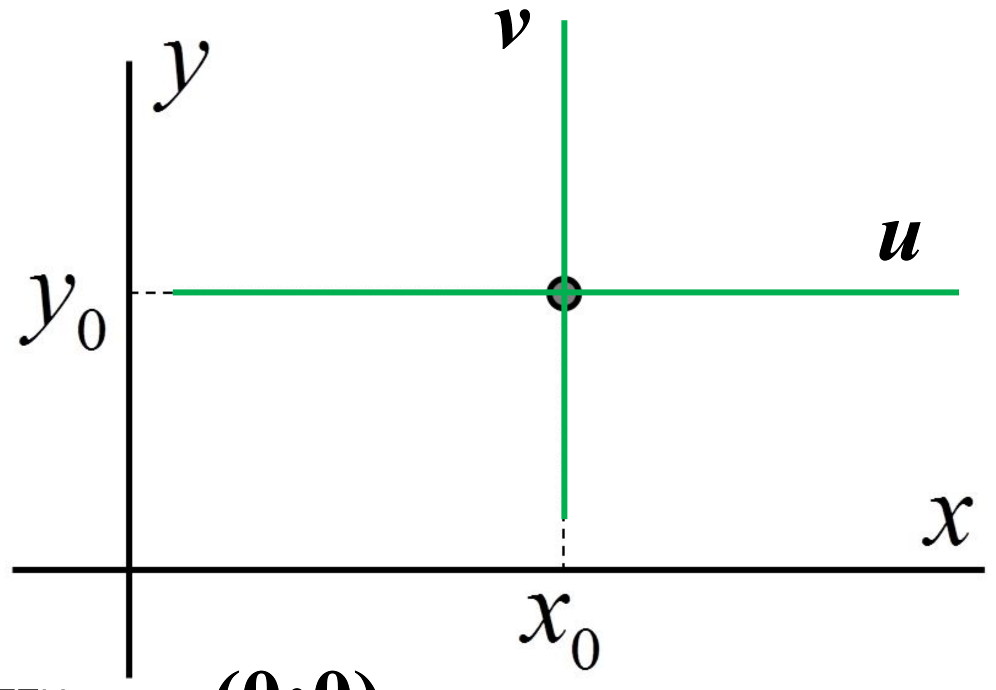
Исследование устойчивости методом Ляпунова

Двумерный случай

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y); \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = const; \\ y = const. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$



«Точка неподвижности»

«Точка неподвижности» — (0;0)

Теорема Ляпунова об устойчивости

1) $L(0,0) = 0;$

2) $L(x,y) > 0, \quad x^2 + y^2 > 0;$

3) $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(L(x(t),y(t))\right) < 0$

при всех $x,\ y: \quad x^2 + y^2 > 0$

Нулевое решение (0;0) асимптотически устойчиво

Вычисление полной производной

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y); \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases}}$$

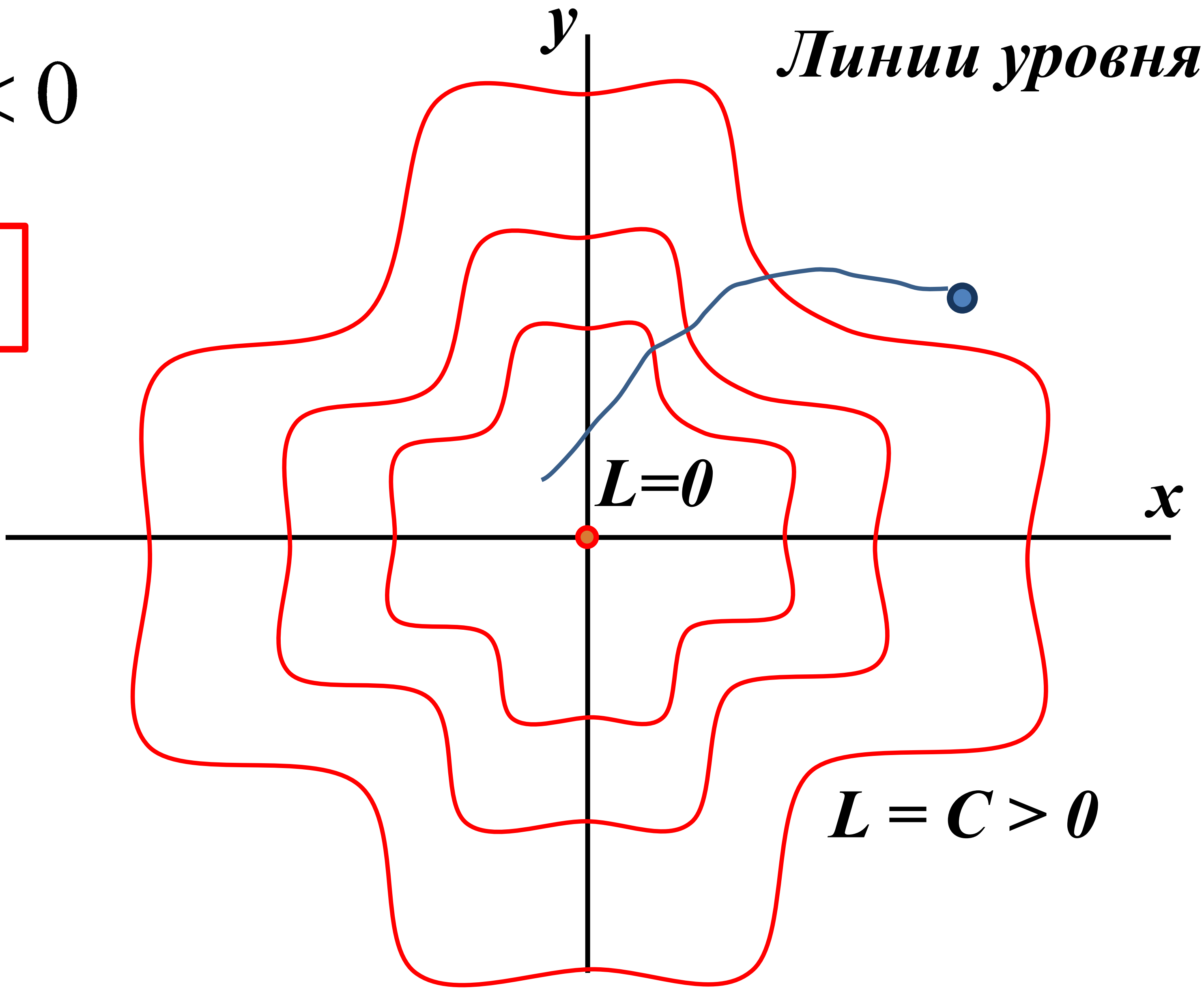
$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \dot{y} =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial x} \cdot f_1(x, y) + \frac{\partial L}{\partial y} \cdot f_2(x, y)$$

Геометрический смысл функции Ляпунова

$$\frac{dL}{dt} < 0$$

$\boxed{L\ }$



Пример применения теоремы Ляпунова

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y; \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

$$L(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2} > 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = y$$

$$\frac{dL}{dt} = x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y} =$$

$$= x \cdot \left(-x^3 - y\right) + y \cdot \left(x - y^3\right) =$$

$$= -x^4 - y^4 < 0$$

Теорема Ляпунова о неустойчивости

1) $V(0,0) = 0;$

2) $V(x,y) > 0,\ (x;y) \in D;$

3) $$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(V(x(t),y(t))) > 0$$

при всех $x,\ y:\quad x^2 + y^2 > 0$

Нулевое решение (0;0) неустойчиво

Пример применения теоремы Ляпунова

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y; \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$$

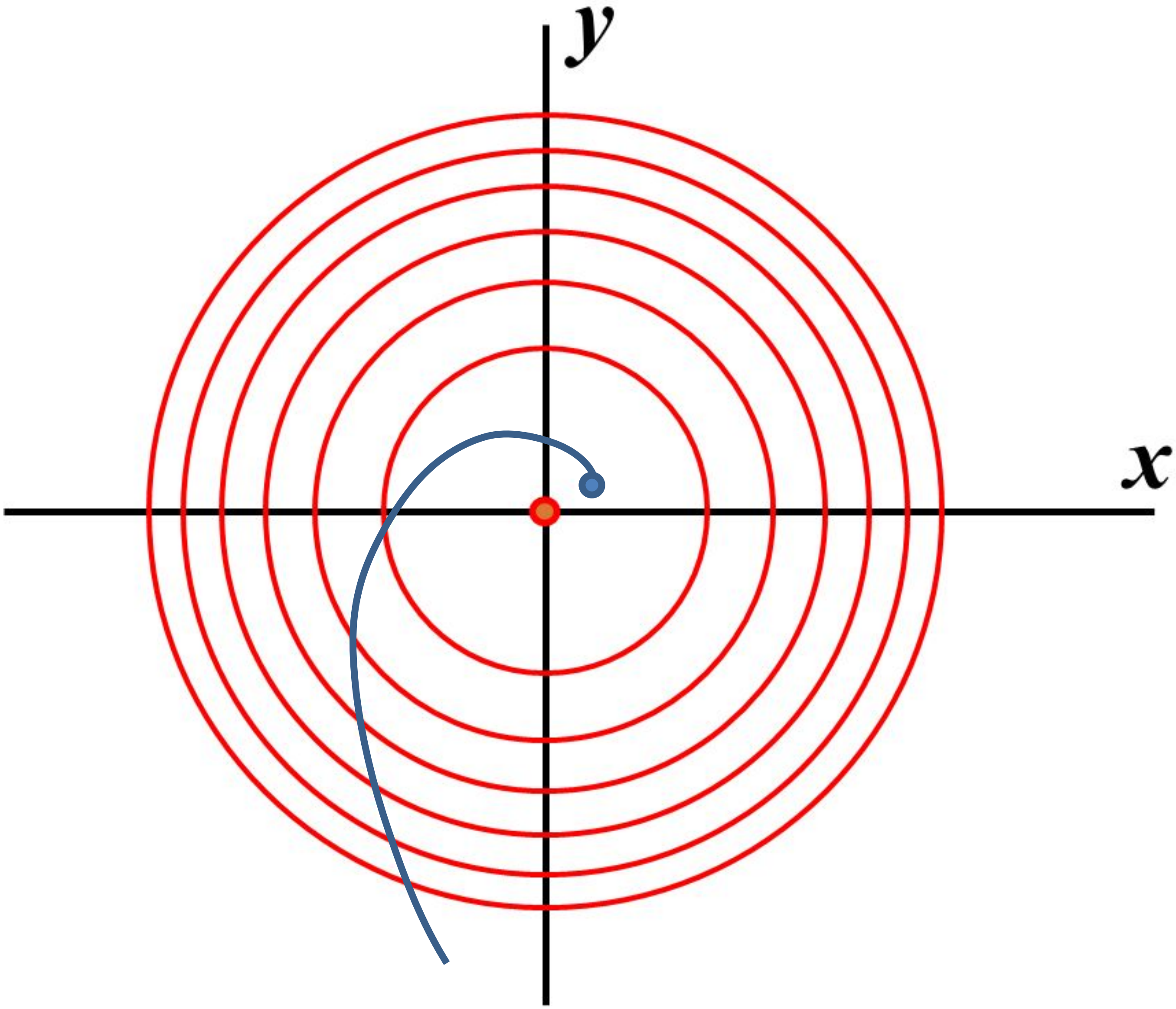
$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} > 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = y$$

$$\frac{dV}{dt} = x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y} =$$

$$= x \cdot \left(x^3 - y\right) + y \cdot \left(x + y^3\right) = x^4 + y^4 > 0$$

Геометрическая интерпретация



Недостаточность линейного приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y; \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

У

стационарная точка (0;0)

Н

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y; \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -3x^2 & -1 \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

Матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

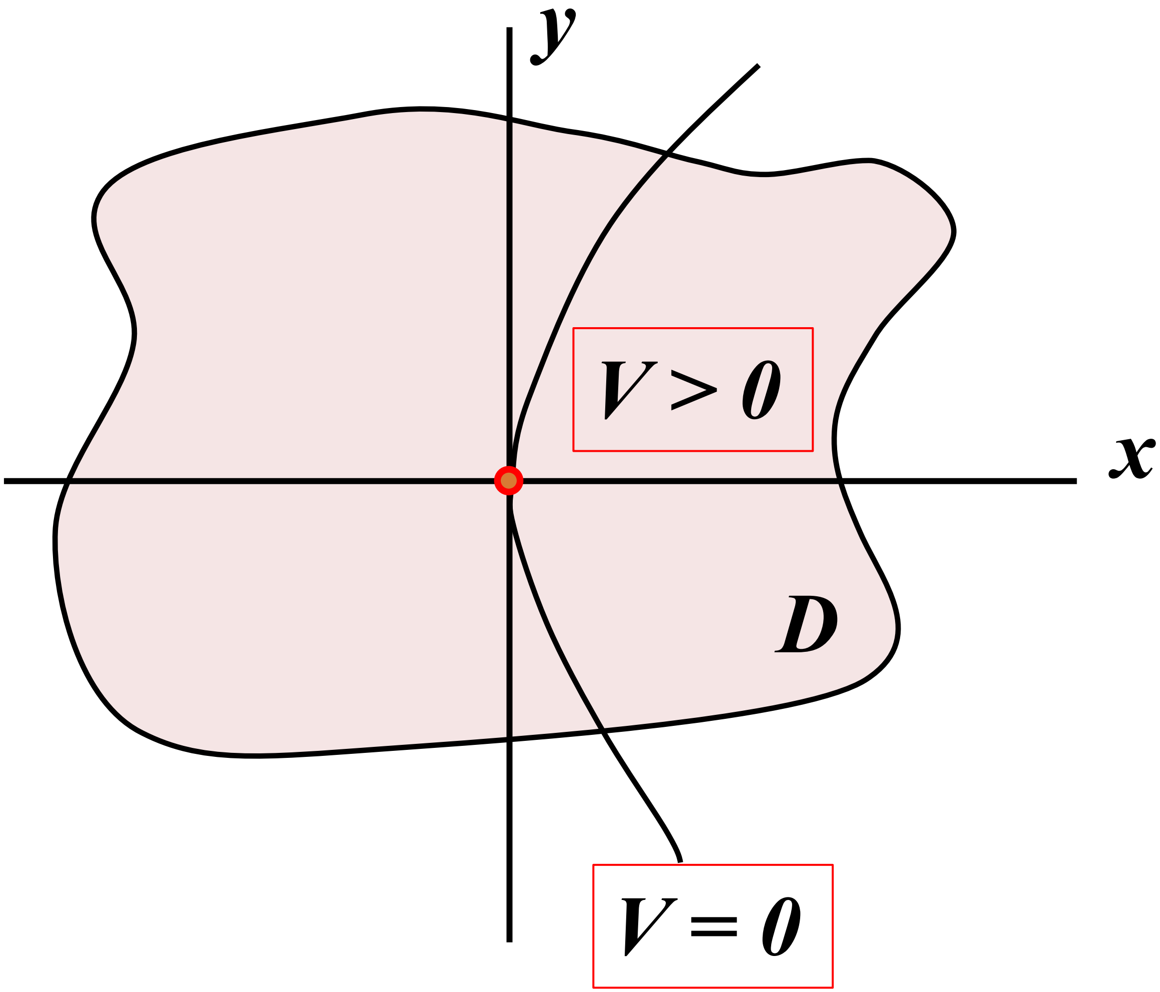
Матрица линеаризованной системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm i}$$

«Центр»

Теорема Четаева



$$\frac{dV}{dt} > 0$$

$$\forall (x, y) \in D$$

$$\Downarrow$$

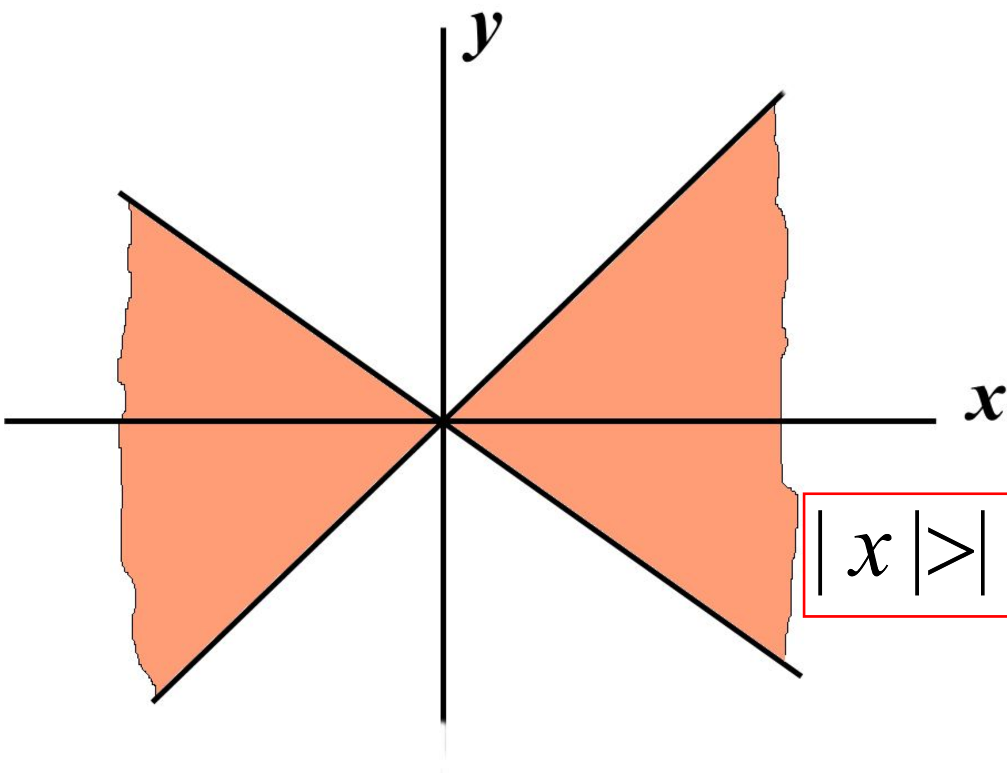
Нулевое решение неустойчиво

O* — предельная точка *D

Применение теоремы Четаева

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - xy^2; \\ \dot{y} = -x^2 y + y^3. \end{cases}$$

$$V(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$$



$|x| > |y|$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -y$$

Применение теоремы Четаева

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - xy^2; \\ \dot{y} = -x^2 y + y^3. \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -y$$

$$\frac{dV}{dt} = x \cdot \left(x^3 - xy^2 \right) - y \cdot \left(-x^2 y + y^3 \right) =$$

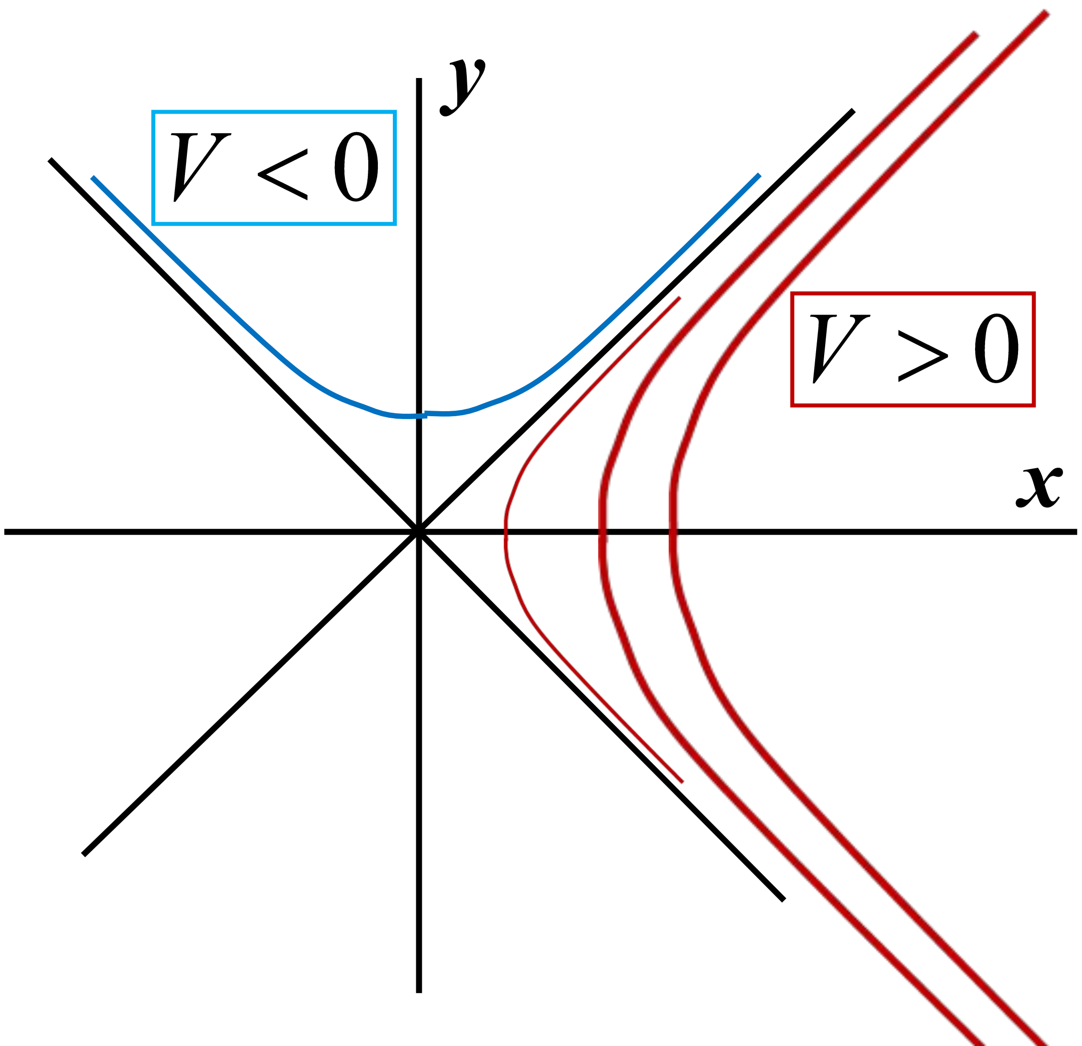
$$= x^4 - \cancel{x^2 y^2} + \cancel{x^2 y^2} - y^4 = x^4 - y^4 > 0$$

при $|x| > |y|$

Нулевое решение неустойчиво

Применение теоремы Четаева

$$V(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$$



Построение функции Ляпунова

$$u = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

$$u = y^2\left(A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\frac{x}{y} + C\right)$$

Условие сохранения знака: $D = B^2 - 4AC < 0$

Построение функции Ляпунова

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$$

$$\boxed{B^2 < 4C}$$

$$L(x, y) = x^2 + Bxy + Cy^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + By$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = Bx + 2Cy$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Построение функции Ляпунова

$$\frac{dL}{dt} = (2x + By)\cdot(x + 4y) +$$

$$+(Bx + 2Cy)\cdot(-x - 2y) =$$

$$= 2x^2 + 8xy + Bxy + 4By^2 -$$

$$-Bx^2 - 2Bxy - 2Cxy - 4Cy^2 =$$

$$\boxed{= (2 - B)x^2 + (8 - B - 2C)xy + (4B - 4C)y^2}$$

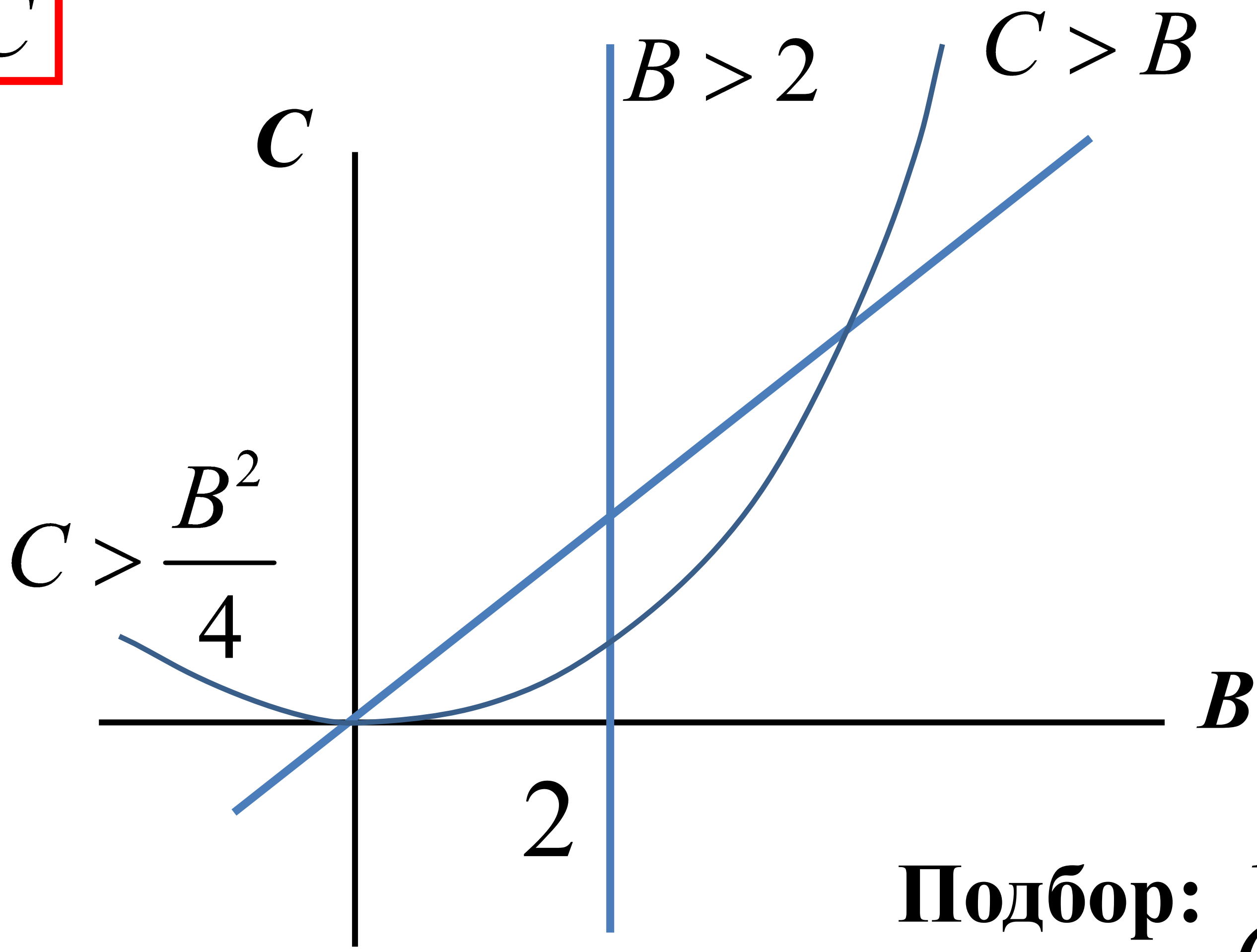
$$\boxed{B > 2} \qquad \boxed{B < C}$$

Построение функции Ляпунова

$B^2 < 4C$

$2 < B < C$

$(8 - B - 2C)^2 < 4(2 - B)(4B - 4C)$



Подбор: $B = 3$, $C = 4$

Построение функции Ляпунова

$$\boxed{B^2 < 4C} \quad \boxed{2 < B < C}$$

$$\boxed{(8 - B - 2C)^2 < 4(2 - B)(4B - 4C)}$$

Подбор: $B = 3 \qquad C = 4$

$$(8 - 3 - 8)^2 < 4(2 - 3)(12 - 16)? \quad \boxed{9 < 16}$$

$$\boxed{L(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 > 0}$$

$$\frac{dL}{dt} = (2 - B)x^2 + (8 - B - 2C)xy + (4B - 4C)y^2$$

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = -x^2 - 3xy - 4y^2 < 0}$$

Геометрическая интепретация