

Теория вероятностей

Михайлова Е.А.

СПБ ГБ ПОУ «КПМ»

Вероятность в природе

Никто не умеет предсказывать, какой стороной («орлом» или «решкой») упадёт монета при игре в орлянку. Но опыт показывает, что если бросать монету много раз, то орлов и решек будет примерно поровну. Точно так же никто не может предсказать, сколько очков выпадет при бросании игральной кости. Но опыт показывает, что в длинной серии из N бросаний все цифры встречаются примерно поровну (каждая примерно $N/6$ раз).

Вероятность в природе

1. В игре бросают кубик; выигрышем считается выпадение пятёрки или шестёрки. Сколько (примерно) выигрышей будет в длинной серии из N игр?

Как говорят, вероятность выигрыша в этой игре равна 1:3 («шанс выиграть - один из трёх», «мы выигрываем примерно каждый третий раз» и т.п.)

2. В мешке лежит десять бумажек с надписями $0;1;2;\dots;9$. Из мешка наудачу вытаскивают одну из бумажек, смотрят на число и возвращают обратно. (После этого бумажки перемешивают и опыт повторяют.) Считая, что все цифры будут встречаться примерно одинаково часто, определите, в какой доле случаев будет вытащено:

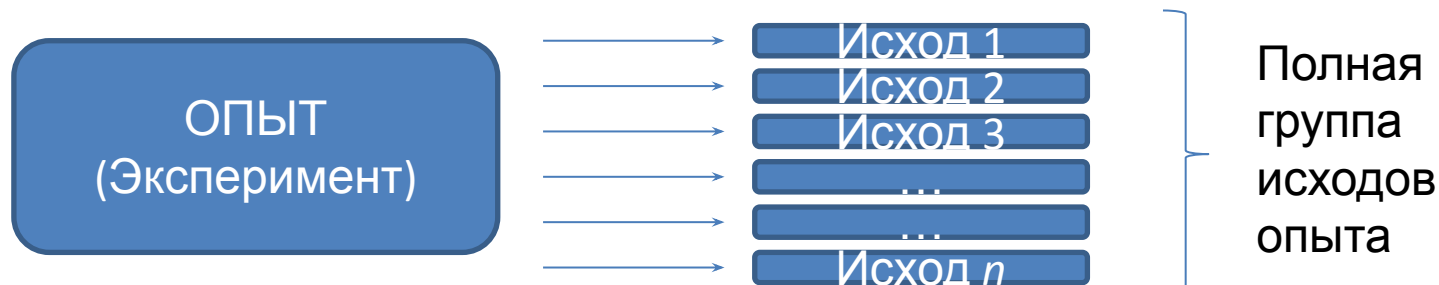
(а) чётное число;

(б) число, делящееся на 3;

(в) число, делящееся и на 2, и на 3;

(г) число, не делящееся ни на 2, ни на 3.

ОПЫТЫ И СОБЫТИЯ



Исходы – всевозможные и равнозначные результаты опыта.

Событие – то, что наблюдаем в результате опыта.

Возможно при нескольких (благоприятных) исходах.

Разница между событием и исходом!

Достоверные, невозможные события.

Несовместные события – события, которые не могут произойти одновременно (исключают друг друга).

Математическое (классическое) определение вероятности

Определение: Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов (m) к общему числу равновозможных исходов (n).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Невозможное
событие

Достоверное
событие

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

(Одно из двух противоположных событий называется

Вероятность

Вероятность – число в границах от 0 до 1
(при заполнении бланка ЕГЭ только
конечная
десятичная дробь)

Запись: 0,6 ~~3/5~~ ~~3:5~~ ~~60%~~

Вероятность

Серёжа, Саша, Ира, Соня, Женя, Толя, Ксюша и Федя бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет не Ксюша.

В среднем из 500 садовых насосов, поступивших в продажу, 25 подтекает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный для контроля насос подтекает.

В среднем из 140 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекает. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Фабрика выпускает сумки. В среднем из 125 сумок 5 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется без дефектов. Всего 125 сумок!

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 120 качественных сумок 5 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется без дефектов. Всего 125 сумок!

Вероятность

Серёжа, Саша, Ира, Соня, Женя, Толя, Ксюша и Федя бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет не Ксюша.

В среднем из 500 садовых насосов, поступивших в продажу, 25 подтекает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный для контроля насос подтекает.

$$25/500=0,05$$

В среднем из 140 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекает. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

$$134/140=19/20=0,85$$

Фабрика выпускает сумки. В среднем из 125 сумок 5 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется без дефектов.

Всего 125 сумок!

$$120/125=19/20=0,85$$

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 120 качественных сумок 5 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно

Вероятность

В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 7 прыгунов из России и 6 прыгунов из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что пятым будет выступать прыгун из Китая.

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Вероятность

В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 7 прыгунов из России и 6 прыгунов из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что пятым будет выступать прыгун из Китая.

$$6/40=3/20=15/100=0,15$$

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

$$(7-1)/(76-1)=6/75=2/25=8/100=0,08$$

Примеры:

- В чемпионате по гимнастике участвуют 60 спортсменок: 17 из Венгрии, 16 из Румынии, остальные из Болгарии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Болгарии. 9773B2
- Фабрика выпускает сумки. В среднем на 150 качественных сумок приходится 14 сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых. 5C527A
- Миша, Олег, Настя и Галя бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет не Галя. B679A5

- Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 бадминтонистов, среди которых 22 спортсмена из России, в том числе Игорь Чаев. Найдите вероятность того, что в первом туре Игорь Чаев будет играть с каким-либо бадминтонистом из России. D074AE
- Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 40 докладов — в первый день 8 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции? 8C30A3
- На олимпиаде по русскому языку 350 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 140 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Вероятность

Найдите вероятность того, что случайно выбранное трёхзначное число делится на 33.

Найдите вероятность того, что случайно выбранное трёхзначное число делится на 25.

Вероятность

Найдите вероятность того, что случайно выбранное трёхзначное число делится на 33.

Найдите вероятность того, что случайно выбранное трёхзначное число делится на 25.

Сколько всего трёхзначных чисел? $99 \ 100 \dots 999 \quad 999 - 99 = 900$
Сколько из них кратны 25? $75(25 \cdot 3) \quad 100(25 \cdot 4) \dots 975(25 \cdot 39) \quad 39 - 3 = 36$
Вероятность равна $36/900 = 4/100 = 0,04$

Вероятность

Найдите вероятность того, что случайно выбранное трёхзначное число делится на 33.

Сколько всего трёхзначных чисел? $99\ 100\dots 999$ $999-99=900$
Сколько из них кратны 33? $99(33*3)$ $132(33*4)\dots 990(33*30)$ $30-3=27$
Вероятность равна $27/900=3/100=0,03$

Найдите вероятность того, что случайно выбранное трёхзначное число делится на 25.

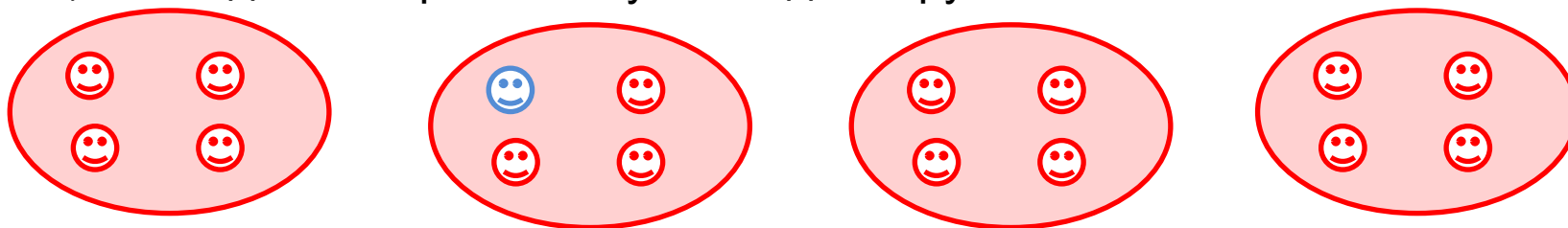
Сколько всего трёхзначных чисел? $99\ 100\dots 999$ $999-99=900$
Сколько из них кратны 25? $75(25*3)$ $100(25*4)\dots 975(25*39)$ $39-3=36$
Вероятность равна $36/900=4/100=0,04$


Маша идёт на день рождения, где будут десять ребят и десять девочек (включая Машу). Они садятся за круглый стол в случайном порядке.

Какова вероятность, что справа от Маши будет сидеть мальчик? что оба её соседа будут мальчики?

Вероятность

В классе 16 учащихся, среди них два друга — Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.



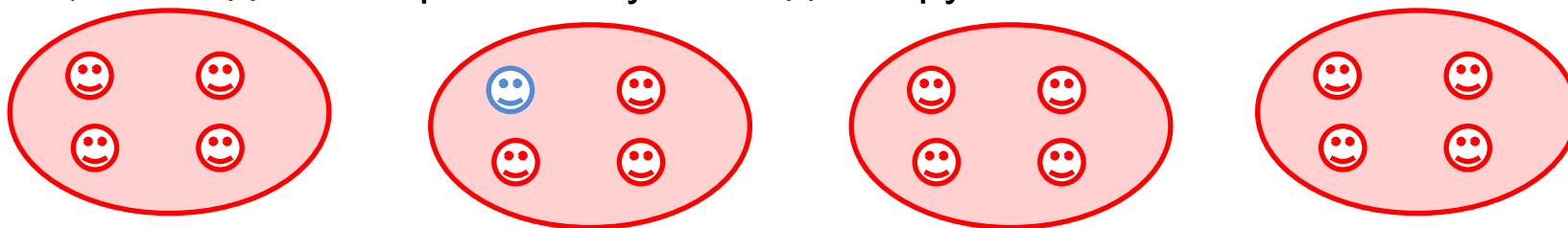
 - Вадим, с ним в группе 3 свободных места, всего 15 свободных мест
вероятность равна $3/15=1/5=0,2$


В параллели 51 учащийся, среди них два друга — Михаил и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Сергей окажутся в одной группе.

В классе 26 учащихся, среди них два друга — Сергей и Андрей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Андрей окажутся в одной группе.

Вероятность

В классе 16 учащихся, среди них два друга — Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.



 - Вадим, с ним в группе 3 свободных места, всего 15 свободных мест
вероятность равна $3/15=1/5=0,2$

В параллели 51 учащийся, среди них два друга — Михаил и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Сергей окажутся в одной группе.

3 группы по 17 человек, вероятность равна $16/50=32/100=0,32$

В классе 26 учащихся, среди них два друга — Сергей и Андрей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Андрей окажутся в одной группе.

2 группы по 13 человек, вероятность равна $12/25=48/100=0,48$

Двое в одной группе

- В классе 21 шестиклассник, среди них два друга — Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Митя и Петя окажутся в разных группах. AC1A52
- В классе 21 учащийся, среди них две подруги — Света и Нина. Класс случайным образом делят на семь групп, по 3 человека в каждой. Найдите вероятность того, что Света и Нина окажутся в одной группе. DFAEAD
- В классе 26 семиклассников, среди них два близнеца — Иван и Игорь. Класс случайным образом делят на две группы, по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Иван и Игорь окажутся в разных группах. 95E728

Теория

Вероятность
выпадения орла **0,5**

Практика

Частота выпадения орла в
 N экспериментах:

0,507 ($N=4040$)

0,5005 ($N=4092$)

0,4979 ($N=1000$)

0,5068 ($N=20480$)

0,5005 ($N=24000$)

$N \rightarrow \infty$

$P=0,5$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды.

- Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз. (D2D184)
- Найдите вероятность того, что орёл выпадет оба раза. (3EB10C)
- Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз. (40200e)
- Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу. (65726A)



Вероятность

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды.

...Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза. $\frac{1}{4}=0,25$

...Найдите вероятность того, что орёл выпадет хотя бы один раз. $\frac{3}{4}=0,75$

...Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз. $\frac{2}{4}=0,5$

...Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу. $\frac{1}{4}=0,25$

...Найдите вероятность того, что во второй раз выпадет то же, что и в первый.
 $\frac{2}{4}=0,5$

Возможные равнозначные(!)

исходы:

1)ОО

2)ОР

3)РО

4)РР

- В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза. B26511
- В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет



Вероятность

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

Возможные равнозначные(!) исходы:

- 1) OOO
- 2) OPO
- 3) POO
- 4) PPO
- 5) OOP
- 6) OPP
- 7) POP
- 8) PPO

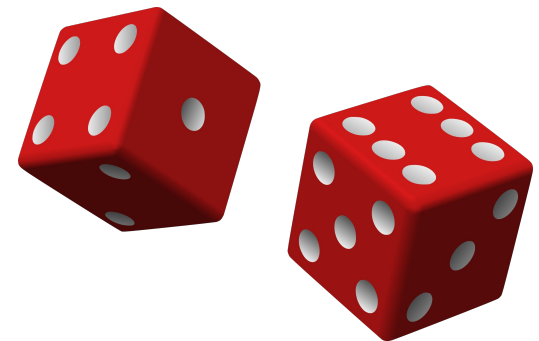
В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

	1	2	3	4	5	6	
1	2	3	4	5	6	<u>7</u>	
2	3	4	5	6	<u>7</u>	8	
3	4	5	6	<u>7</u>	8	9	
4	5	6	<u>7</u>	8	9	10	
5	6	<u>7</u>	8	9	10	11	
6	<u>7</u>	8	9	10	11	12	

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,1666... \approx 0,17$

В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика).

- Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 9 очков. Результат округлите до сотых. 3E5188
- Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых. 958925
- Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 11 очков. Результат округлите до сотых. 6F772C
- Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7. Результат округлите до тысячных. 4c90B4



Парадоксы теории вероятностей



Парадокс игры в кости.

Правильная игральная кость при бросании с равными шансами падает на любую из граней 1,2,3,4,5 или 6.

В случае бросания 2х костей сума выпавших чисел заключена между 2 и 12. Как 9, так и 10 можно получить двумя разными способами: $9=3+6=4+5$ и $10=4+6=5+5$. В задаче с тремя костями и 9 и 10 получаются шестью способами. Почему тогда 9 появляется чаще, когда бросают две кости, а 10, когда бросают три?

Определение. Объединением или суммой событий A_k называется событие A , которое означает появление хотя бы одного из событий A_k .

$$A = \bigcup_k A_k$$

Определение. Пересечением или произведением событий A_k называется событие A , которое заключается в осуществлении всех событий A_k .

$$A = \bigcap_k A_k$$

Определение. Разностью событий A и B называется событие C , которое означает, что происходит событие A , но не происходит событие B .

$$C = A \setminus B$$

Определение. Дополнительным к событию A называется событие \bar{A} , означающее, что событие A не происходит.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Теорема (сложения вероятностей). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Следствие Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Одно из двух *противоположных событий* называется отрицанием другого

Сформулируйте отрицания следующих утверждений:

- (а) число x больше числа y ;
- (б) среди чисел x, y, z есть хотя бы два одинаковых;
- (в) все дома на правой стороне улицы имеют чётные номера;
- (г) все ученики класса, знающие английский язык, умеют складывать дроби;
- (д) Коля получил пятёрки за все контрольные;
- (е) любой ученик 10а класса выше по росту, чем любой ученик 8б класса.
- (ё) некоторый ученик 10а выше всех учеников 8б;
- (ж) некоторый ученик 10а выше некоторого ученика 8б;
- (з) все вороны чёрные;
- (и) на каждой странице этой книги есть хотя бы одна опечатка;
- (й) на каждой странице любой книги есть хотя бы одна опечатка;

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

Вероятность

На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36,8^{\circ}\text{C}$, равна 0,94. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется $36,8^{\circ}\text{C}$ или выше.

Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше 9 задач, равна 0,63. Вероятность того, что А. верно решит больше 8 задач, равна 0,75. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 9 задач.

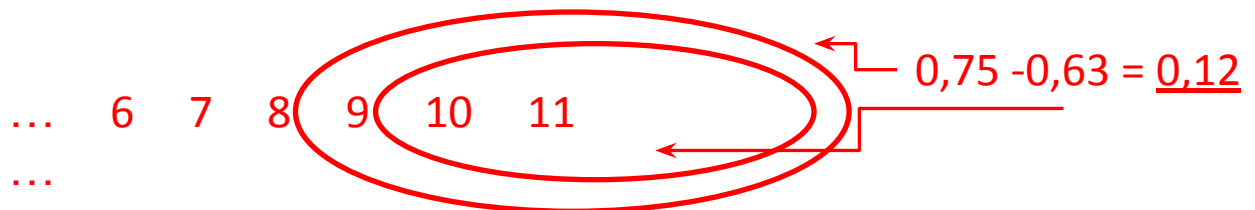
Вероятность

На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

$$0,2+0,35=0,55$$

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36,8^{\circ}\text{C}$, равна 0,94. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется $36,8^{\circ}\text{C}$ или выше.

Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше 9 задач, равна 0,63. Вероятность того, что А. верно решит больше 8 задач, равна 0,75. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 9 задач.



Сумма вероятностей.

Примеры

- Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше 11 задач, равна 0,66. Вероятность того, что А. верно решит больше 10 задач, равна 0,76. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 11 задач. 293735
- Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36,8^{\circ}\text{C}$, равна 0,89. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется $36,8^{\circ}\text{C}$ или выше. 5B0D72
- Вероятность того, что на тестировании по физике учащийся А. верно решит больше 6 задач, равна 0,77. Вероятность того, что А. верно решит больше 5 задач, равна 0,83. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 6 задач. eDFD31
- На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем. 5e924B

Опыт состоит в одновременном бросании четырёх кубиков (красного, синего, зелёного и жёлтого). Найдите вероятность того, что

- (а) выпадут четыре шестёрки;
- (б) выпадут три шестёрки и одна пятёрка;
- (в) выпадут две шестёрки и две пятёрки;
- (г) выпадет ровно одна шестёрка;
- (д) выпадут четыре разные цифры;
- (е) не выпадет ни одной шестёрки;
- (ё) выпадет хотя бы одна шестёрка.

В очередь в случайном порядке становятся четыре человека А, Б, В, Г. Считая все варианты их расположения равновозможными, определите вероятность следующих событий:

- (а) А будет первым в очереди;
- (б) Б не будет последним в очереди;
- (в) А будет стоять раньше Б;
- (г) А будет стоять рядом с Б (до или после него);
- (д) А будет стоять раньше Б и раньше В;
- (е) А будет стоять раньше Б, а В будет стоять раньше Г.

Парадокс с подарками

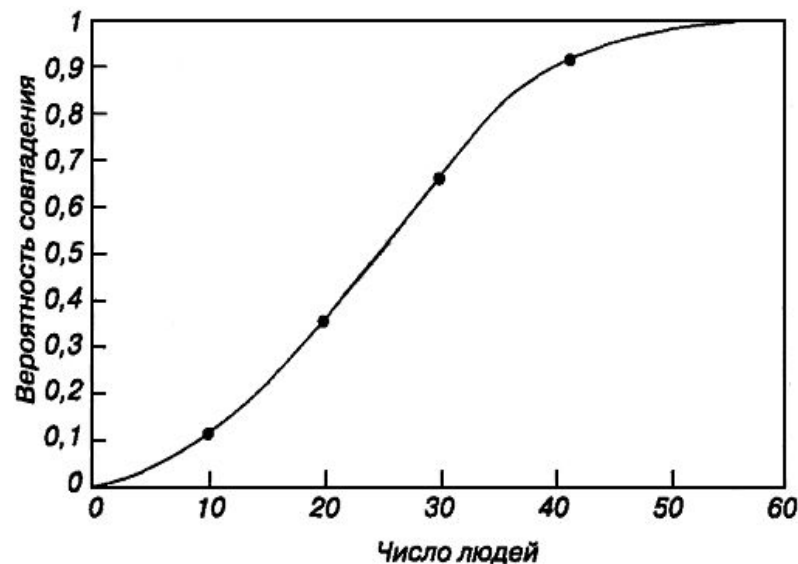
Несколько человек решили сделать друг другу подарки следующим образом. Каждый приносит подарок. Подарки перемешиваются и случайно распределяются среди участников. Этот справедливый способ применяется часто, так как считается, что вероятность получения кем-то собственного подарка очень мала. Парадоксально, но вероятность по крайней мере одного совпадения намного больше вероятности того, что совпадения нет (кроме тривиального случая из двух человек). Почему так?

Дни рождения

Вероятность совпадений
дней рождений в
коллективе из N человек

При $N = 24$ более 50%

При $N = 68$ более 99,9%



Произведение вероятностей.

Примеры

- Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза. 905979
- Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3. 21DD4A

Парадокс лотереи (типа спортлото)

Большинство участников лотерей (в которых выигрыш распределяется между всеми победителями как в спортлото) обычно не ставят на "слишком симметричные" комбинации, хотя все комбинации равновозможны. Причина этого проста. Игроки по опыту знают, что, как правило, выигрывают не симметричные комбинации. В действительности выгоднее ставить на наиболее симметричные комбинации именно потому, что.... Почему?

Парадокс смертности.

Эдмунд Галлей (открывший известную комету) в 1693 году составил таблицу смертности, положившую начало математической теории страхования жизни. По этой таблице средняя продолжительность жизни равна 26 годам, и вместе с тем с равными шансами можно умереть до 8 лет и прожить больше 8 лет. Как это увязать?

Геометрическая вероятность.

Пример

- Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1. $0.26190D$

Источники

Г. Секей. "Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике" М., Мир 1990.

А. Шень. «Вероятность: примеры и задачи» М., МЦНМО 2008.

<http://alexlarin.net/kvm4.html>