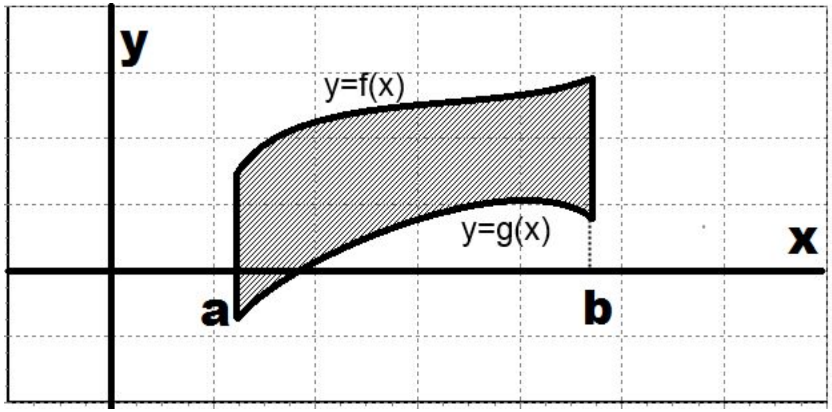
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

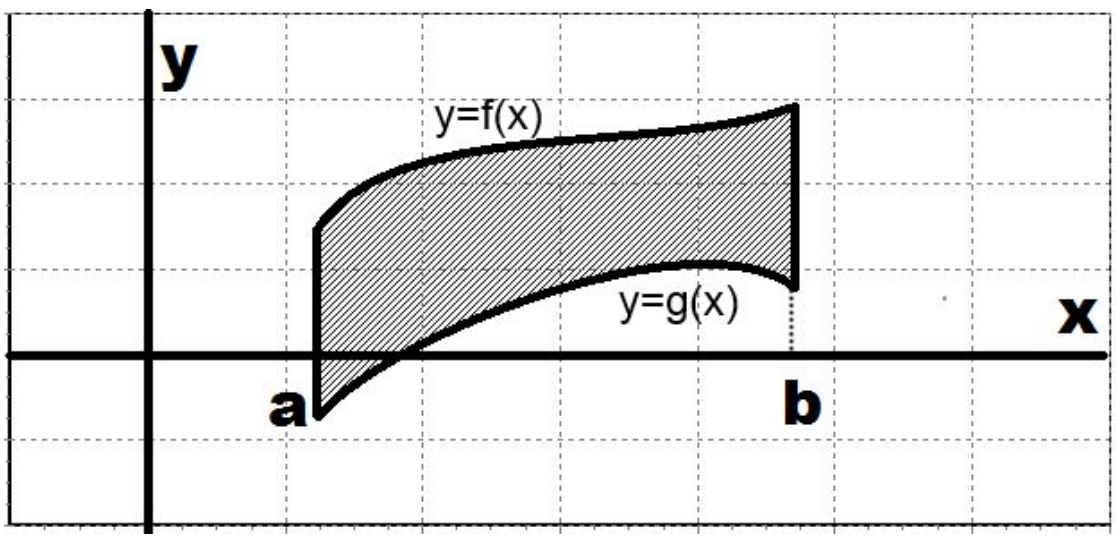
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА.



Определенный интеграл.

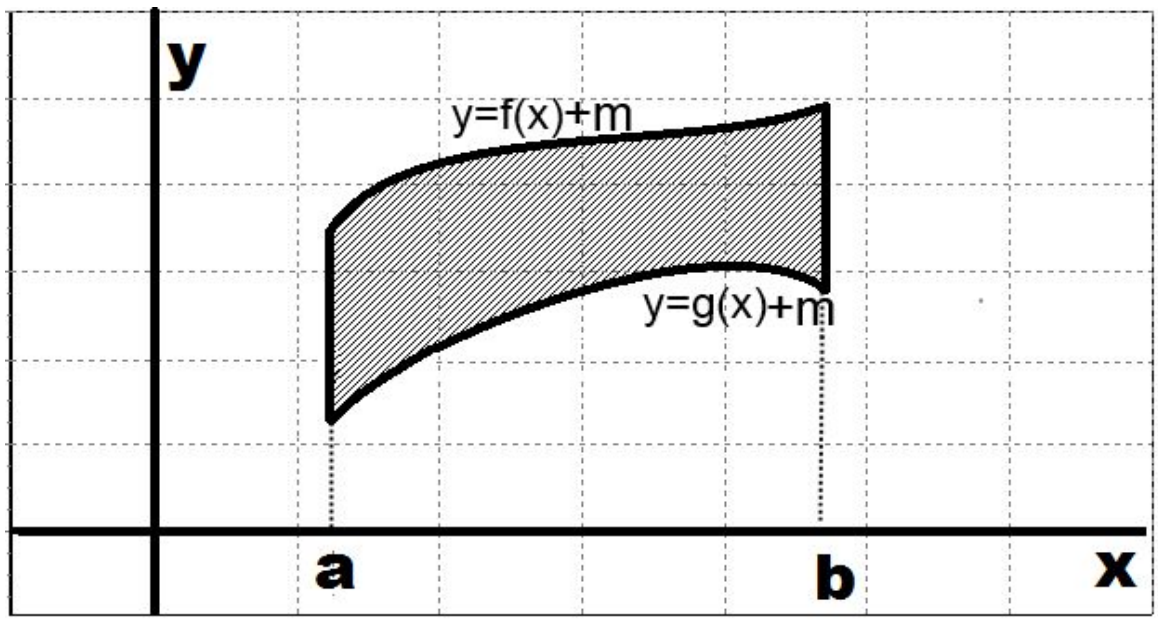
Ребята, на прошлом уроке мы с вами уже вычисляли площади различных фигур, ограниченных некоторым графиком и дополнительными условиями. Стоит заметить, что во всех примерах нижним основанием, требуемых фигур, служила прямая $y=0$. Но как быть в случае, когда фигура снизу ограничена произвольной прямой?

Давайте рассмотрим произвольную фигуру, которая ограничена сверху графиком функции $y=f(x)$, и снизу графиком функции $y=g(x)$, а так же прямыми $x=a$ и $x=b$. Так же стоит учесть, что на отрезке $[a;b]$ выполняется неравенство $f(x)\geq g(x)$.



Определенный интеграл.

До сих пор мы вычисляли площади фигур, которые были расположены выше оси абсцисс. Давайте нашу фигуру параллельно перенесем на m единиц вверх, площадь фигуры от такой операции не изменится, изменится только общий вид заданных функций. Сверху наша фигура будет ограничена функцией y=f(x)+m, снизу не трудно догадаться y=g(x)+m.



Определенный интеграл.

Площадь требуемой фигуры S можно вычислить как разность двух площадей двух фигур: первая фигура ограничена прямыми x=a и x=b, осью абсцисс и функцией y=f(x)+m, обозначим как S1. Вторая фигура ограничена прямыми x=a и x=b, осью абсцисс и функцией y=g(x)+m, обозначим как S2. Тогда

$$S1 = \int_a^b (f(x)+m)dx \qquad S2 = \int_a^b (g(x)+m)dx$$

$$S = S1 - S2 =$$

$$= \int_a^b (f(x)+m)dx - \int_a^b (g(x)+m)dx =$$

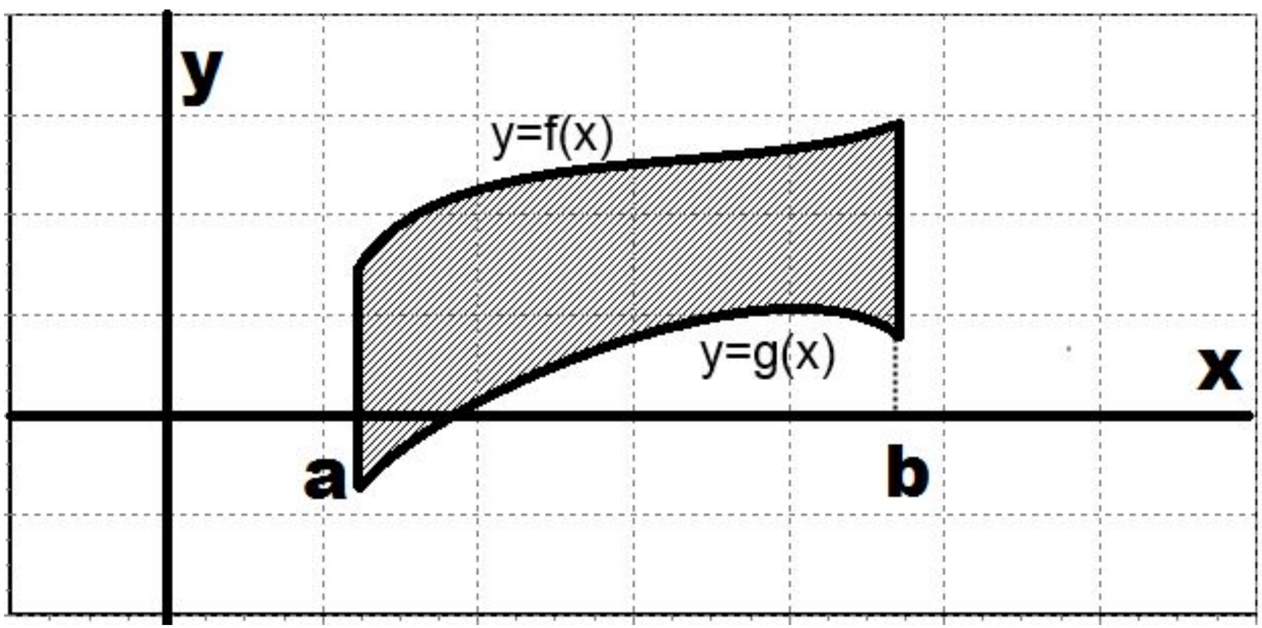
$$= \int_a^b ((f(x)+m) - (g(x)+m))dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x) + m - m)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Определенный интеграл.

Площадь фигуры ограниченной прямыми x=a и x=b и графиками функций y=f(x) и y=g(x), непрерывных на отрезке [a;b], и таких, что для любого x из отрезка [a;b] выполняется неравенство g(x)≤ f(x), вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx}$$

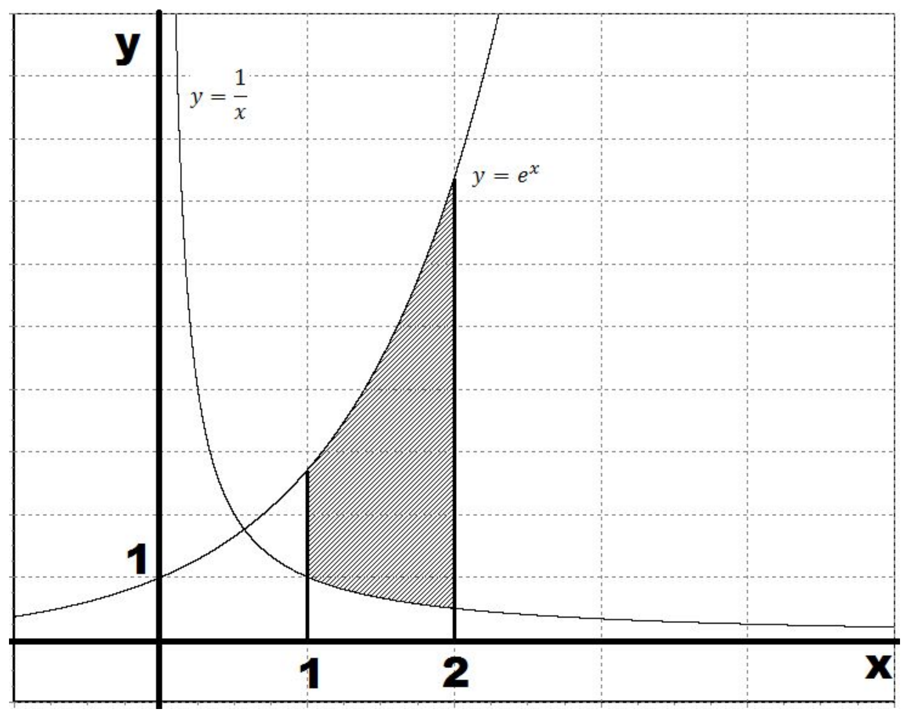


Определенный интеграл.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = e^x; y = \frac{1}{x}; x = 1; x = 2$$

Решение. Построим графики наших функций на одной координатной плоскости.



Сверху наша фигура ограничена графиком функции $y = e^x$

Снизу наша фигура ограничена графиком функции $y = \frac{1}{x}$

Воспользуемся формулой вычисления площадей:

$$S = \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 (e^x) dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx =$$

$$= e^x \Big|_1^2 - \ln x \Big|_1^2 = e^2 - e^1 - (\ln 2 - \ln 1) = e^2 - e^1 - \ln 2$$

Ответ: $S = e^2 - e^1 - \ln 2$

Определенный интеграл.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 3x + 2; y = x - 1$$

Решение. Построим графики наших функций.
График первой функции - парабола, ее вершину легко найти, прировняв уравнение производной к нулю

$$y' = (x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3 \qquad 2x - 3 = 0 \qquad x = 1.5$$

Вычислим значение самой функции в вершине

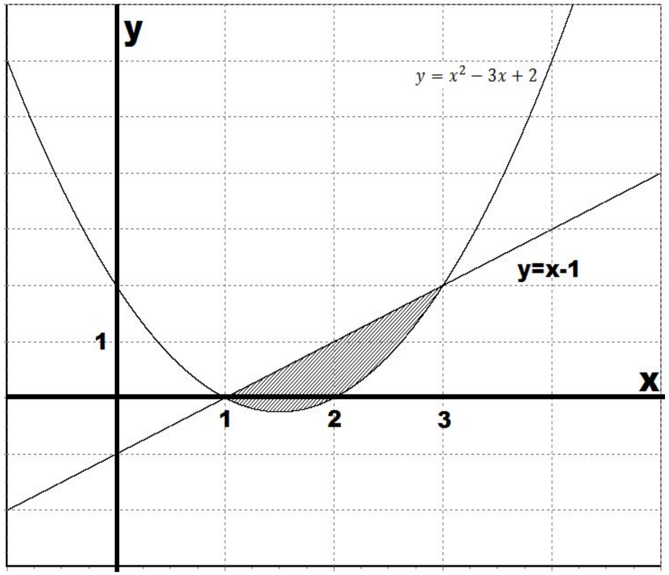
$$y = (1.5)^2 - 3 \cdot 1.5 + 2 = 2.25 - 4.5 + 2 = -0.25$$

Дальше график параболы легко построить по точкам.

График второй функции – прямая. Такие графики мы умеем легко строить.

Определенный интеграл.

Оба графика построим на одной координатной плоскости



Площадь требуемой фигуры закрашена. Давайте вычислим ее.

$$S = \int_1^3 (x - 1 - x^2 + 3x - 2)dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx =$$

$$= \int_1^3 (-x^2)dx + \int_1^3 (4x)dx + \int_1^3 (-3)dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 + 2x^2\Big|_1^3 - 3x\Big|_1^3 =$$

$$= -\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) + 2(9 - 1) - 3(3 - 1) = -\frac{26}{3} + 16 - 6 = 1\frac{1}{3}$$

Определенный интеграл.

Задачи для самостоятельного решения.

*открой следующий файл с заданием.