22.4. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \qquad \boxed{1}$$

называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Число S называется суммой ряда:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = S$$

Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

составленный из действительных частей членов ряда (1), и ряд

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots$$

составленный из мнимых частей членов ряда (1).

Таким образом, из сходимости последовательности комплексных чисел следует сходимость двух последовательностей, одна из которых состоит из действительных, а другая – из мнимых частей комплексной последовательности.

Если

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

Ряд (1) сходится абсолютно, если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$$

$$\left.\begin{matrix} |x_n| \le |z_n| \\ |y_n| \le |z_n| \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{matrix} |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + \ldots \\ |y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| + \ldots \end{matrix} \quad - \textit{сходятся}$$

Определение суммы, разности, произведения рядов с комплексными членами такие же, как и для рядов с действительными членами.

1. Показательная и тригонометрические функции

Когда показатель степени является комплексным числом, определение степени

$$a^z$$

вводимое в алгебре, теряет смысл. Аналогично, известные из тригонометрии функции

$$\sin z,\ \cos z,\ tgz,\ ctgz$$

теряют смысл при комплексном аргументе z.

Воспользуемся известными разложениями в ряд функций действительного аргумента

$$e^x, \quad \sin x, \ \cos x$$

и определим их для комплексного аргумента:

$$\boxed{e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots}$$

2

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

3

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

4

Ряды, стоящие в правой части равенств, сходятся, и притом абсолютно, при любом комплексном значении z. Поэтому эти равенства определяют функции

$$e^z, \quad \sin z, \ \cos z$$

во всей плоскости комплексного переменного. При действительных значениях z эти функции будут совпадать с функциями, определенными ранее в курсе математического анализа.

Найдем связь между этими функциями. Подставим в разложение (2) вместо *z* величину *iz*.

$$e^{iz} = 1 + i \cdot z - \frac{z^2}{2!} - \frac{i \cdot z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{i \cdot z^5}{5!} + \ldots \qquad \boxed{5}$$

Умножим почленно равенство (3) на *i*:

$$i \cdot \sin z = i \cdot z - \frac{i \cdot z^3}{3!} + \frac{i \cdot z^5}{5!} - \ldots$$

Складываем почленно полученное равенство с равенством (2):

$$\cos z + i \cdot \sin z = 1 + i \cdot z - \frac{z^2}{2!} - \frac{i \cdot z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{i \cdot z^5}{5!} + \dots$$

Правые части этого равенства и равенства (5) равны, следовательно можно приравнять их левые части:

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$$

формула Эйлера

Если в формуле Эйлера заменить *z* на –*z*, то

$$e^{-iz} = \cos z - i \cdot \sin z$$

Складывая и вычитая почленно последние два равенства, получаем:

$$e^{iz} + e^{-iz} = \cos z + i \cdot \sin z + \cos z - i \cdot \sin z = 2\cos z$$

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = \cos z + i \cdot \sin z - \cos z + i \cdot \sin z = 2i \cdot \sin z$$

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2 \cdot i}}$$

Эти формулы позволяют вычислять значения тригонометрических функций с комплексным аргументом.
С помощью формулы Эйлера можно перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной:

$$e^{iz} = r \cdot e^{i\varphi}$$

показательная форма комплексного числа

Получим выражение, позволяющее вычислять значения показательной функции при любом комплексном значении показателя.

Т.к.

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$$

то

$$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}$$

По формуле Эйлера

$$e^{iy}=\cos y+i\cdot\sin y$$

следовательно

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$$

Тогда

$$|e^z| = e^x$$

и одно из значений аргумента равно y:

$$Arg e^z = y$$

Пример.

Вычислить

1. e^{2-3i}
2. $e^{\pi i}$
3. $e^{\frac{\pi}{2} i}$
4. $\sin(1+2\cdot i)$

Решение.

1 $$e^{2-3i} = e^2 \cdot (\cos 3 - i \cdot \sin 3)$$

2 $$e^{\pi i} = e^0 \cdot (\cos \pi - i \cdot \sin \pi) = -1$$

3 $$e^{\frac{\pi}{2} i} = e^0 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}) = i$$

4

$$\sin(1+2\cdot i)=\frac{e^{i-2}-e^{2-i}}{2i}=\frac{e^{-2}\cdot e^{i}-e^{2}\cdot e^{-i}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-2}\cdot(\cos 1+i\sin 1)-e^{2}\cdot(\cos 1-i\sin 1)}{2i}=$$

$$=\frac{\cos 1\cdot(e^{-2}-e^{2})+i\sin 1\cdot(e^{-2}+e^{2})}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\sin 1+i\cdot\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\cos 1$$

Из равенства

$$e^{z} = e^{x} \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$$

следует периодичность функции e^{z}

с периодом *2Пi*:

$$z = x + i \cdot y$$

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} =$$

$$= e^{x} \cdot (\cos(y+2\pi) + i \cdot \sin(y+2\pi)) =$$

$$= e^{x} \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) = e^{z}$$

В частности:

$$e^{2k\pi i} = e^{0}\cdot(\cos 2k\pi - i\cdot\sin 2k\pi) = e^{0} = 1$$

$$e^{(2k+1)\pi i} = e^{0}\cdot(\cos(2k+1)\cdot\pi - i\cdot\sin(2k+1)\cdot\pi) = -1$$

Поскольку показательная функция имеет период *2Пi*, то и функции

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\cdot i}$$

тоже будут периодичными с периодом 2П:

$$\cos(z+2\pi) = \cos z \qquad \sin(z+2\pi) = \sin z$$

Между тригонометрическими функциями сохраняются связывающие их тождества.

Поскольку функции *sinz* и *cosz* определены, можно задать функции *tgz* и *ctgz* для комплексного аргумента:

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i \cdot (e^{iz} + e^{-iz})}$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i \cdot (e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$