

## 22.4. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

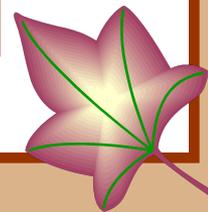
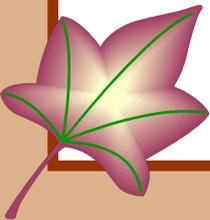
*Ряд с комплексными членами*

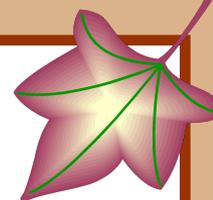
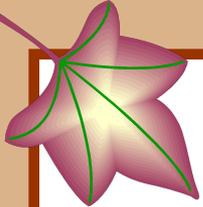
$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad \boxed{1}$$

*называется сходящимся, если  
существует конечный предел  
последовательности его частичных*

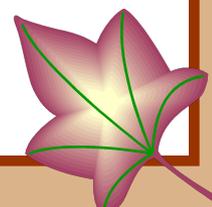
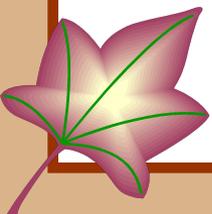
*сумм:*

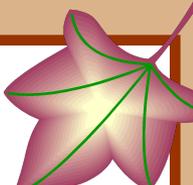
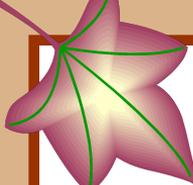
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$





*Число  $S$  называется суммой ряда:*

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = S$$




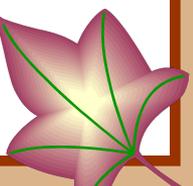
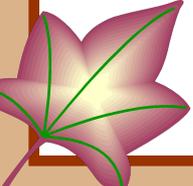
*Ряд (1) сходится тогда и только тогда,  
когда сходится ряд*

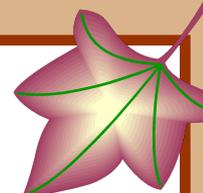
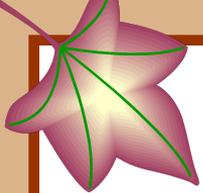
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

*составленный из действительных  
частей членов ряда (1), и ряд*

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots$$

*составленный из мнимых частей  
членов ряда (1).*





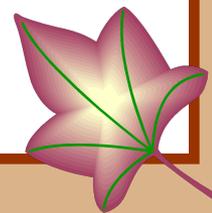
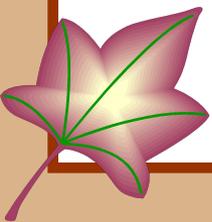
Таким образом, из сходимости последовательности комплексных чисел следует сходимость двух последовательностей, одна из которых состоит из действительных, а другая – из мнимых частей комплексной последовательности.

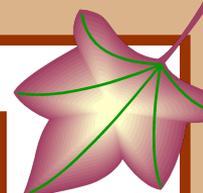
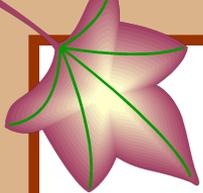
Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$



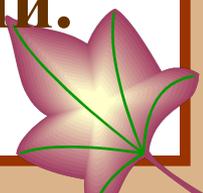
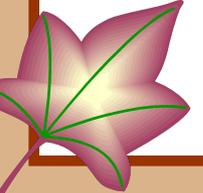


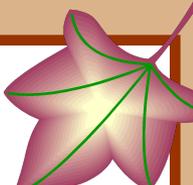
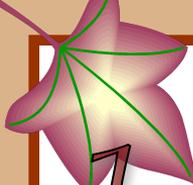
*Ряд (1) сходится абсолютно, если сходится ряд*

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots$$

$$\begin{array}{l} |x_n| \leq |z_n| \\ |y_n| \leq |z_n| \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + \dots \\ |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| + \dots \end{array} \quad \text{— сходятся}$$

**Определение суммы, разности, произведения рядов с комплексными членами такие же, как и для рядов с действительными членами.**





# 1. Показательная и тригонометрические функции

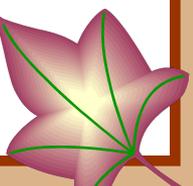
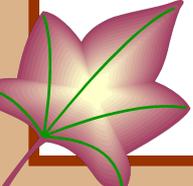
**Когда показатель степени является комплексным числом, определение степени**

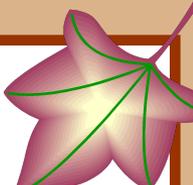
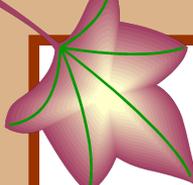
$$a^z$$

**вводимое в алгебре, теряет смысл. Аналогично, известные из тригонометрии функции**

$$\sin z, \cos z, \operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$$

**теряют смысл при комплексном аргументе  $z$ .**



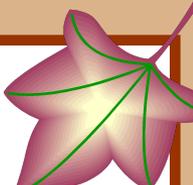
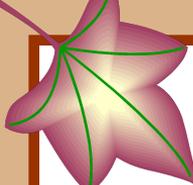


Воспользуемся известными разложениями в ряд функций действительного аргумента

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x$$

и определим их для комплексного аргумента:

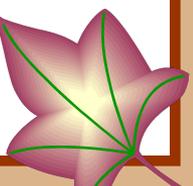
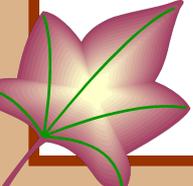
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

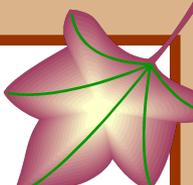
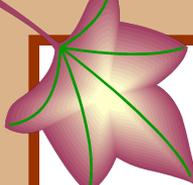

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

3

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

4

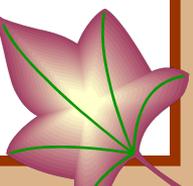
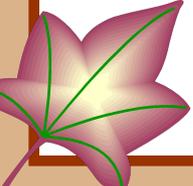


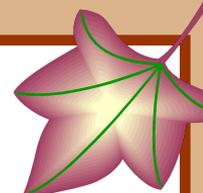
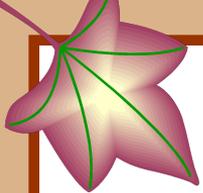


Ряды, стоящие в правой части равенств, сходятся, и притом абсолютно, при любом комплексном значении  $z$ . Поэтому эти равенства определяют функции

$$e^z, \sin z, \cos z$$

во всей плоскости комплексного переменного. При действительных значениях  $z$  эти функции будут совпадать с функциями, определенными ранее в курсе математического анализа.





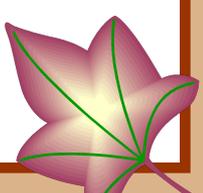
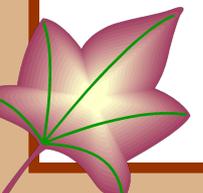
Найдем связь между этими функциями.

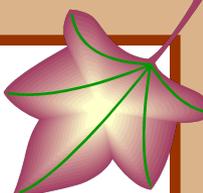
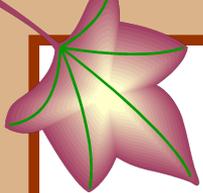
Подставим в разложение (2) вместо  $z$  величину  $iz$ .

$$e^{iz} = 1 + i \cdot z - \frac{z^2}{2!} - \frac{i \cdot z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{i \cdot z^5}{5!} + \dots$$

5

Умножим почленно равенство (3) на  $i$ :

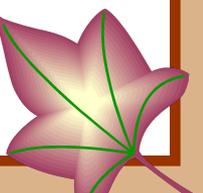
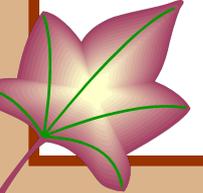
$$i \cdot \sin z = i \cdot z - \frac{i \cdot z^3}{3!} + \frac{i \cdot z^5}{5!} - \dots$$


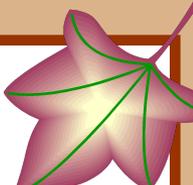
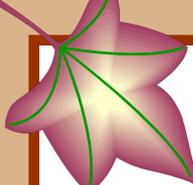


**Складываем почленно полученное равенство с равенством (2):**

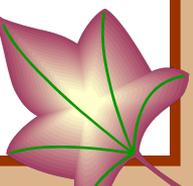
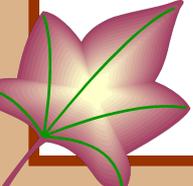
$$\cos z + i \cdot \sin z = 1 + i \cdot z - \frac{z^2}{2!} - \frac{i \cdot z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{i \cdot z^5}{5!} + \dots$$

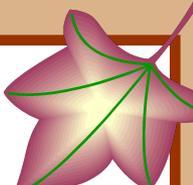
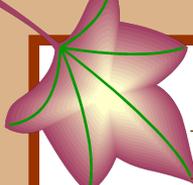
**Правые части этого равенства и равенства (5) равны, следовательно можно приравнять их левые части:**




$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$$

*формула Эйлера*





Если в формуле Эйлера заменить  $z$  на  $-z$ , то

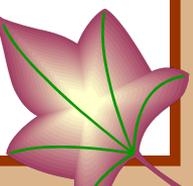
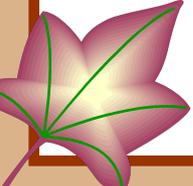
$$e^{-iz} = \cos z - i \cdot \sin z$$

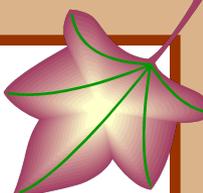
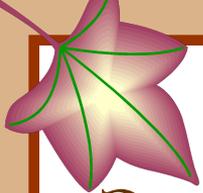
**Складывая и вычитая почленно последние два равенства, получаем:**

$$e^{iz} + e^{-iz} = \cos z + i \cdot \sin z + \cos z - i \cdot \sin z = 2 \cos z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = \cos z + i \cdot \sin z - \cos z + i \cdot \sin z = 2i \cdot \sin z$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2 \cdot i}$$


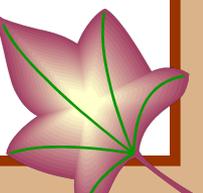
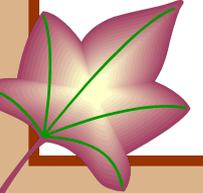


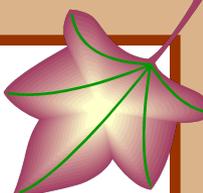
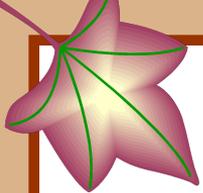
Эти формулы позволяют вычислять значения тригонометрических функций с комплексным аргументом.

С помощью формулы Эйлера можно перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной:

$$e^{iz} = r \cdot e^{i\varphi}$$

*показательная форма  
комплексного числа*





**Получим выражение, позволяющее вычислять значения показательной функции при любом комплексном значении показателя.**

**Т.к.**

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

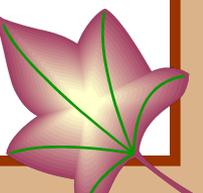
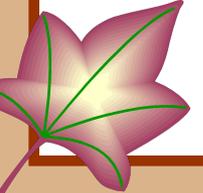
**то**

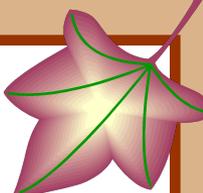
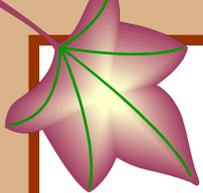
$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

**По формуле Эйлера**

$$e^{iy} = \cos y + i \cdot \sin y$$

**следовательно**

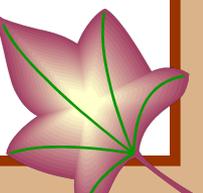
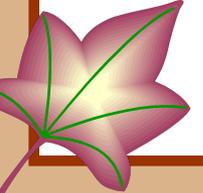



$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$$

**Тогда**

$$|e^z| = e^x$$

**и одно из значений аргумента равно  $y$ :**

$$\operatorname{Arg} e^z = y$$


# Пример.

Вычислить

1

$$e^{2-3i}$$

2

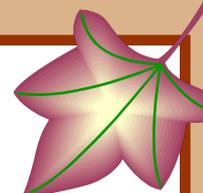
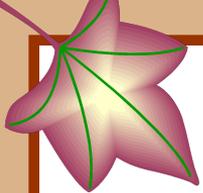
$$e^{\pi i}$$

3

$$e^{\frac{\pi}{2}i}$$

4

$$\sin(1 + 2 \cdot i)$$

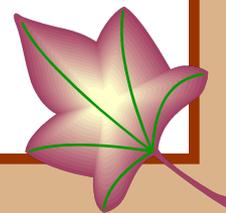
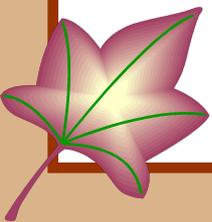


# Решение.

1  $e^{2-3i} = e^2 \cdot (\cos 3 - i \cdot \sin 3)$

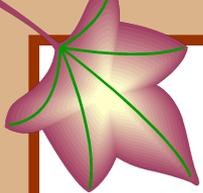
2  $e^{\pi i} = e^0 \cdot (\cos \pi - i \cdot \sin \pi) = -1$

3  $e^{\frac{\pi}{2}i} = e^0 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}) = i$



4

$$\begin{aligned}\sin(1 + 2 \cdot i) &= \frac{e^{i-2} - e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2} \cdot e^i - e^2 \cdot e^{-i}}{2i} = \\ &= \frac{e^{-2} \cdot (\cos 1 + i \sin 1) - e^2 \cdot (\cos 1 - i \sin 1)}{2i} = \\ &= \frac{\cos 1 \cdot (e^{-2} - e^2) + i \sin 1 \cdot (e^{-2} + e^2)}{2i} = \\ &= \frac{e^{-2} + e^2}{2} \sin 1 + i \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \cos 1\end{aligned}$$



Из равенства

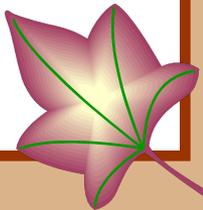
$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$$

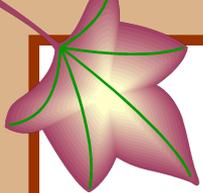
следует периодичность функции  $e^z$

с периодом  $2\pi i$ :

$$z = x + i \cdot y$$

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = \\ &= e^x \cdot (\cos(y + 2\pi) + i \cdot \sin(y + 2\pi)) = \\ &= e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) = e^z \end{aligned}$$





**В частности:**

$$e^{2k\pi i} = e^0 \cdot (\cos 2k\pi - i \cdot \sin 2k\pi) = e^0 = 1$$

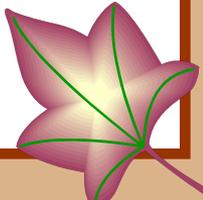
$$e^{(2k+1)\pi i} = e^0 \cdot (\cos(2k+1) \cdot \pi - i \cdot \sin(2k+1) \cdot \pi) = -1$$

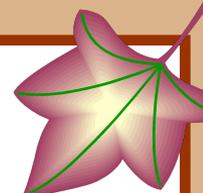
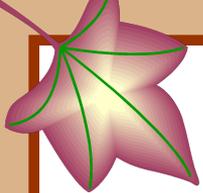
**Поскольку показательная функция имеет период  $2\pi i$ , то и функции**

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2 \cdot i}$$

**тоже будут периодическими с периодом  $2\pi$ :**

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z$$




Между тригонометрическими функциями сохраняются связывающие их тождества.

Поскольку функции  $\sin z$  и  $\cos z$  определены, можно задать функции  $\operatorname{tg} z$  и  $\operatorname{ctg} z$  для комплексного аргумента:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i \cdot (e^{iz} + e^{-iz})}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i \cdot (e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$
