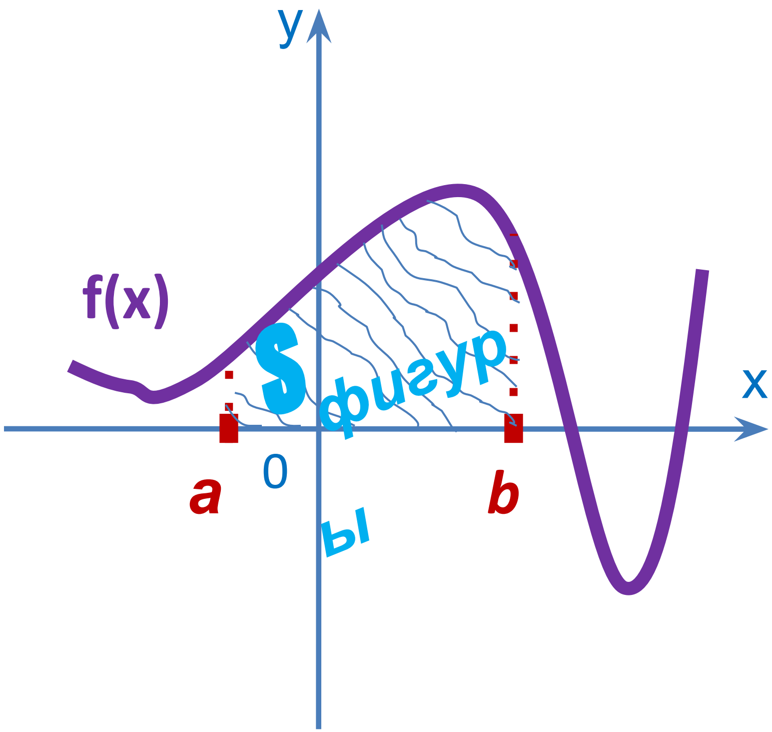
# Геометрический смысл определенного интеграла

Вычисление площади

# Содержание

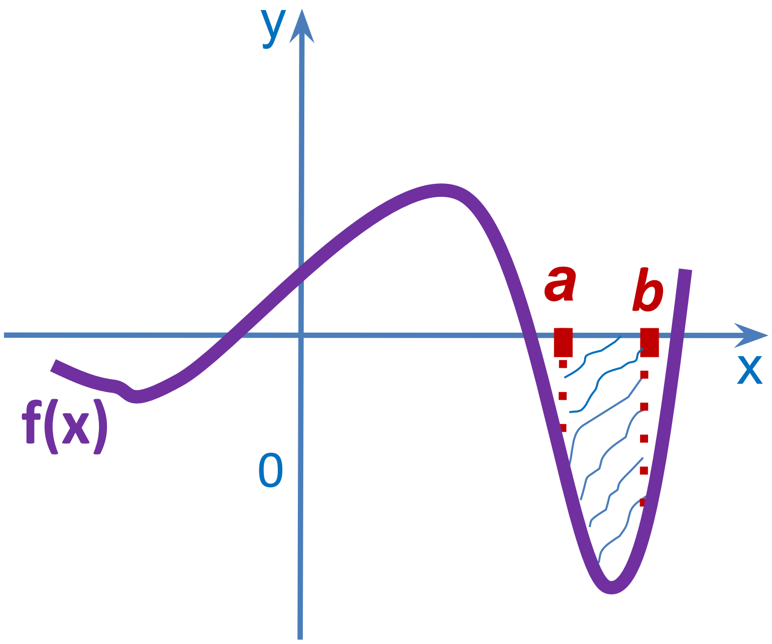
# Интеграл и площадь




**Если f(x)> 0 на [*a;b*], то**

$$S_{ф} = \int_a^b f(x)dx$$

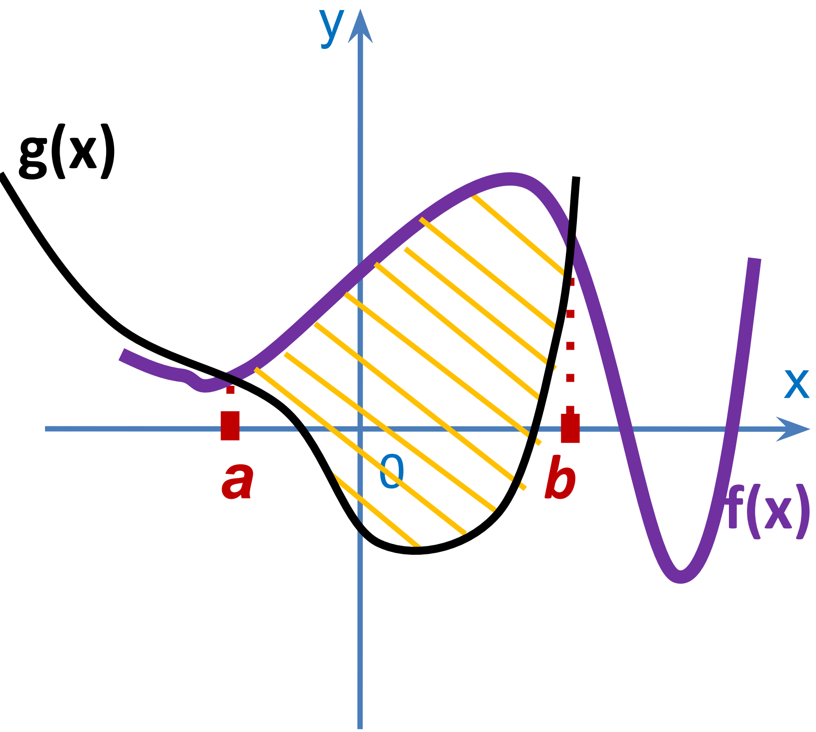
# *График функции ниже оси абсцисс*




**Если f(x)<0 на [*a;b*], то**

$$S_ф = -\int_a^b f(x)dx$$

# *График одной функции выше графика другой функции*




**Если f(x) > g(x) на [*a;b*]**

*(кроме точек пересечения),*

**то**

$$S_ф = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

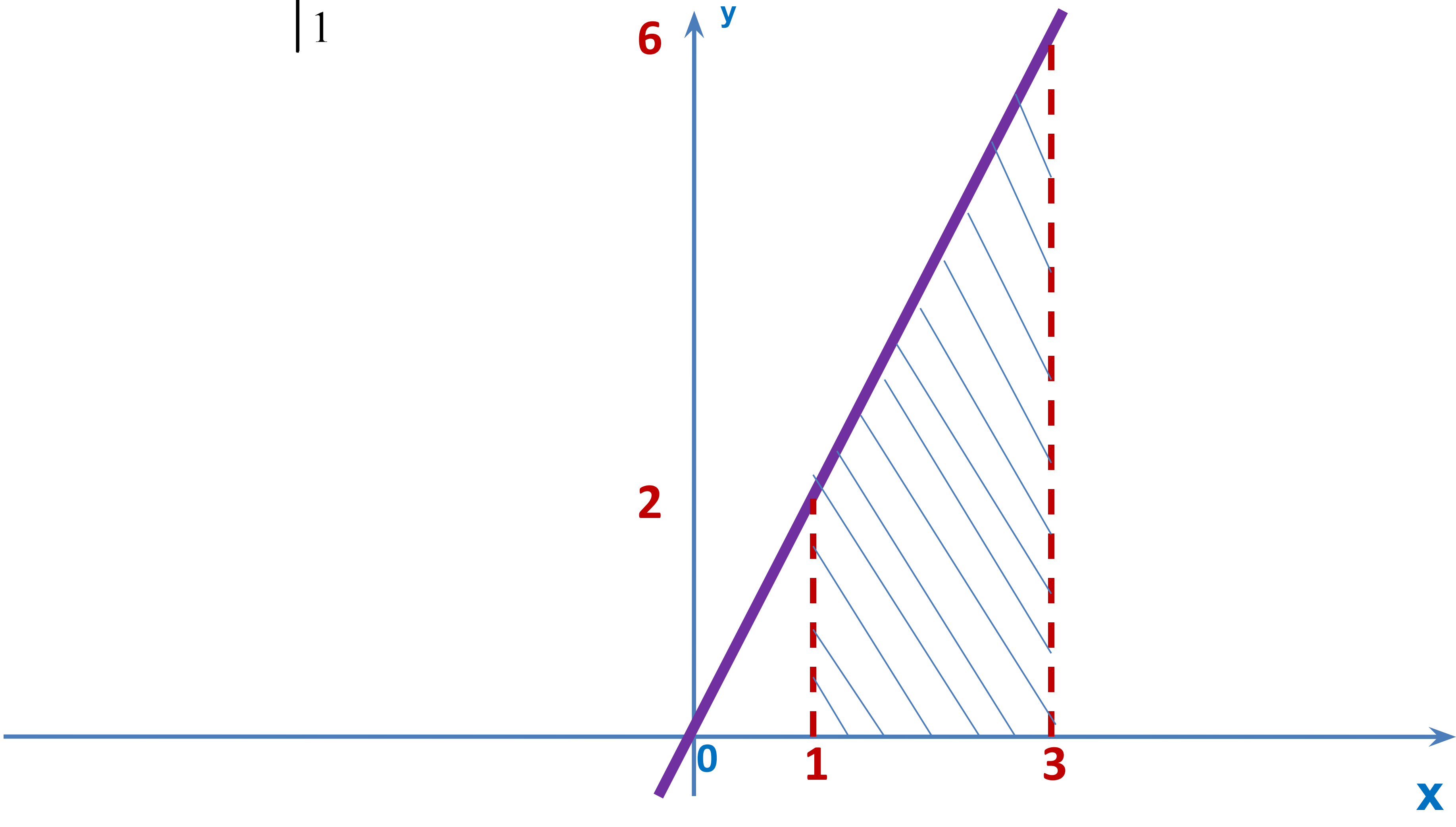
# Формула Ньютона - Лейбница

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

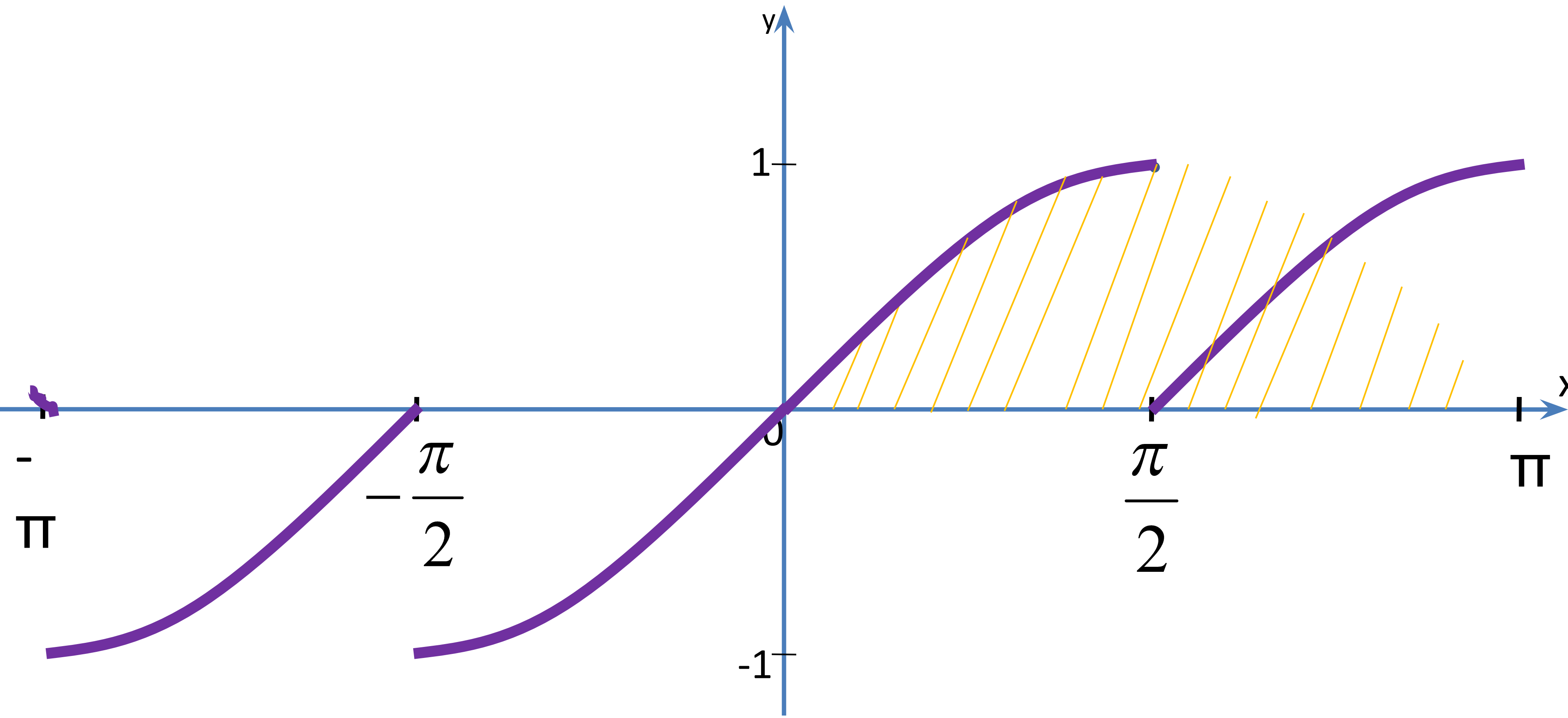
**F(x) – одна из первообразных для f(x)**

# Вычисление площадей

$$\int_1^3 2x\,dx = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

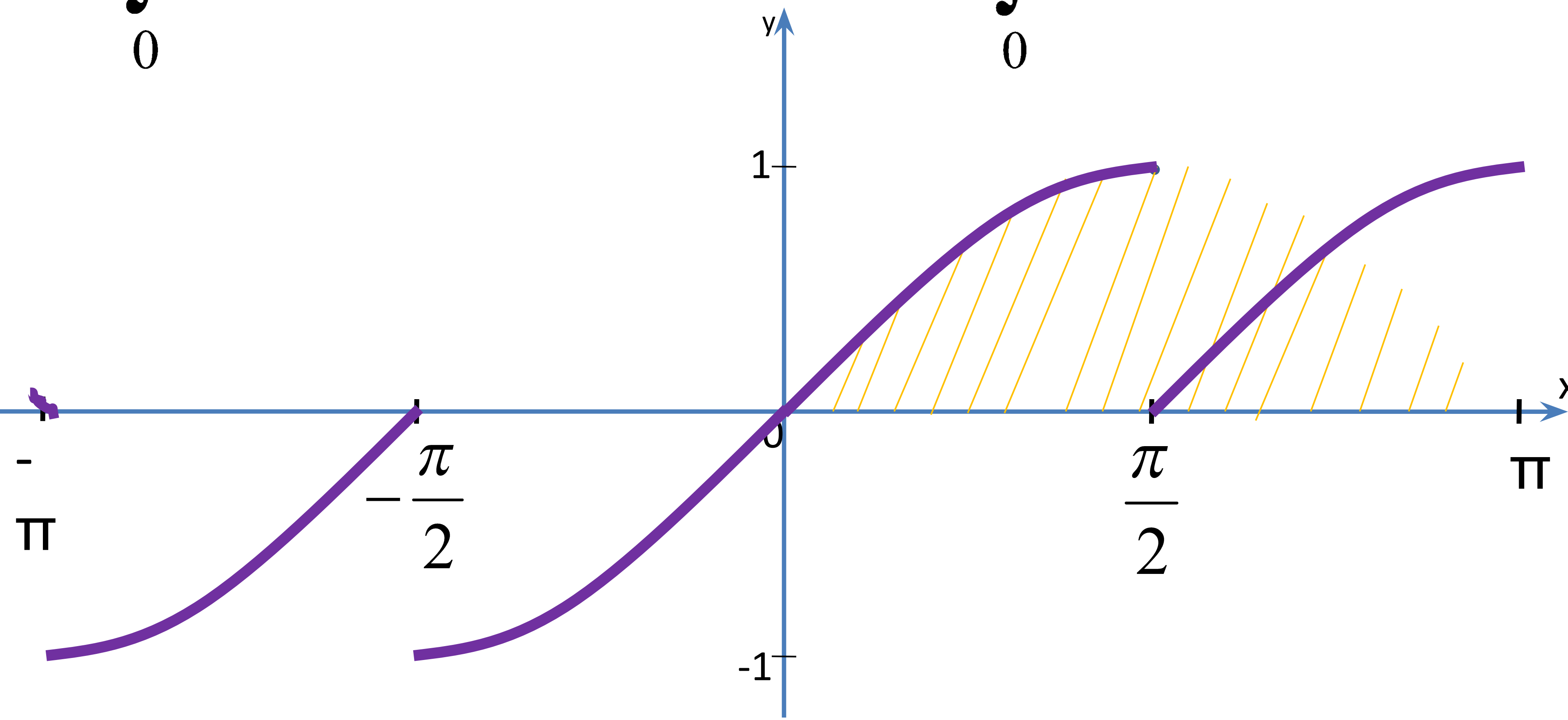


$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$



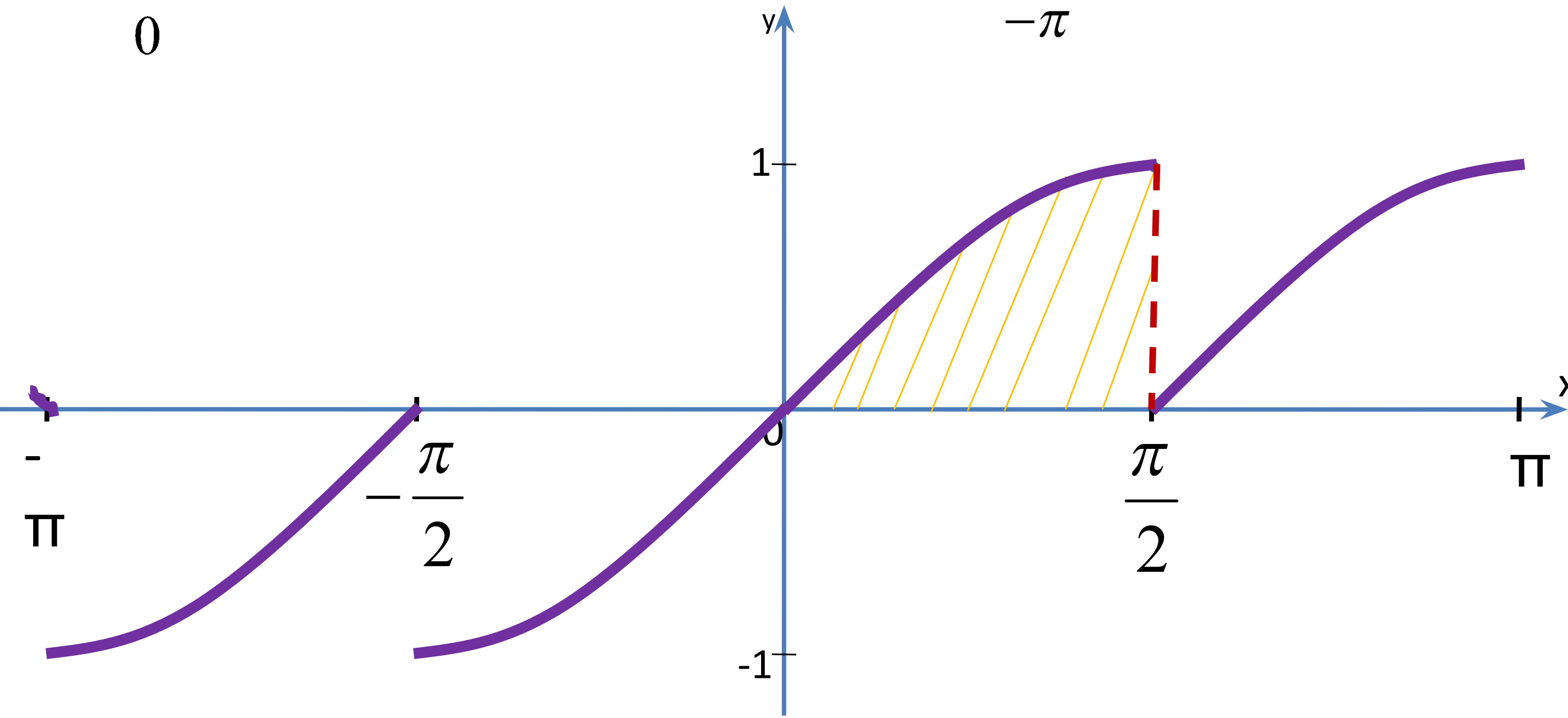
$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - ?$$

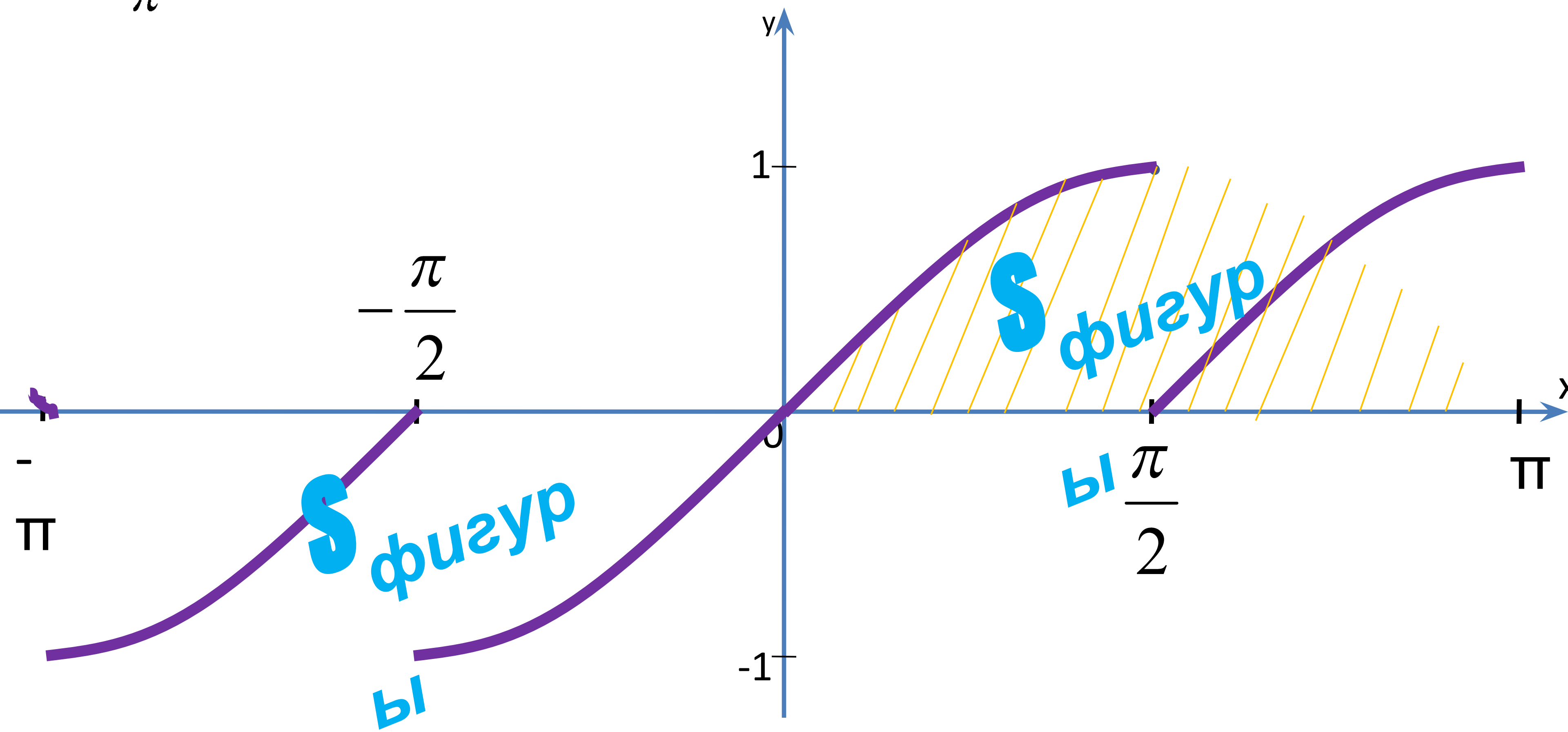


$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

$$\int_{-\pi}^{0} \sin x dx - ?$$

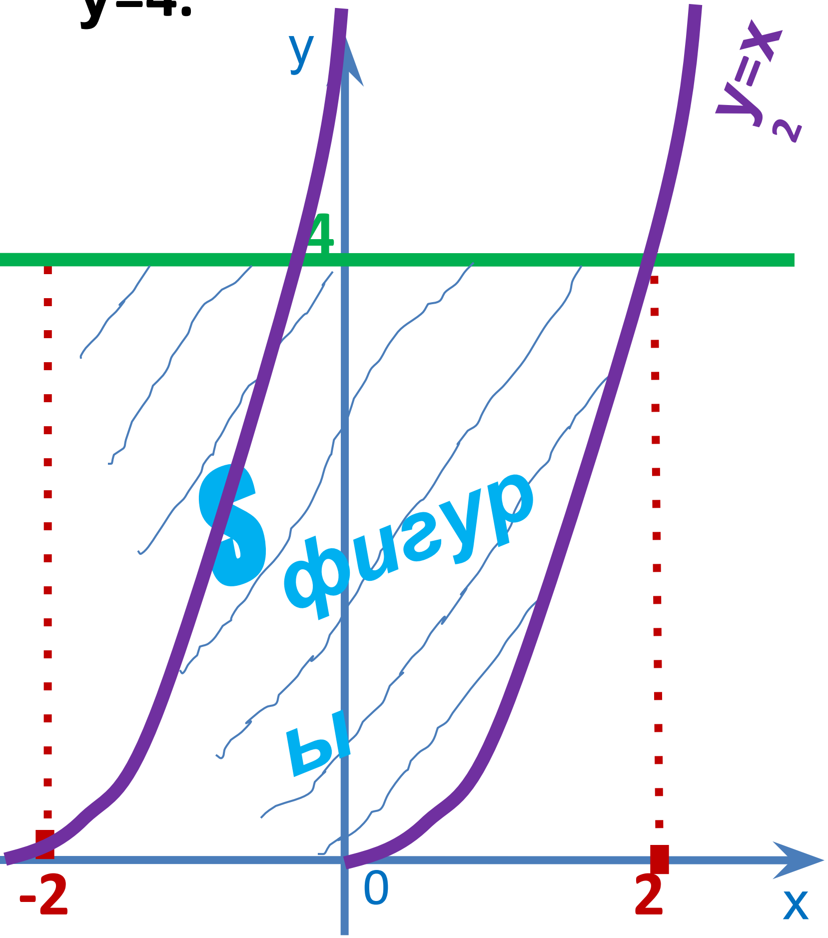


$$\int_{-\pi}^{0} \sin x dx = -S_{\phi} = -2$$



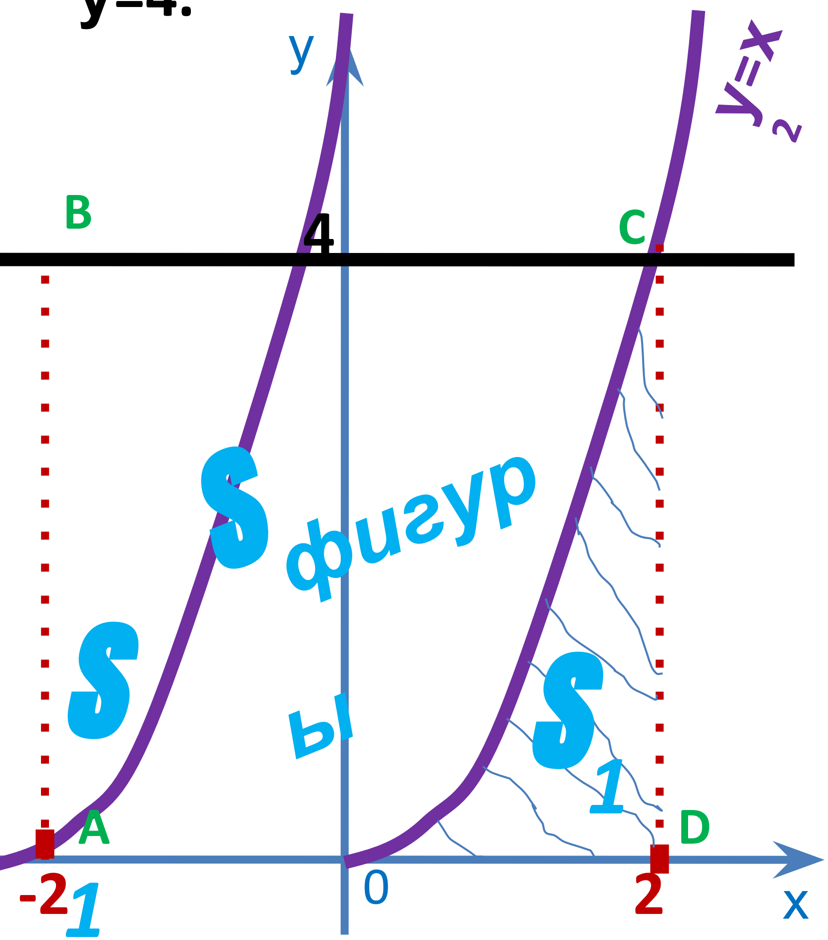
# Задача 1

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=4$.**



# Задача 1

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=4$.**

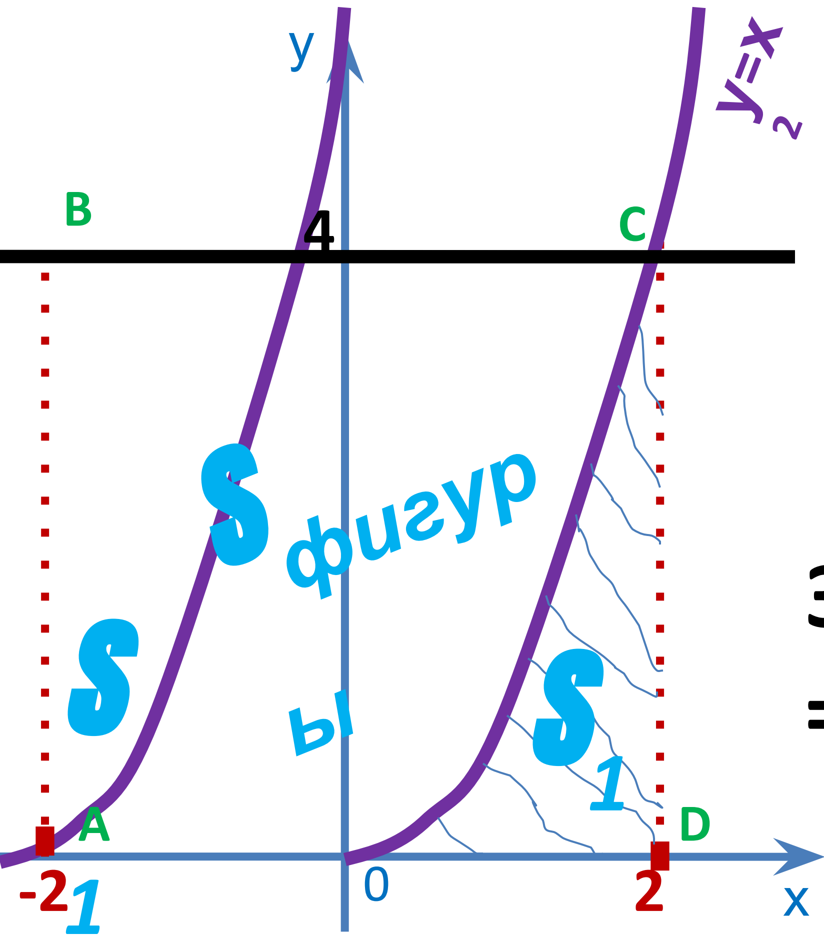



**Первый способ**

$$S_{ф} = S_{ABCD} - 2S_1 =$$

$$= S_{ABCD} - 2\int_0^2 x^2\,dx$$

$$S_ф = S_{ABCD} - 2\int_0^2 x^2 dx$$



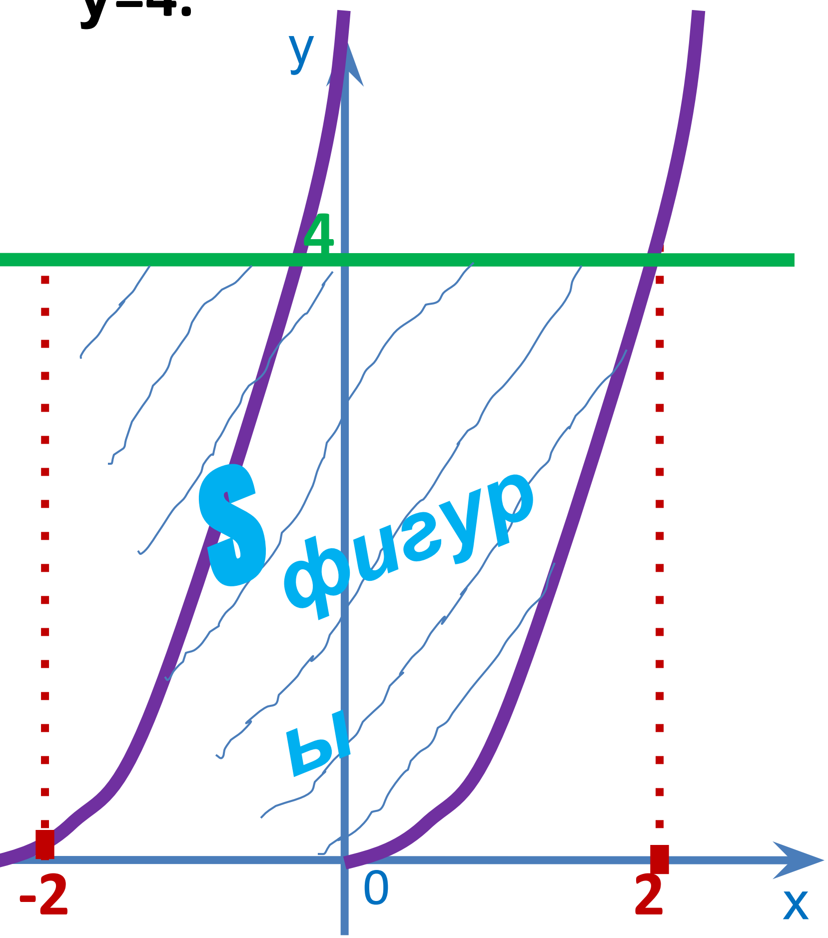

1) $S_{ABCD} = 4^2 = 16$

2) $\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{1}{3}2^3 - 0 = \frac{8}{3}$

3) $S_Ф = 16 - 2\cdot\frac{8}{3} = 16 - 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$

# Задача 1

**Найти площадь фигуры,ограниченной линиями $y=x^2$ и y=4.**




## Второй способ

***Замечаем, что график y=4 выше графика $y=x^2$ на [-2;2]***

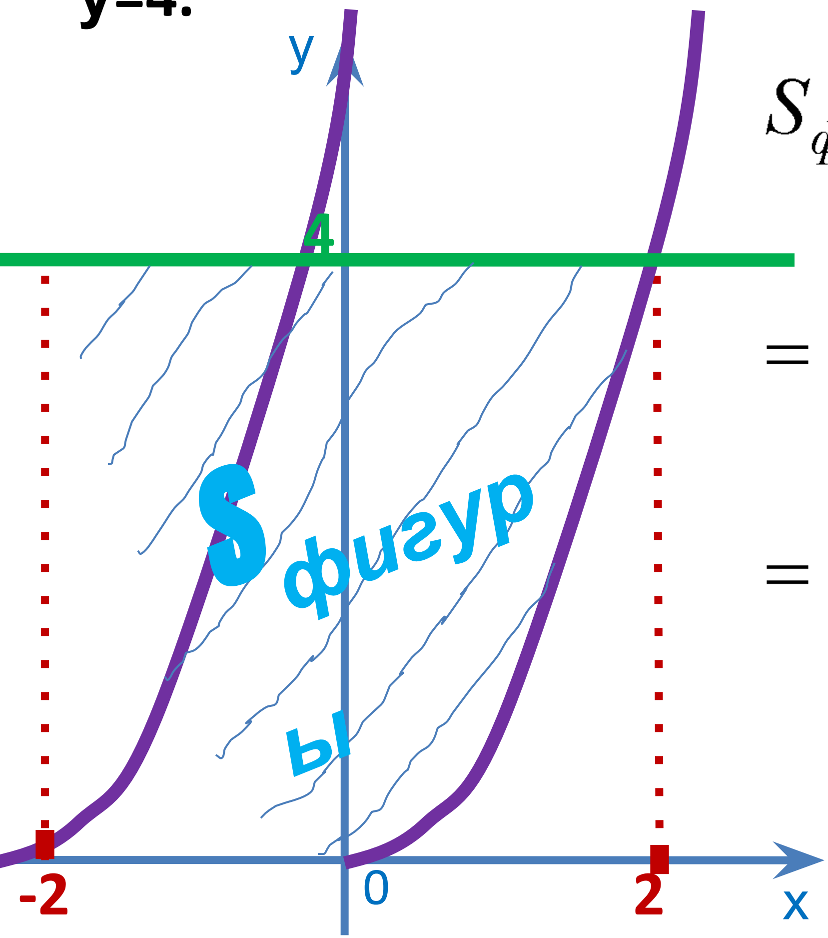
*(кроме точек пересечения).*

**Тогда:**

$$S_{\phi} = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx$$

# Задача 1

**Найти площадь фигуры,ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=4$.**




$$S_{\phi} = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = (4x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-2}^{2} =$$

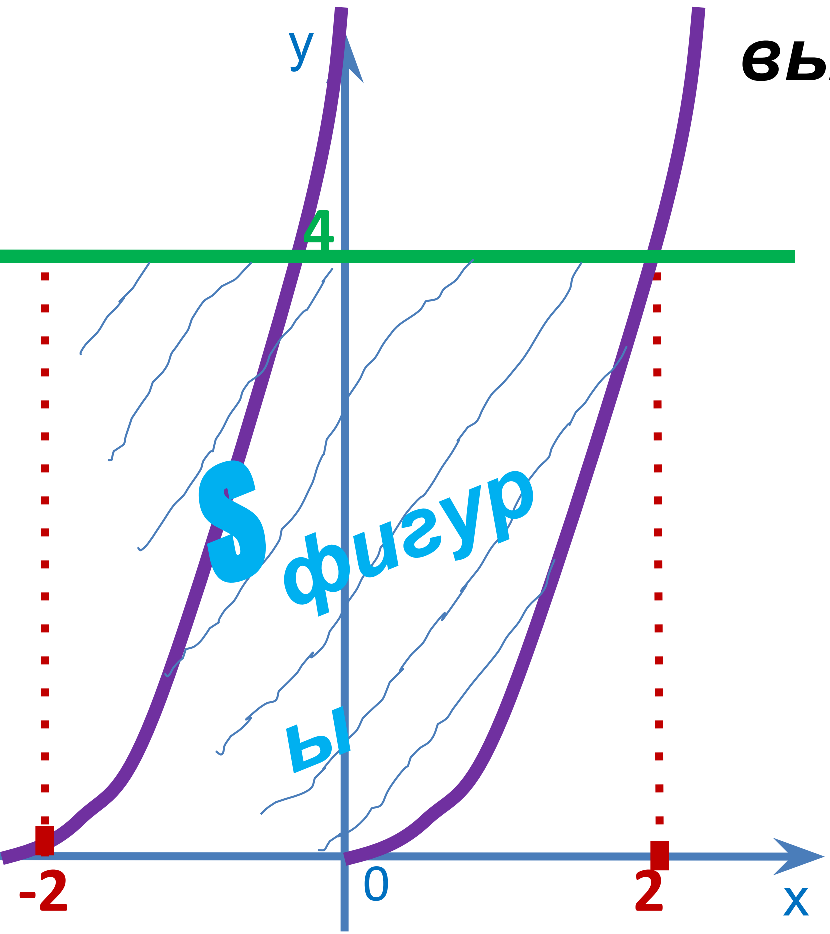
$$= 8-\frac{8}{3}-(-8-(-\frac{8}{3})) =$$

$$= 8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3} = 16-\frac{16}{3} = 10\frac{2}{3}$$

# Задача 1

**Второй способ**

***Более простые вычисления:***




$$S_{ф} = 2\int_0^2 (4 - x^2)dx$$

$$\int_0^2 (4 - x^2)dx = (4x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2 =$$

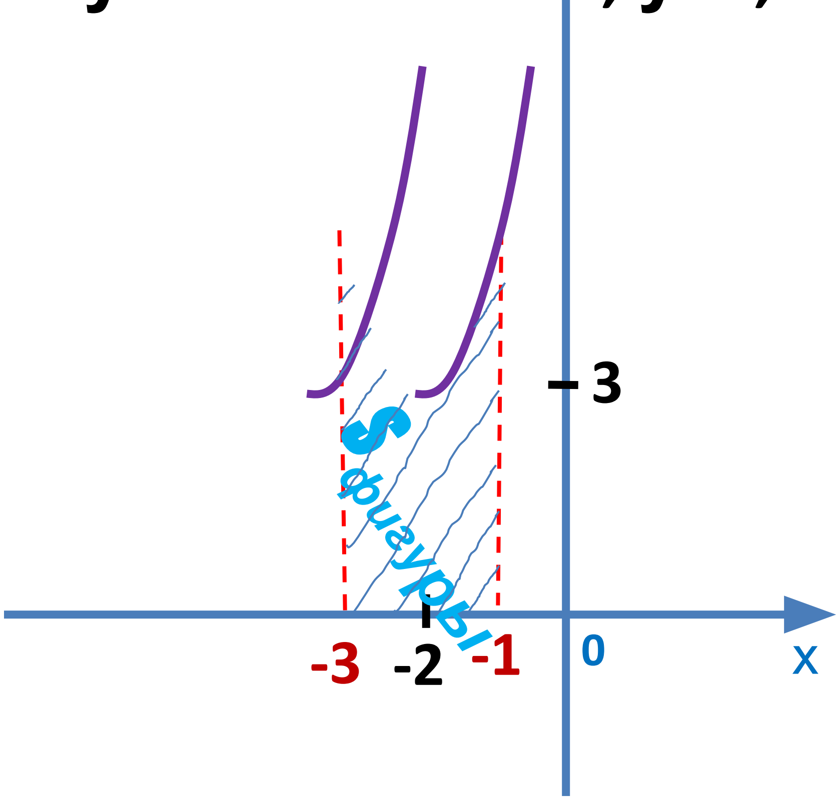
$$= 8 - \frac{8}{3} - 0 = 8 - 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$$

$$S_{ф} = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$

# Задача 2

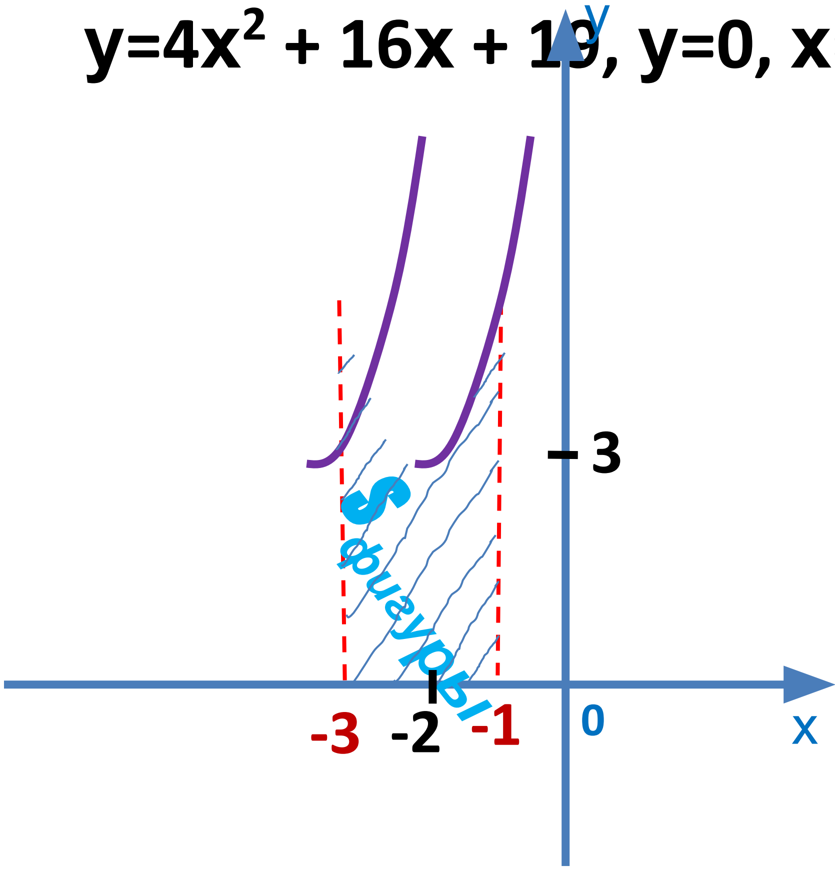
**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**

**$y=4x^2 + 16x + 19$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$.**



# Задача 2

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**
**$y=4x^2 + 16x + 19$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$.**




## Первый способ

$$S_{\phi} = \int_{-3}^{-1} (4x^2 + 16x + 19)\,dx$$

# Задача 2

$$S_{\phi} = \int_{-3}^{-1} (4x^2 + 16x + 19)dx = (\frac{4}{3}x^3 + 8x^2 + 19x)\Big|_{-3}^{-1} =$$

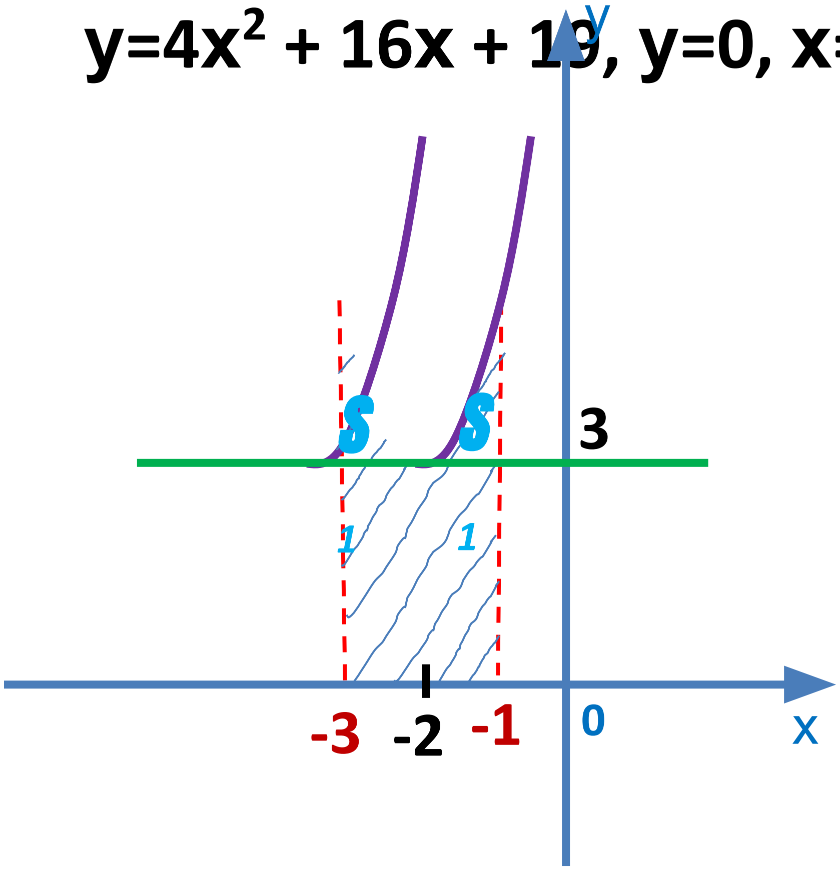
$$= -\frac{4}{3} + 8 - 19 - (\frac{4\cdot(-27)}{3} + 72 - 57) = -\frac{4}{3} - 11 + 36 - 15 =$$

$$= 8\frac{2}{3}$$

# Задача 2

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**

**$y=4x^2+16x+19$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$.**



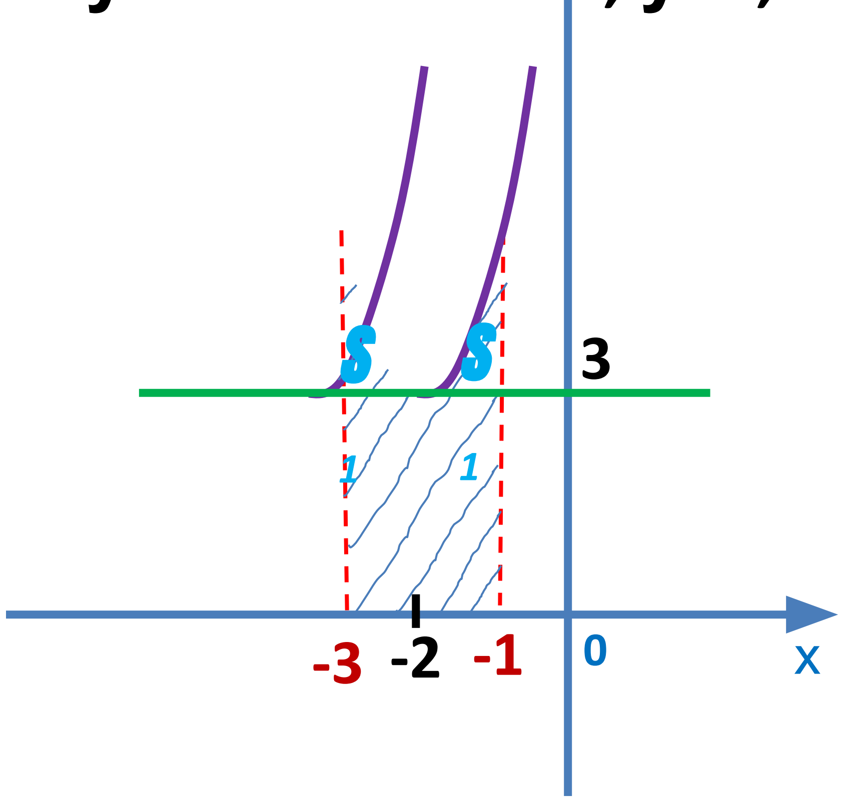

**<u>Второй способ</u>**

$$S_{ф} = S_{прямоуг.} + 2S_1$$

# Задача 2

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**

**$y=4x^2+16x+19$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$.**




**<u>Второй способ</u>**

$$S_ф = S_{прямоуг.} + 2S_1$$

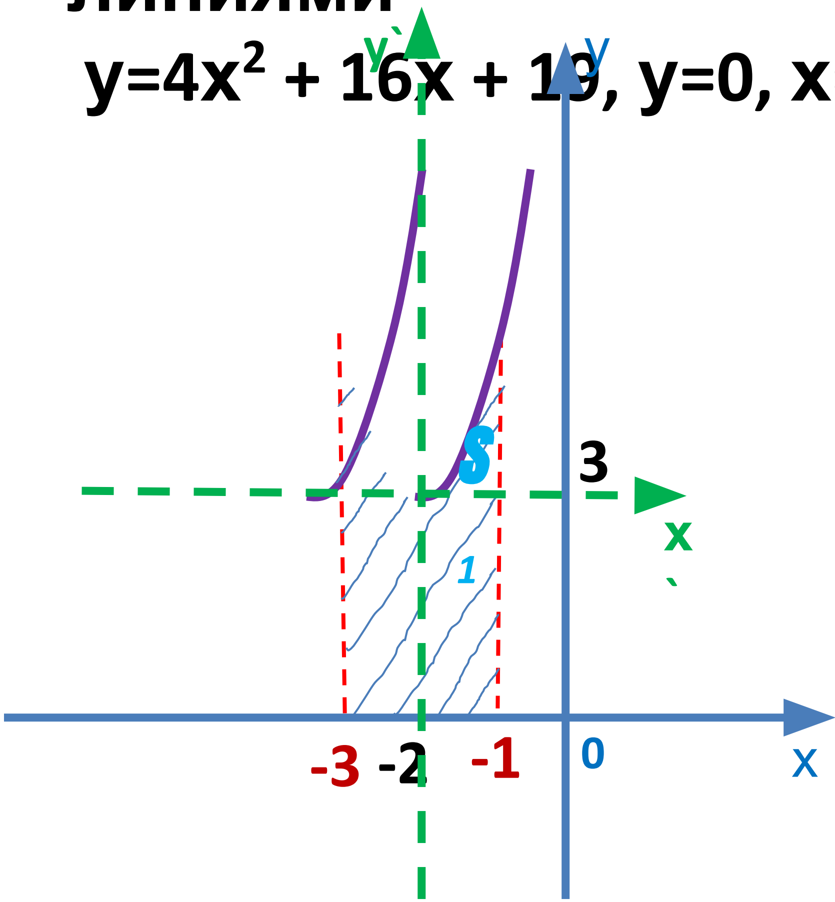
$$S_{прямоуг.} = 6$$

$$S_1 \text{ - ?}$$

# Задача 2

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**

**$y=4x^2 + 16x + 19$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$.**




**<u>Второй способ</u>**

**$S_ф = S_{прямоуг.} + 2S_1$**

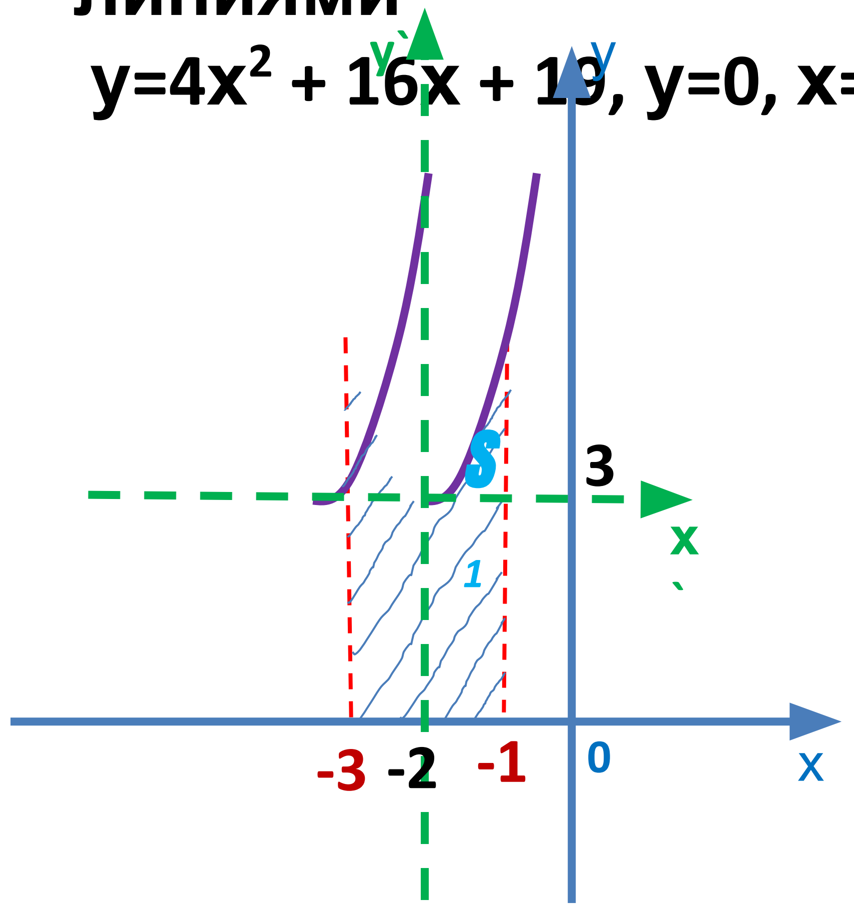
**$S_{прямоуг.} = 6$**

**$S_1$ - ?**

# Задача 2

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**

**$y=4x^2+16x+19$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$.**




## Второй способ

$$S_ф = S_{прямоуг.} + 2S_1$$

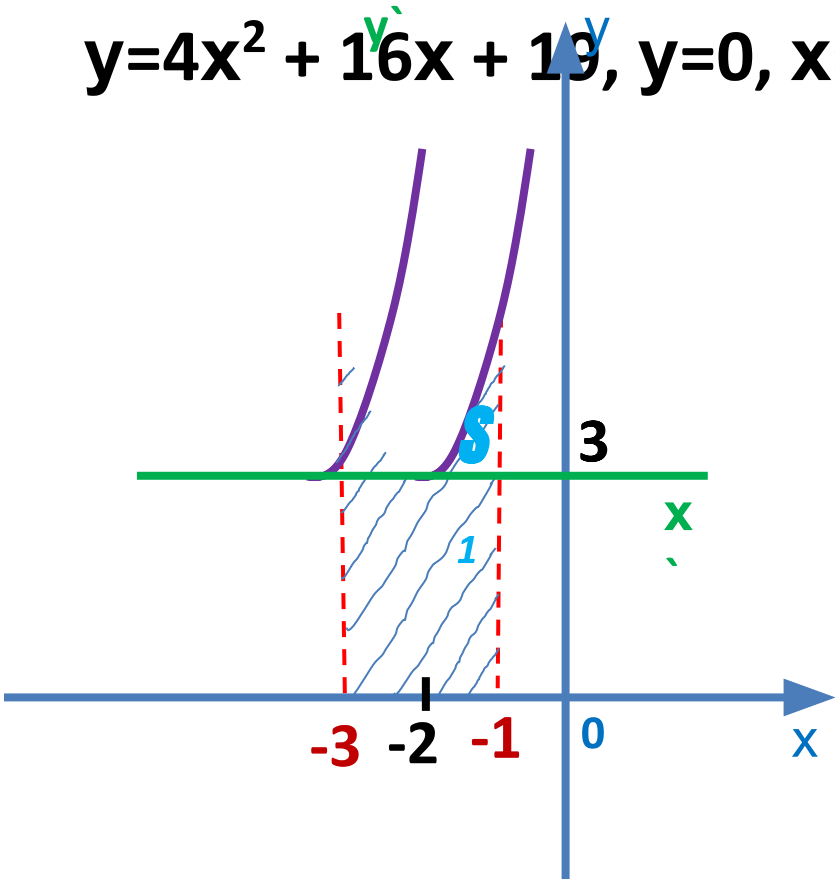
$$S_{прямоуг.} = 6$$

$$S_1 = \int_0^1 4x^2\,dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

# Задача 2

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**

**$y=4x^2 + 16x + 19$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$.**




**<u>Второй способ</u>**

**$S_ф = S_{прямоуг.} + 2S_1$**

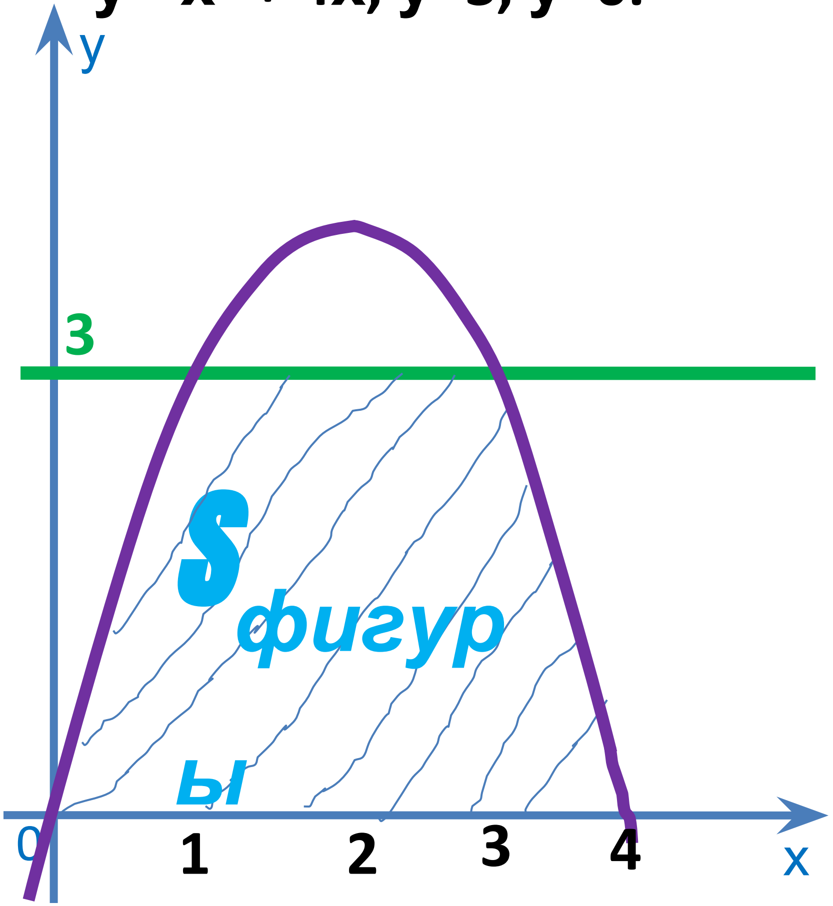
**$S_{прямоуг.} = 6$**

$$S_1 = \int_0^1 4x^2dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$S_ф = 6 + 2\cdot\frac{4}{3} = 8\frac{2}{3}$$

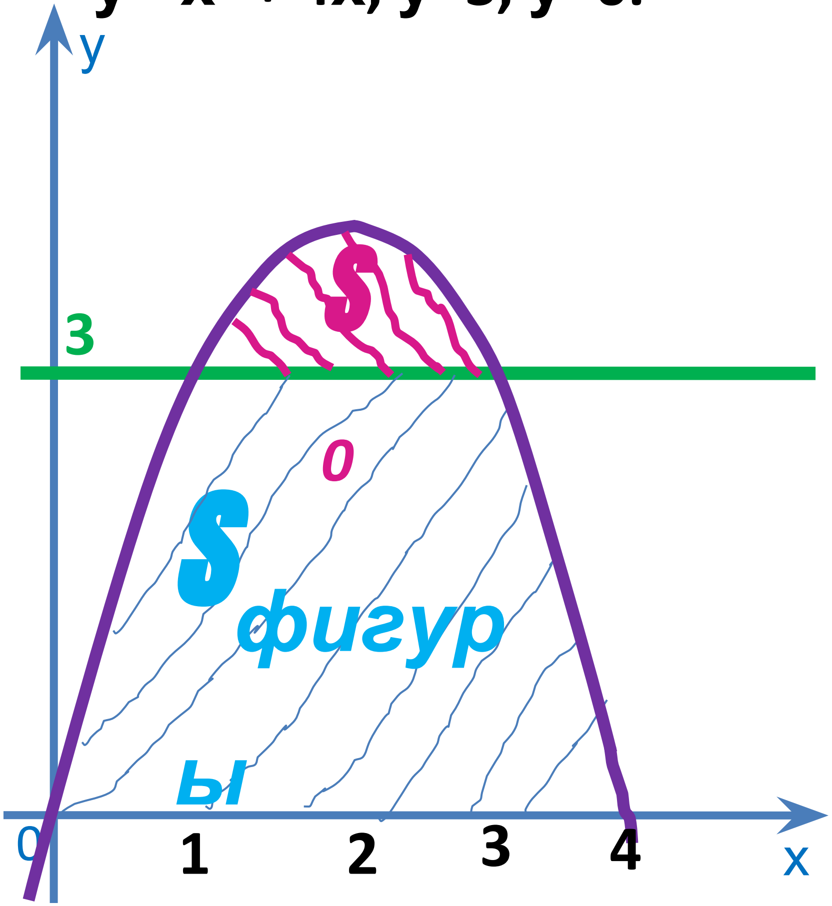
# Задача 3

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**
**$y=-x^2 + 4x$, $y=3$, $y=0$.**



# Задача 3

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**
**$y=-x^2+4x$, $y=3$, $y=0$.**

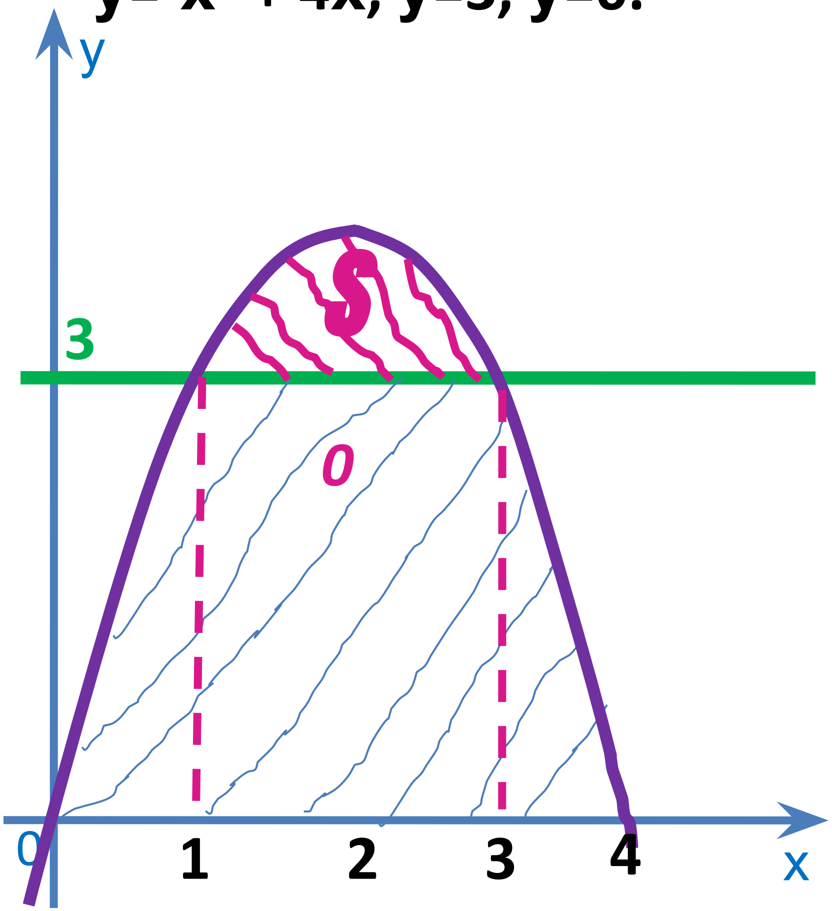



## <u>Первый способ</u>

$$S_{ф} = \int_0^4 (-x^2+4x)dx - S_0$$

# Задача 3

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**
**$y=-x^2+4x$, $y=3$, $y=0$.**




**<u>Первый способ</u>**

$$S_{ф} = \int_0^4 (-x^2+4x)dx - S_0$$

$$S_0 = \int_1^3 (-x^2+4x-3)dx$$

# Задача 3

$$\int_0^4 (-x^2+4x)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_0^4 = 10\frac{2}{3}$$

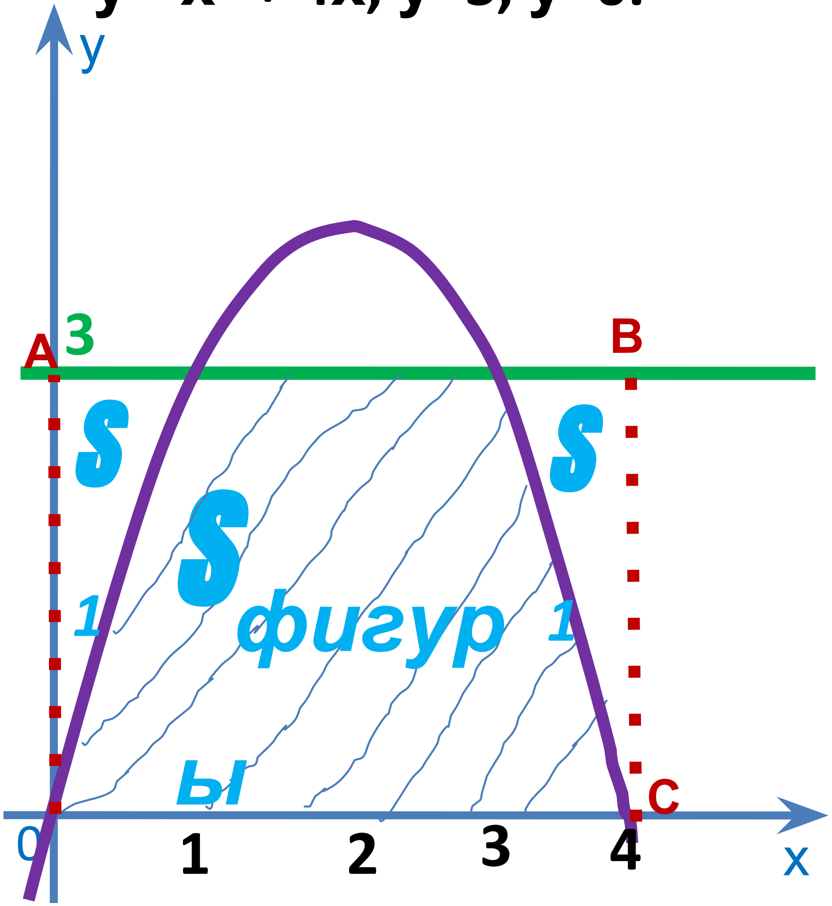
$$S_0 = \int_1^3 (-x^2+4x-3)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= -\frac{27}{3}+18-9-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right) = \frac{4}{3}$$

$$S_\phi = 10\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} = 9\frac{1}{3}$$

# Задача 3

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**
**$y=-x^2+4x$, $y=3$, $y=0$.**




## Второй способ

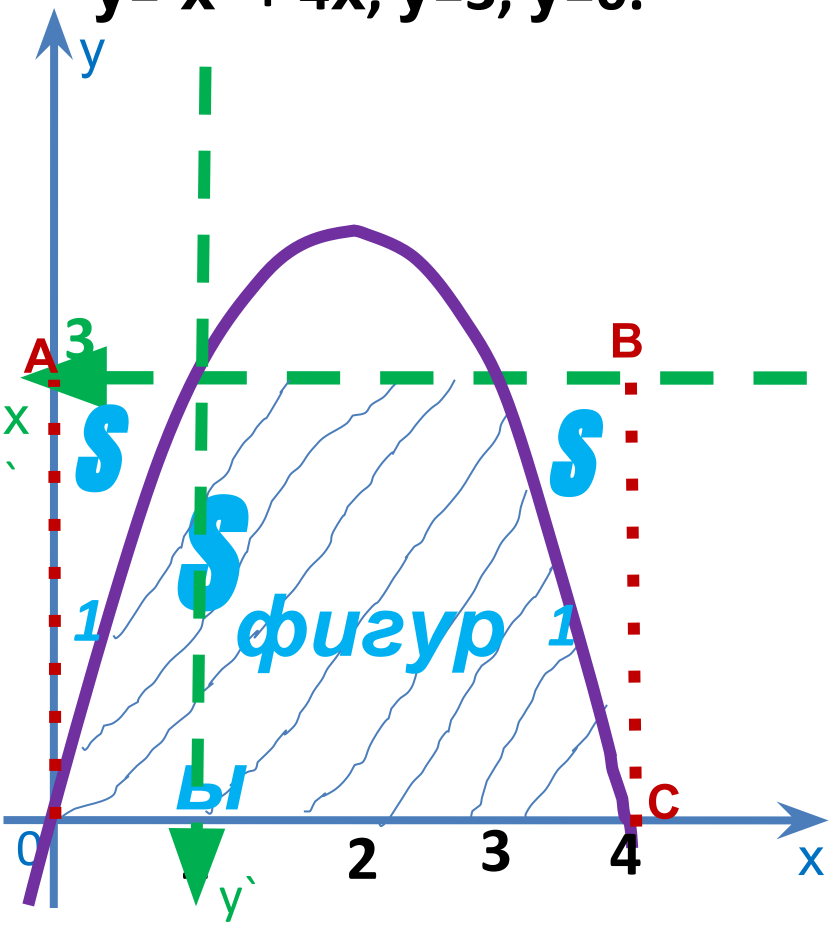
$$S_ф = S_{OABC} - 2S_1$$

$$S_{OABC} = 12$$

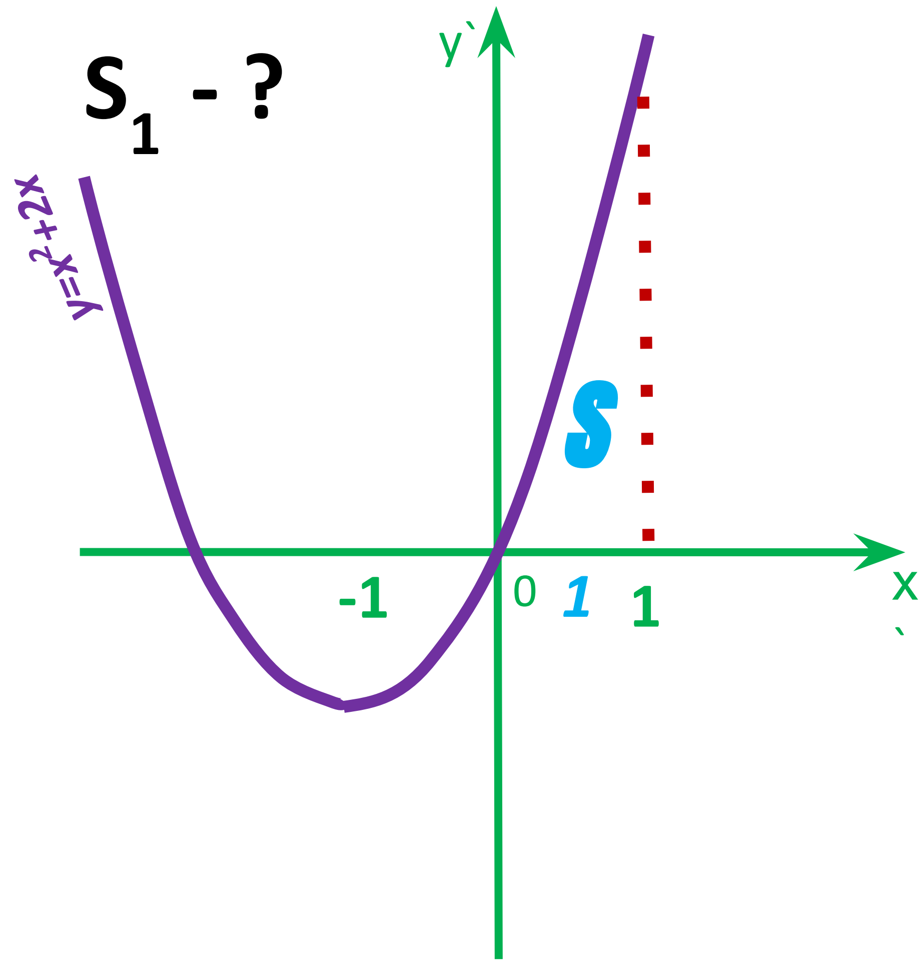
$S_1$ - ?

# Задача 3

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**
**$y=-x^2+4x$, $y=3$, $y=0$.**

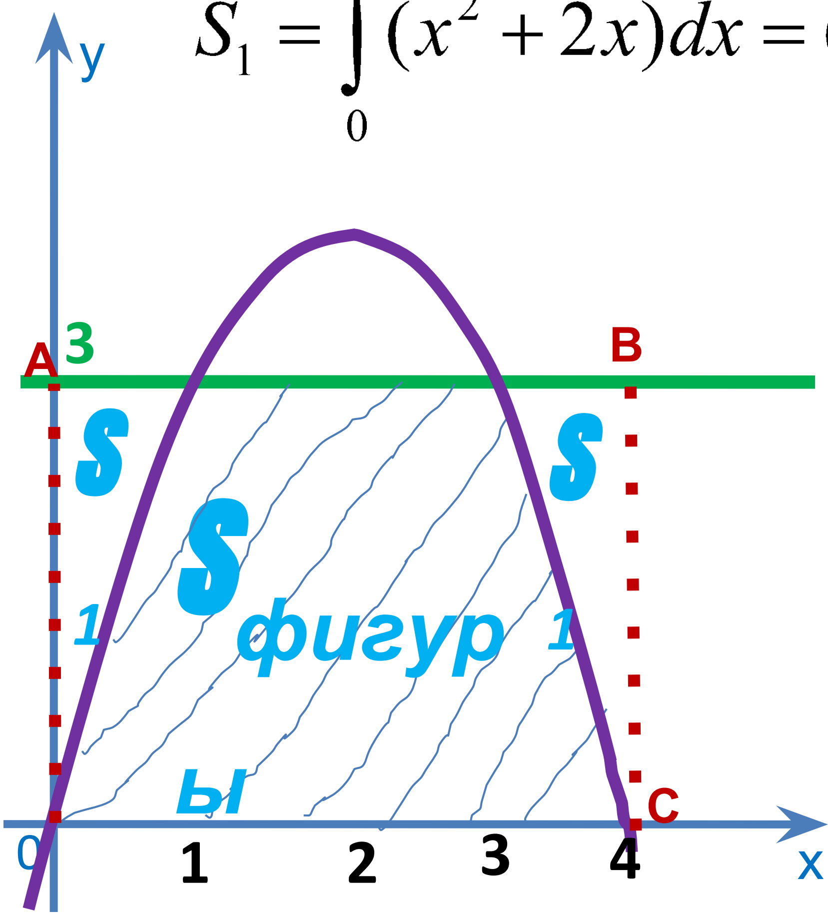


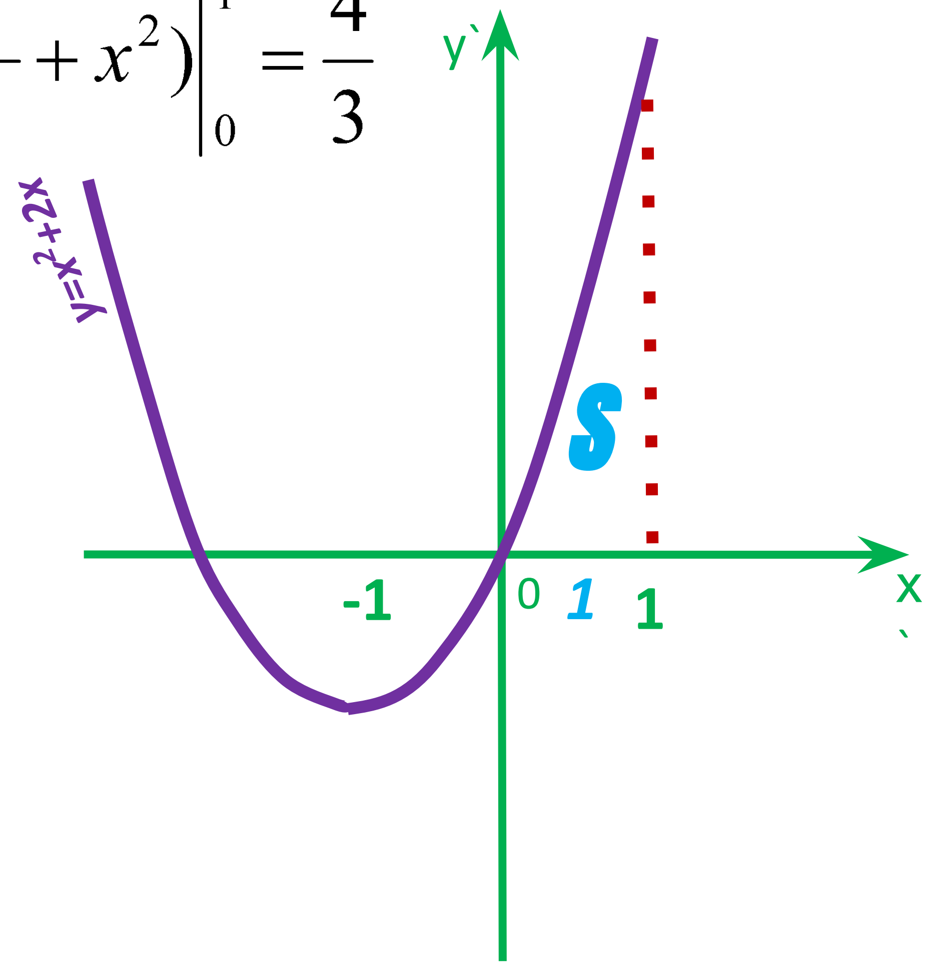

**$S_1$ - ?**



# Задача 3

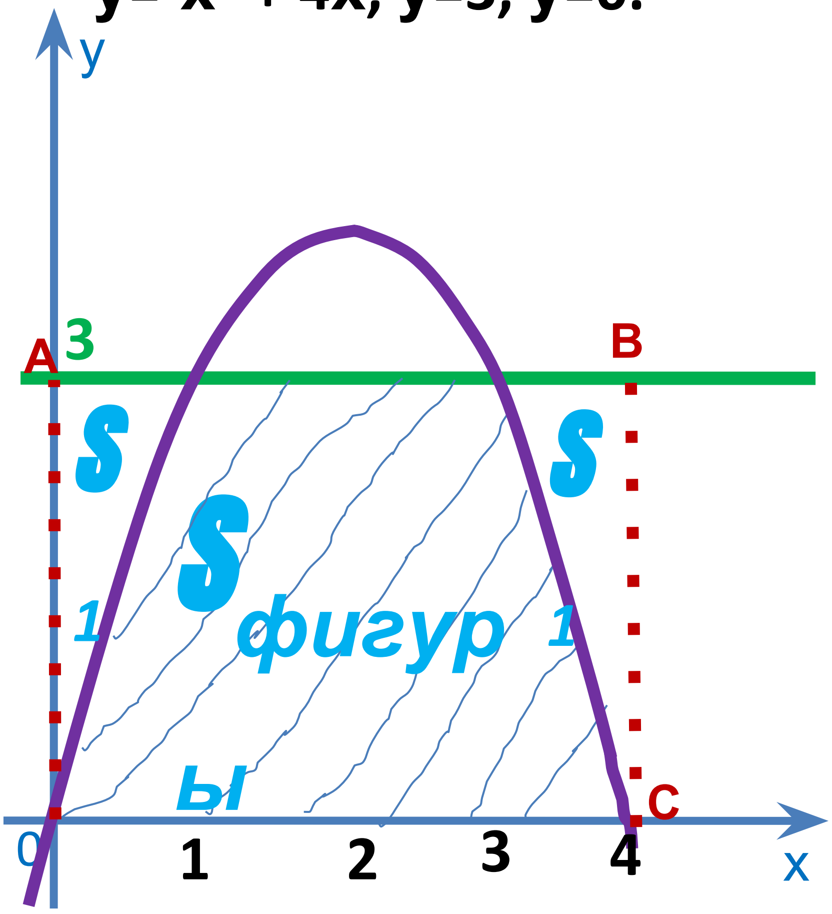
$$S_1 = \int_0^1 (x^2 + 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}$$



# Задача 3

**Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**
**$y=-x^2 + 4x$, $y=3$, $y=0$.**




**Второй способ**

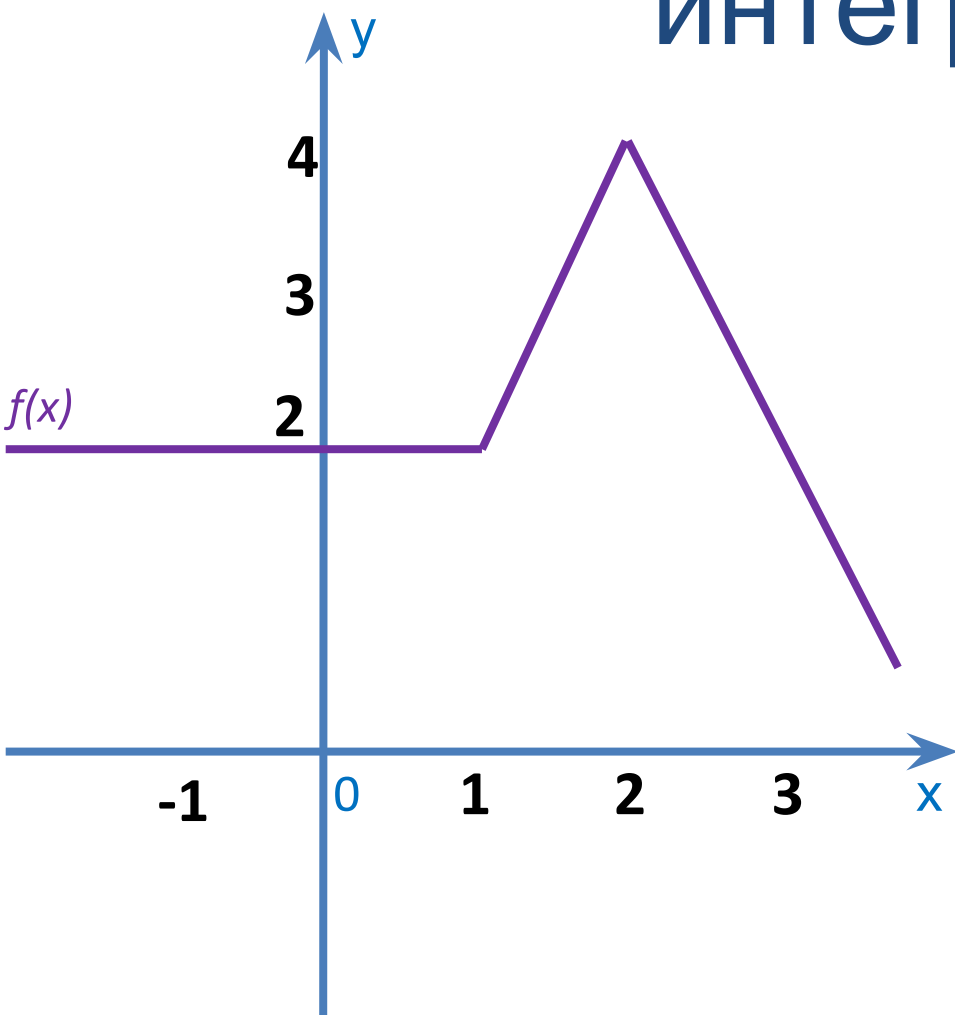
$S_ф = S_{OABC} - 2S_1$

$S_{OABC} = 12$

$$S_1 = \frac{4}{3}$$

$$S_ф = 12 - \frac{8}{3} = 9\frac{1}{3}$$

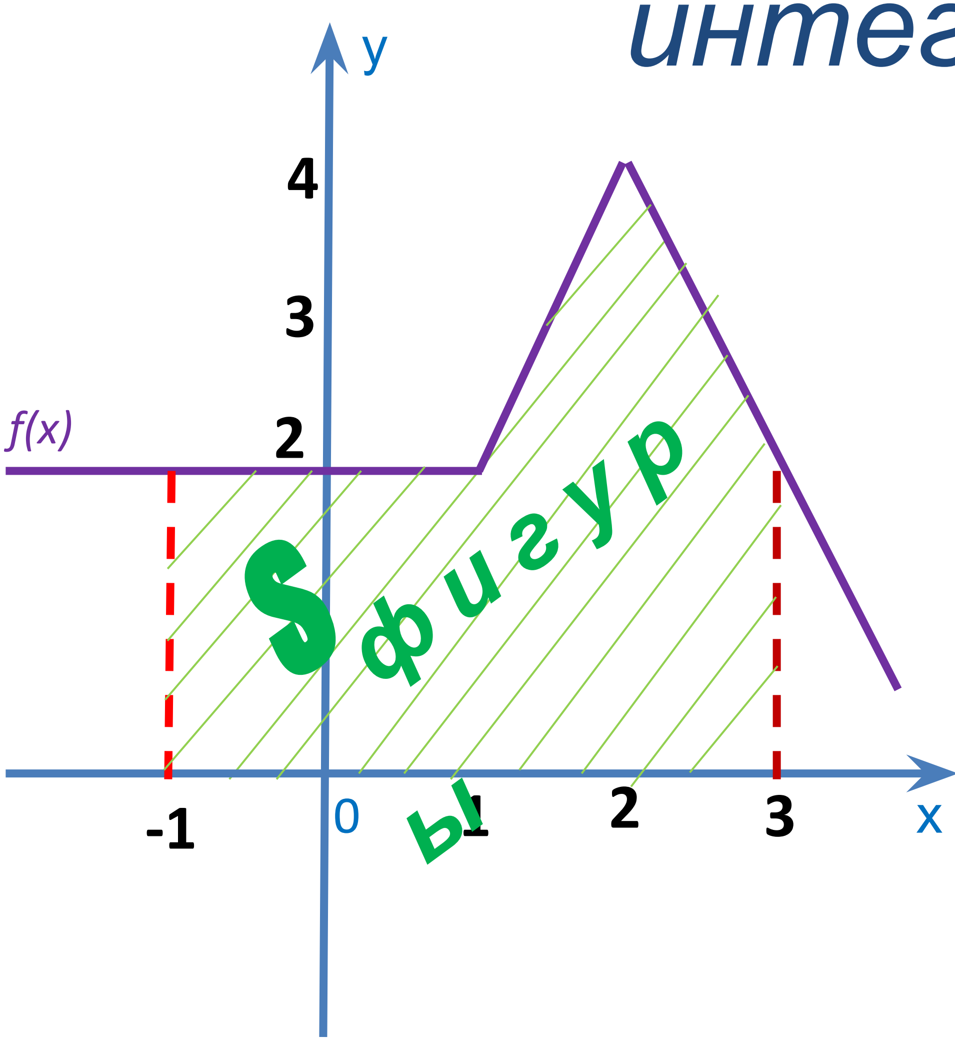
# Использование площадей для вычисления определенного интеграла




**1) На рисунке дан график функции *f(x)*.**
**Найдите значение**

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx$$

# Использование площадей для вычисления определенного интеграла



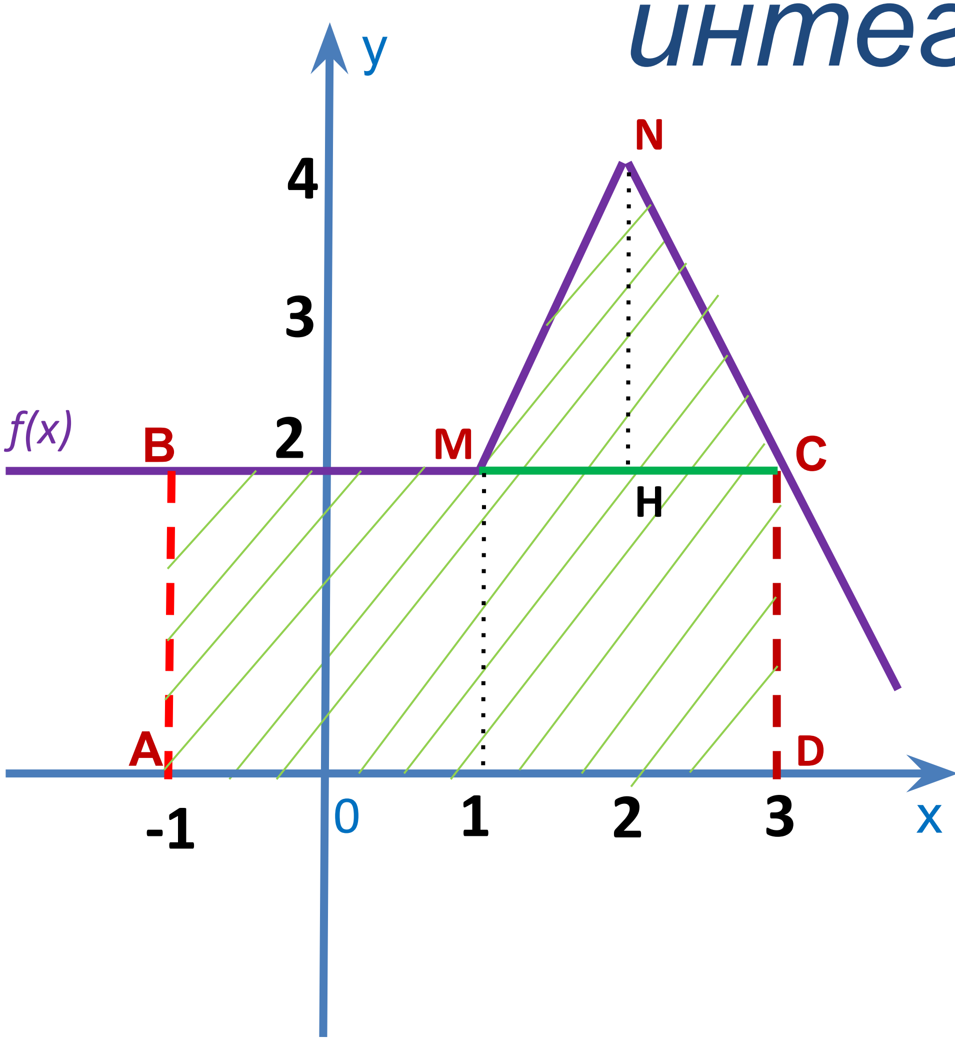

**1) На рисунке дан график функции *f(x)*.**

**Найдите значение**

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx$$

$$S_{ф} = \int_{-1}^{3} f(x)dx$$

# Использование площадей для вычисления определенного интеграла

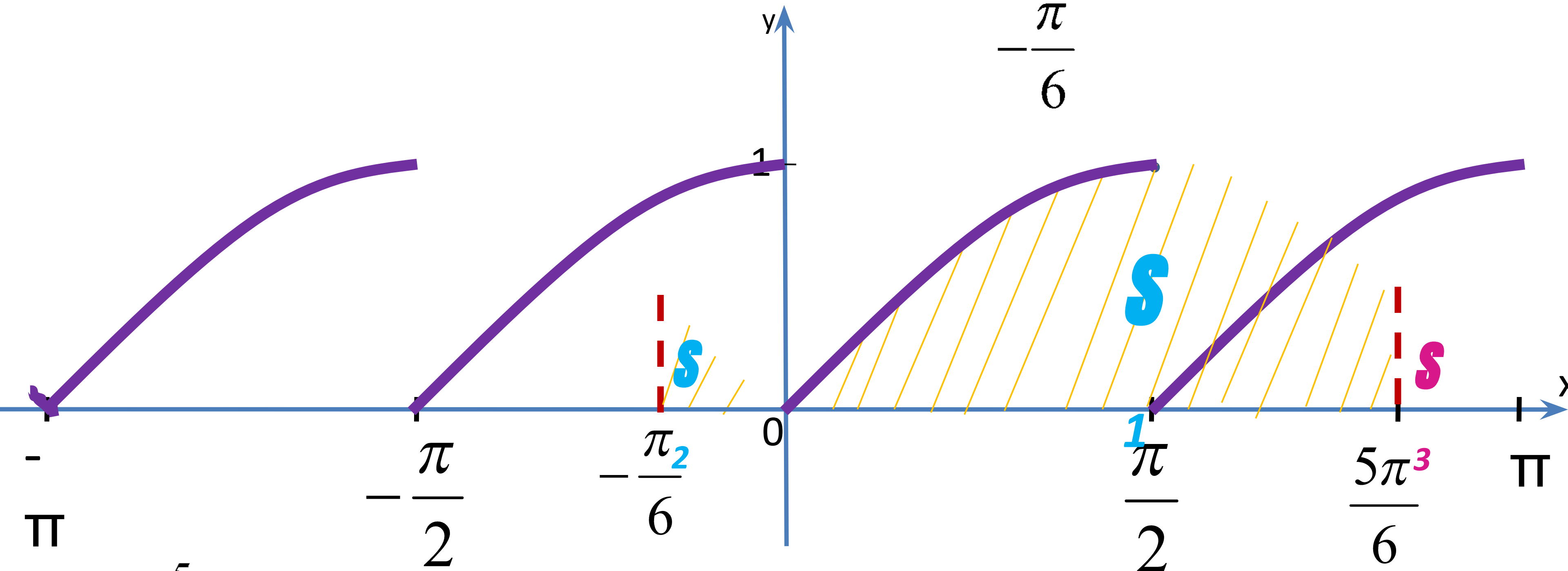



$S_ф = S_{ABCD} + S_{MNC} =$

$= 8 + 2 = 10$

$$Значит,\quad \int_{-1}^{3} f(x)dx = 10$$

$$2)\quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} |\sin x|\, dx - ?$$




$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} |\sin x|\, dx = S_1 + S_2 = S_1 + S_3 = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$$

# Использование площадей для вычисления определенного интеграла

$$3)\quad \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx - ?$$

**Пуст** $y=\sqrt{4-x^2}$

**Тогда $y^2 = 4 - x^2$, причем $y \geq 0$.**

**Получаем: $x^2 + y^2 = 4$ – это окружность с центром (0; 0) и радиусом 2. Но $y \geq 0$!**

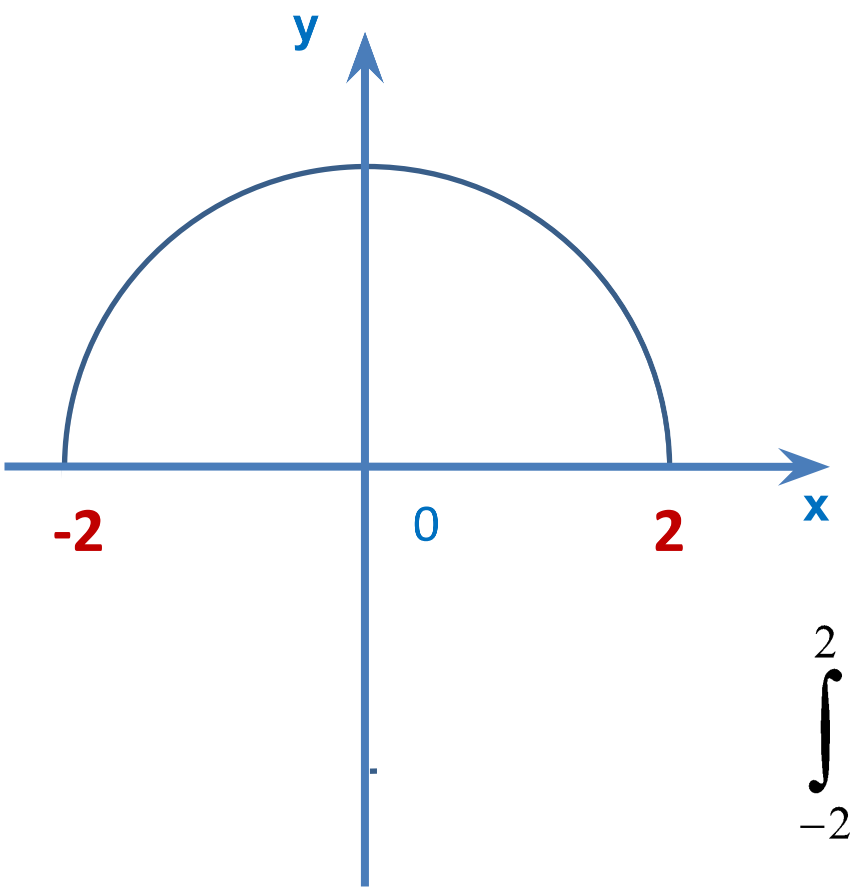
***Значит, берем только ту часть окружности,***

***которая выше оси Ох, т.е. полуокружность.***

*Нам нужно подсчитать площадь полукруга!*

# Использование площадей для вычисления определенного интеграла

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$$




$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = S_{ф} = \frac{1}{2} S_{кр.}$$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot 4\pi = \underline{2\pi}$$