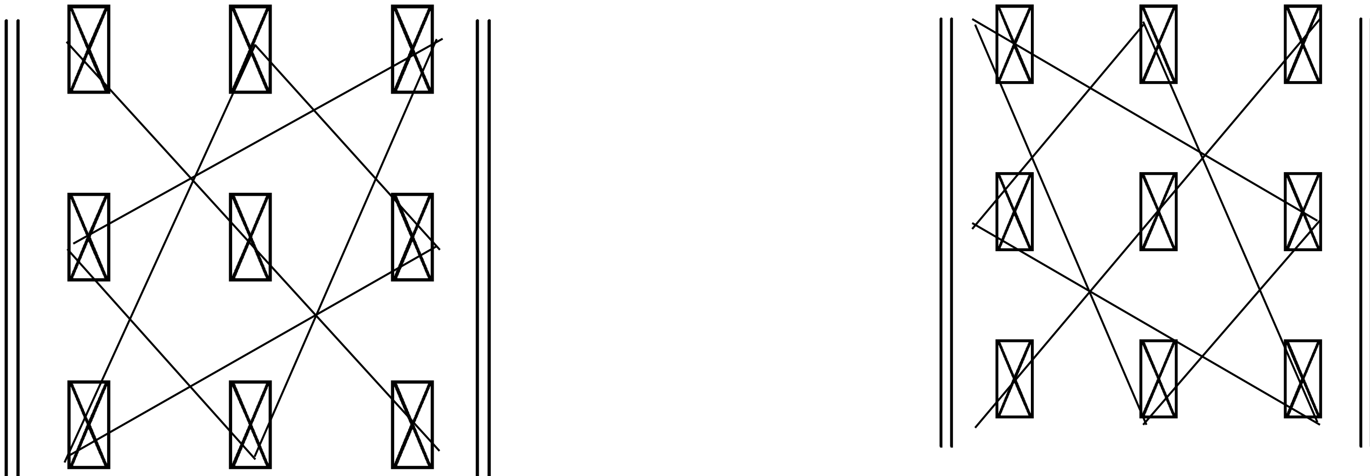
- **Определитель матрицы 3-го порядка может быть выражен через определители 2-го порядка формулой следующего вида:**

$$\det\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{Vmatrix} =$$

разложение определителя по первой строке.

$$= \alpha_{11}\det\begin{Vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{Vmatrix} - \alpha_{12}\det\begin{Vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{Vmatrix} + \alpha_{13}\det\begin{Vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{Vmatrix} \quad ,$$

- Иногда подсчет значения определителя матрицы третьего порядка удобнее выполнить по следующему правилу:



каждое слагаемое в определении есть произведение некоторой тройки элементов матрицы, причем элементы, входящие в произведения, берущиеся со знаком "плюс", соединены на рис. сплошными линиями, элементы, входящие в произведения, берущиеся со знаком "минус", - штриховыми линиями.

Определители высших порядков, вычисление и свойства.

- Рассмотрим множество, состоящее из натуральных чисел . Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть последовательную их запись в некотором порядке без повторений) как

$$\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$$

(полное число таких различных перестановок равно n!).

- **Определение**: Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка,* или *инверсию*), если при $i>j$ имеет место $k_i<k_j$.
- Полное число беспорядков в перестановке

$$\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$$

будем обозначать $\text{Б}(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$

Например, $\text{Б}(3,1,4,2) = 3$

- Пусть дана квадратная матрица

$$\left\| A \right\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} = \left\| \alpha_{ij} \right\|; \quad i, j = [1, n]$$

Определение:

- *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы $\| A \|$ размера *n*x*n* называется число $\det \| A \|$, получаемое по формуле

$$\det \| A \| = \sum_{\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n}$$

где - $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$ всевозможные различные перестановки, образованные из номеров столбцов матрицы $\| A \|$

- **Определение. Дополнительным M_{ij} минором** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} называется определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.
- **Определение. Алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} матрицы называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

Замечание:

- Поскольку в данном определении указано, что сумма берется по всем возможным различным перестановкам, то число слагаемых равно $n!$.
- Из определения также вытекает, что каждое слагаемое содержит в качестве сомножителя по одному элементу матрицы из каждого столбца и каждой строки.

Формула для вычисления определителей:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}$$

- где $M_{1к}$–дополнительный минор элемента $а_{1к}$. (Заметим, что определители имеют только квадратные матрицы.)

- Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что:

различные матрицы могут иметь одинаковые определители;

определитель единичной матрицы равен 1.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ:

- **Свойство1.** $\det A = \det A^T$;

- **Свойство 2.** $\det (AB) = \det A \cdot \det B$

- **Свойство 3.** Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

- **Свойство 4.** При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.
- **Определение:** Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

- **Свойство 5.** Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

- **Свойство 6.** Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

- **Свойство 7.** Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

- **Свойство 8.** Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы верно соотношение:

  $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

(Нахождение и применение)

Обратная матрица

- **Определение.** Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

  $XA = AX = E$,

  где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.
- Каждая **квадратная** матрица с определителем, **не равным** нулю **имеет** обратную матрицу и притом только **одну**

- Матрица $\left\| A \right\|$, для которой $\det\left\| A \right\| = 0$ называется *вырожденной*, а матрица, для которой $\det\left\| A \right\| \neq 0$ - *невырожденной*.

Нахождение обратной матрицы

- 1) Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.
- Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

  $AX = E \Rightarrow$, $i=(1,n)$, $j=(1,n)$,

  $e_{ij} = 0$, $i \neq j$,
  $e_{ij} = 1$, $i = j$.

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X.

- 2) При нахождении обратных матриц обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A}$$

где x_{ij} – соответствующий элемент обратной матрицы

M_{ij} - **дополнительный минор** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij}, он равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

- 3) К матрице A_{ij} «дописывают» справа единичную матрицу. С помощью элементарных преобразований приводят матрицу A_{ij} к единичному виду, тогда матица, которая получится справа – обратная

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \ldots & & & \ldots \\ & & \ldots & & \ldots & & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

Элементарные преобразования матрицы

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5) транспонирование.

- Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.
- С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Свойства обратных матриц

- $(A^{-1})^{-1} = A;$
- 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 3) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}.$

ПРИМЕНЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

обратная матрица позволяет найти решения следующих матричных уравнений:

$AX=C$ $XB=C$ $AXB=C$

Решение:

$X=A^{-1}C$ $X=CB^{-1}$ $X=A^{-1}CB^{-1}$

Ранг матрицы.

- **Определение.** Минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов

- <u>**Определение.**</u> В матрице порядка $m \times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.
- Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**
- В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

- **Определение.** Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.
- Элементарные преобразования матриц не изменяют ранг матрицы
- **Определение.** Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

(***Равные*** *матрицы и* ***эвиваленные*** *матрицы - понятия совершенно различные*)

Теорема о базисном миноре

- **Теорема.** *В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*
- *Таким образом, ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.*

Пример.

- Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

RgA = 2.

- Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 2. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.