

Случайная величина

- **Случайная величина** – это переменная, которая принимает свои значения в зависимости от случайных обстоятельств.



- **Дискретная** случайная величина (точечная) принимает отдельные числовые значения (кубик: 1,2,3,4,5,6)

- **Непрерывная** случайная величина принимает любые значения из некоторого интервала (рост студентов).



Закон распределения случайной величины

Это связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями, с которыми она эти значения принимает, в виде 1) таблицы 2) графика 3) функции распределения

• Дискретная случайная величина.

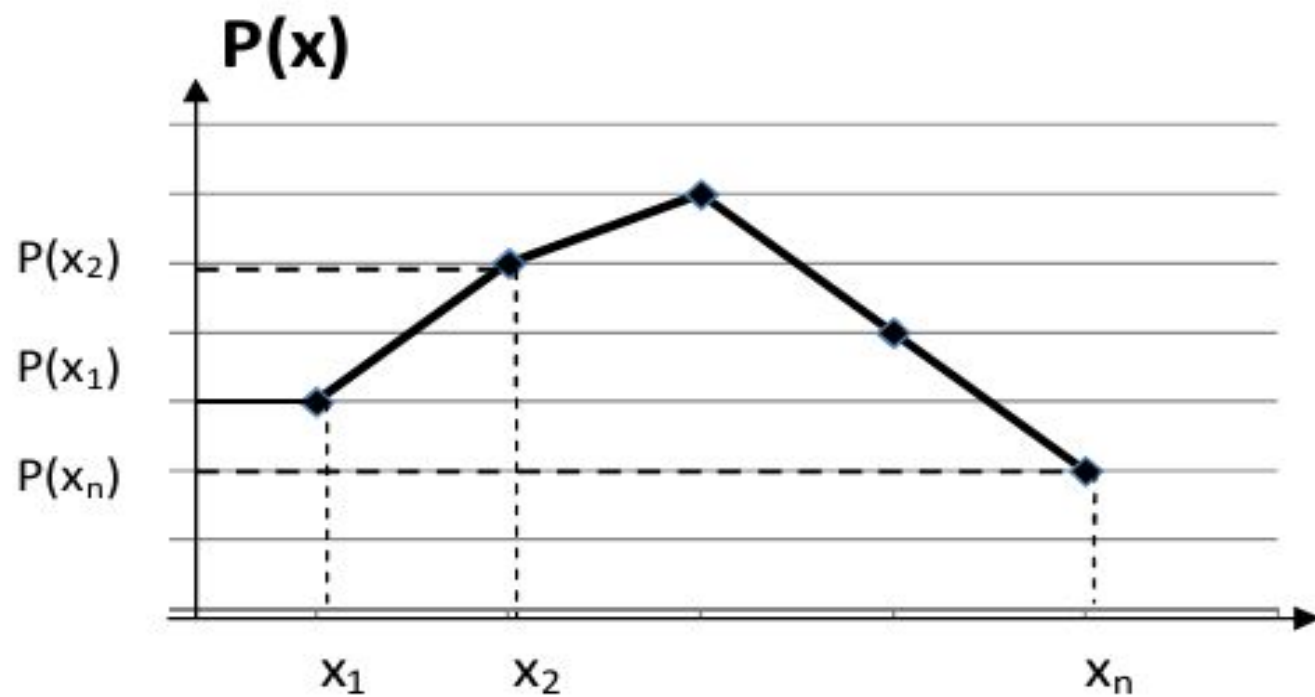
• Таблица

x	x_1	x_2	...	x_n
P(x)	$P(x_1)$	$P(x_2)$		$P(x_n)$

нормировки

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) = \sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

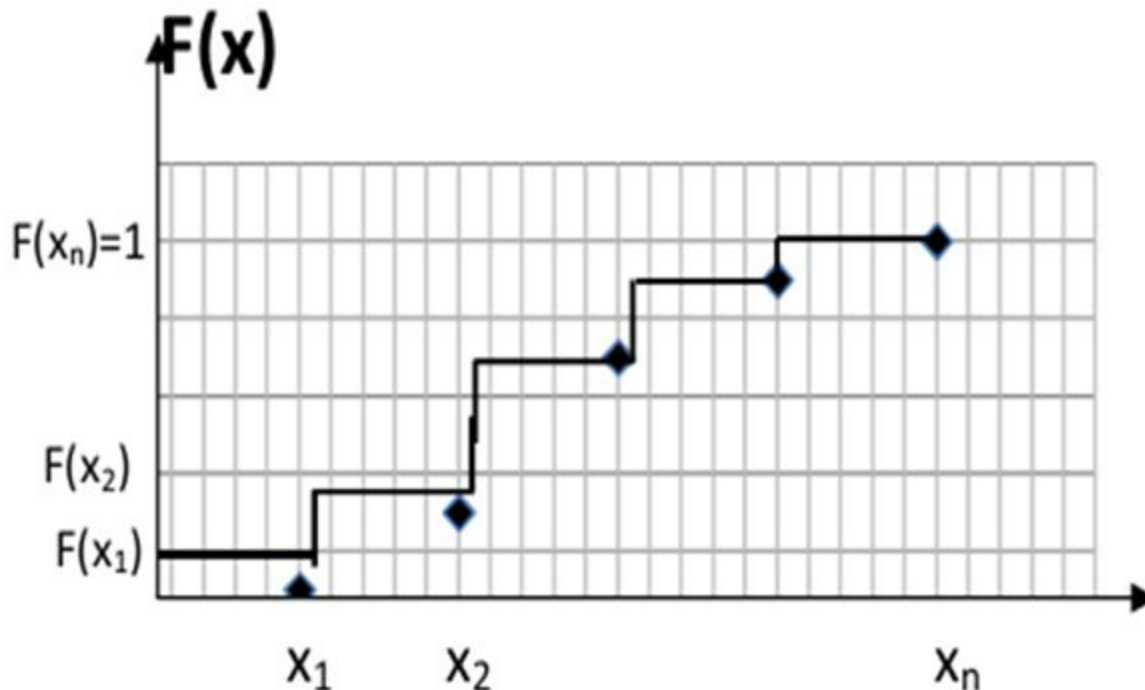
2).График: многоугольник распределения.



Функция распределения $F(x_0)$

- это вероятность того, что случайная величина X принимает значения, меньшие или равные x_0

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$



$$F(x_0) = \sum_{\substack{i \\ (x_i < x_0)}} P(x_i)$$

Свойства функции распределения

1). $F(x)$ неубывающая: $F(x_2) \geq F(x_1)$ если $x_2 \geq x_1$

2). $F(-\infty)=0$; $F(+\infty)=1$

Вероятность попадания значения
случайной величины в заданный интервал

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

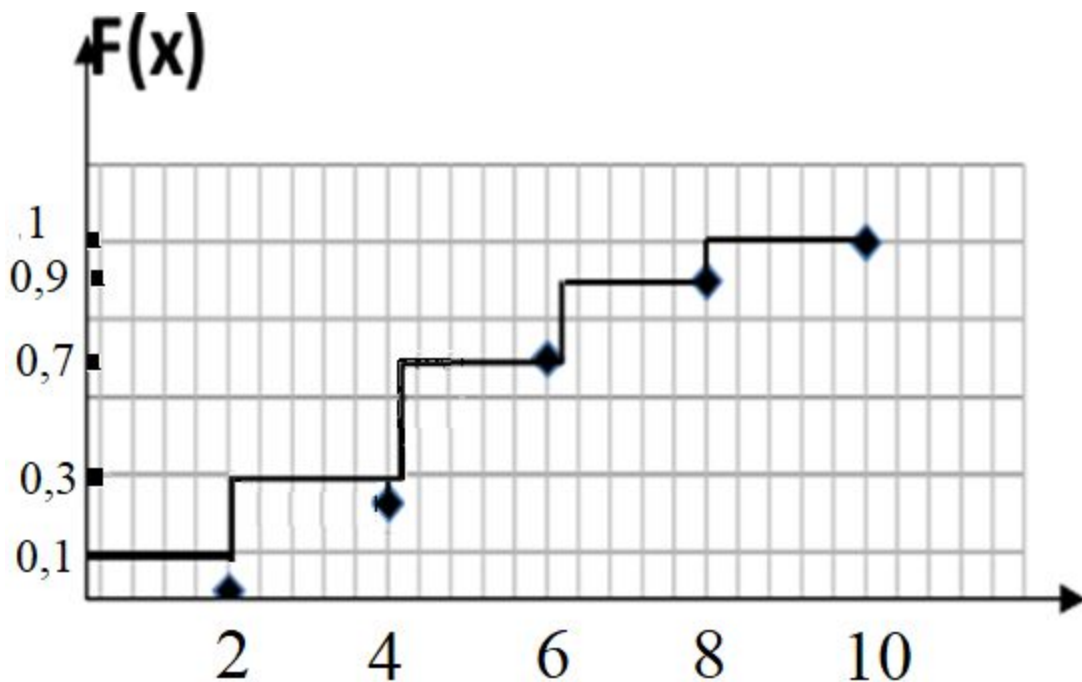
Пример

X	2	4	6	8	10
P(x)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
F(x)	0,1	0,3	0,7	0,9	1

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(2) + P(4) = 0,1 + 0,2 = 0,3 \quad F(8) = P(X \leq 8) = P(2) + P(4) + P(6) +$$

$$P(8) = 0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,2 = 0,9$$

$$P(4 < X \leq 8) = F(8) - F(4) = 0,9 - 0,3 = 0,6$$

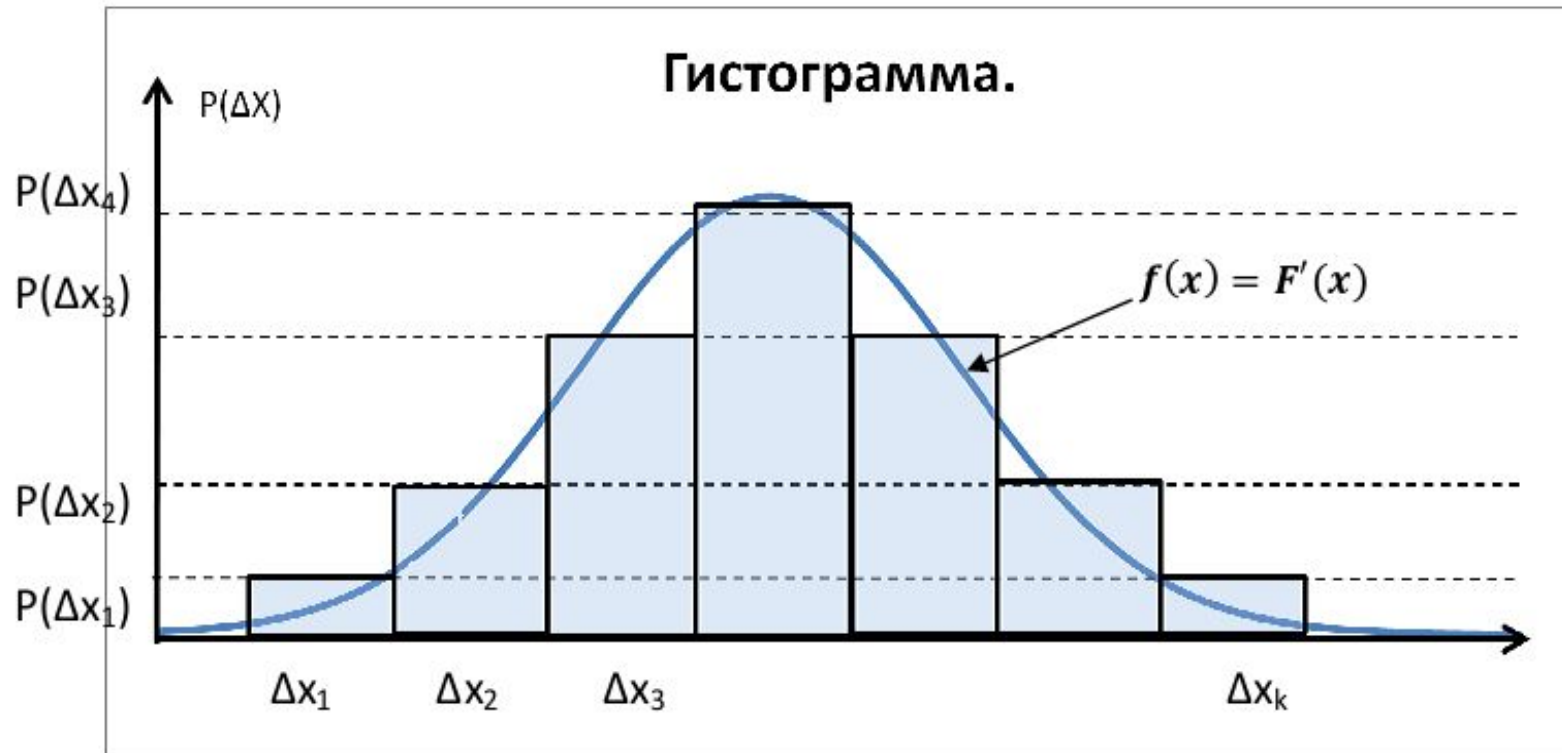


Непрерывная случайная величина

1) Таблица: Интервальный ряд распределения.

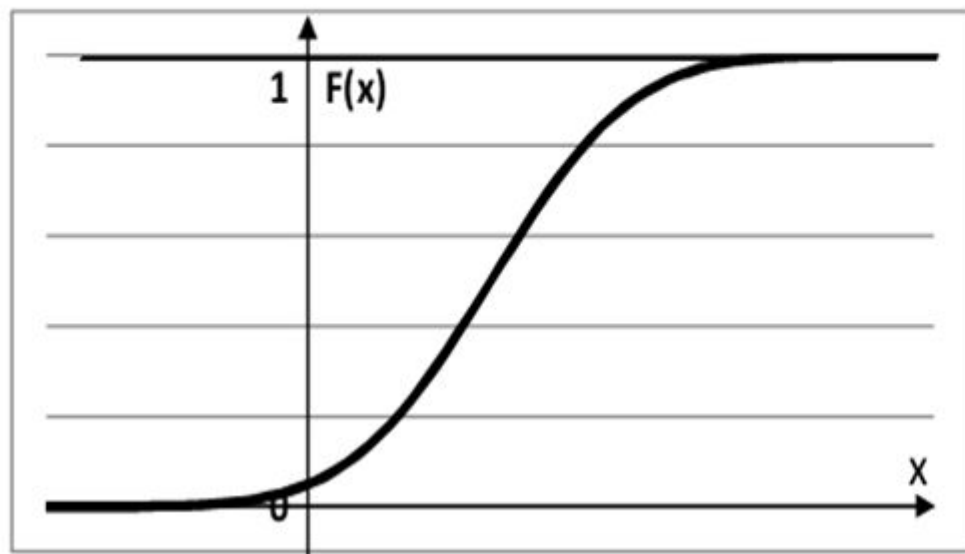
X	Δx_1	Δx_2		Δx_k
P(Δx)	P(Δx_1)	P(Δx_2)		P(Δx_k)

2). График: Гистограмма.



3). Функция распределения.

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$



1). $F(x)$ неубывающая:
 $F(x_2) \geq F(x_1)$ если $x_2 \geq x_1$

2). $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$

4). Функция плотности распределения $f(x)$: (только для непрерывной случайной величины).

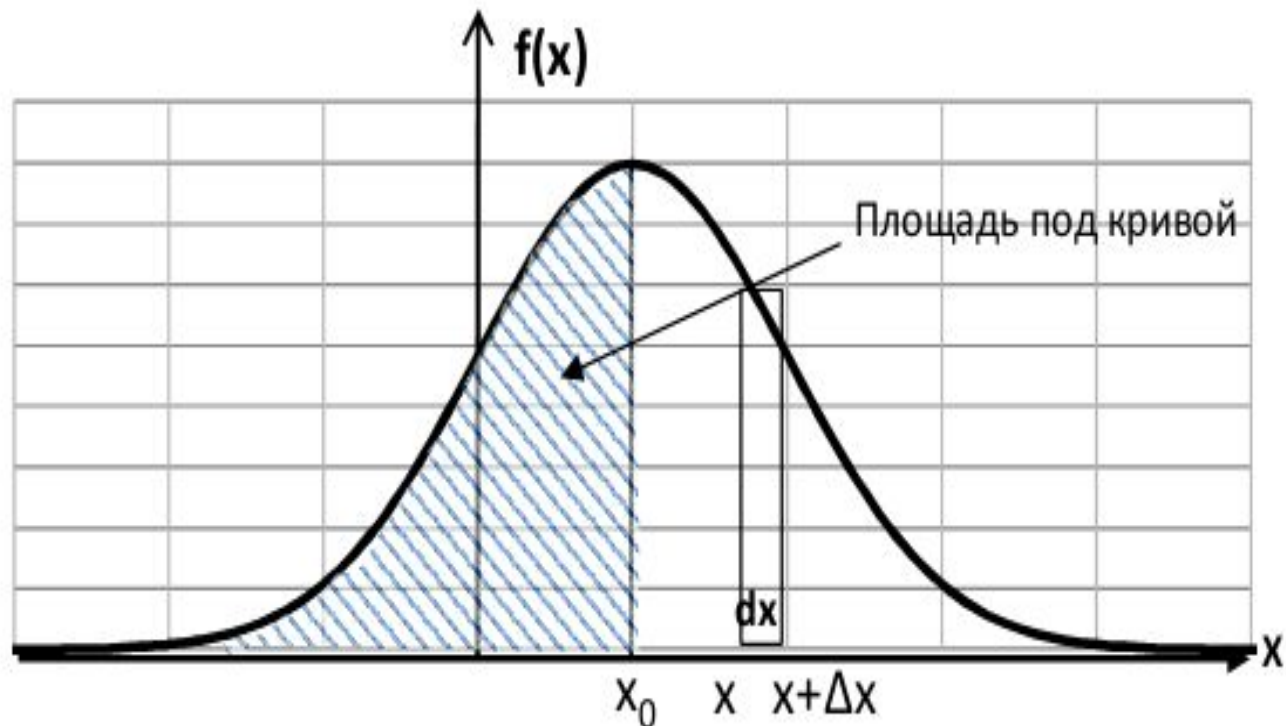
$$P(x < X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$$

Найдём предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Обозначим: .

$f(x) = F'(x)$ это функция плотности распределения.



1). $f(x)$ неотрицательная функция ($f(x) \geq 0$).

2). Вероятность попадания в элементарный интервал $dx = (x + \Delta x) - x$ равна $f(x)dx = dP$.

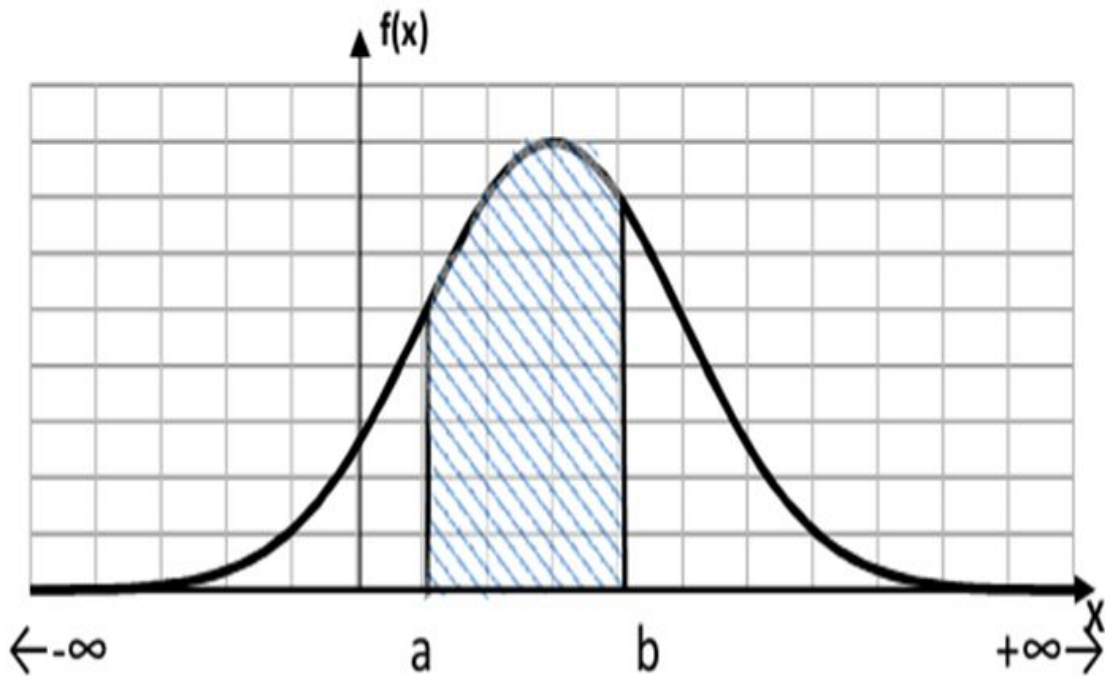
$$P(x < X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x) = F'(x) \cdot dx = f(x)dx = dP -$$

—элемент вероятности.

$$P(X \leq x_0) = F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$$

3). Вероятность попадания случайной величины в интервал $(a, b]$:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

*Условие
нормировки*

Числовые характеристики случайной величины.

1) Математическое ожидание. Это среднее значение случайной величины

• Дискретная величина

- Пусть проведено n испытаний, случайная величина приняла значение

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots}{n} = \sum_{i=1} x_i p(x_i)$$

При $n \rightarrow \infty$ $\bar{X} \rightarrow M[x]$ –
математическое ожидание

$$M[X] = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(x_i)$$

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Числовые характеристики случайной величины.

- 2) Дисперсия (рассеивание). Это математическое ожидание (среднее значение) квадрата отклонения случайной величины X от её математического ожидания

Дискретная величина

$$D[X] = M(X - M[X])^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - M[X])^2 \cdot P(x_i) = \\ = (x_1 - M[X])^2 \cdot p(x_1) + (x_2 - M[X])^2 \cdot p(x_2) + \dots$$

Для удобства
вычислений

$$\underline{D[X] = M[X^2] - (M[X])^2}$$

Непрерывная величина

$$D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^2 \cdot f(x) dx$$

Числовые характеристики случайной величины

- Если X и Y независимые случайные величины, то

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y]$$

Так как размерность дисперсии не совпадает с размерностью самой случайной величины (например, метры и квадратные метры), используют

3) Среднеквадратическое или стандартное отклонение

$$\sigma [X] = \sqrt{D [X]}$$

Закон распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение



- Пусть производится N независимых опытов (бросаем кубик 4 раза)
- В каждом опыте с одной и той же вероятностью p может наступить событие A (выпадение грани 6 ; $p=1/6$)
- Случайная величина - это число k наступлений события A в N опытах
(грань 6 выпадает в 4 опытах 2
раза)

Биномиальное распределение

- Вероятность такой случайной величины вычисляют по формуле $P(N, k) = C_N^k \cdot p^k \cdot q^{N-k}$

где $q=1-p$; $C_N^k = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!}$; $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ факториал

$$P(4,2) = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-2} =$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^2 = \frac{150}{1296} = 0,11$$

Таблица биномиального распределения

k	0	1	...	N
P	$P(N,0)$	$P(N,1)$...	$P(N,N)$

Задача кавалера де Мере

При четырехкратном бросании игральной кости что происходит чаще: выпадет шестерка хотя бы один раз или же шестерка не появится ни разу?

Эта одна из тех задач, с которыми кавалер де Мере обратился к Б.Паскалю в надежде узнать выигрышную стратегию.



Задача господина де Мере

$$P(N, k) = C_N^k \cdot p^k \cdot q^{N-k}$$

$$P(4,0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} = 0,482$$

$$P(4,1) = \frac{4!}{0! \cdot 1! \cdot (4-1)!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296} = 0,385$$

Сколько раз из 4 бросаний вы-падет грань 6	0	1	2	3	4
Вероятность этого события	$\frac{625}{1296}$	$\frac{500}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$

Распределение Пуассона

Редкие события

- Если **количество испытаний достаточно велико (N)**, а вероятность появления события в отдельно взятом испытании **p весьма мала** (0,05-0,1 и меньше), то вероятность того, что в данной серии испытаний событие появится ровно **k** раз, можно приближенно вычислить **по формуле Пуассона:**,

$$P_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

где $\lambda = N \cdot p$ параметр распределения- среднее число событий

- Если в биномиальном распределении зафиксировать k , а N увеличивать таким образом, чтобы произведение оставалось постоянным и равным λ , то получим распределение Пуассона

- Пример

$$P_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

- На 1000 человек в среднем приходится 1 алкоголик. Найти вероятность того, что в городке с населением 8000 человек окажется 7 алкоголиков.

- **Биномиальное распределение**

- $P(8000, 7) = C_{8000}^7 \cdot (0,001)^7 \cdot (0,999)^{8000-7} =$

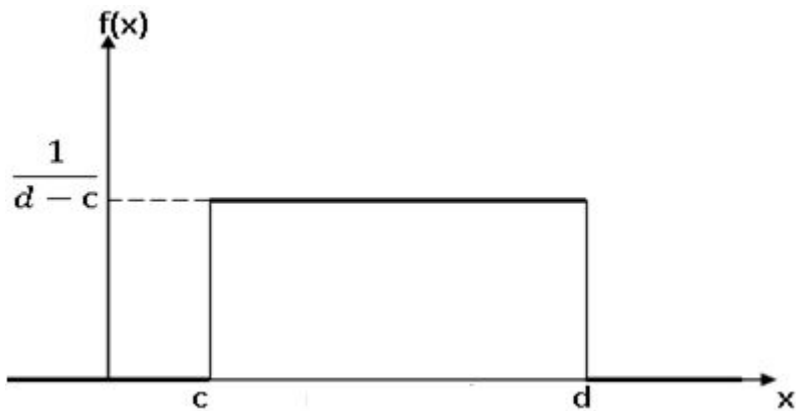
- **Распределение Пуассона**

$$P_7 = \frac{8^7 \cdot e^{-8}}{7!} = 0,19$$

Основные законы распределения непрерывной случайной величины

1. Равномерное или прямоугольное распределение.

Случайная величина называется равномерно распределённой на интервале $[c, d]$, если функция плотности распределения её на этом интервале
вна нулю.

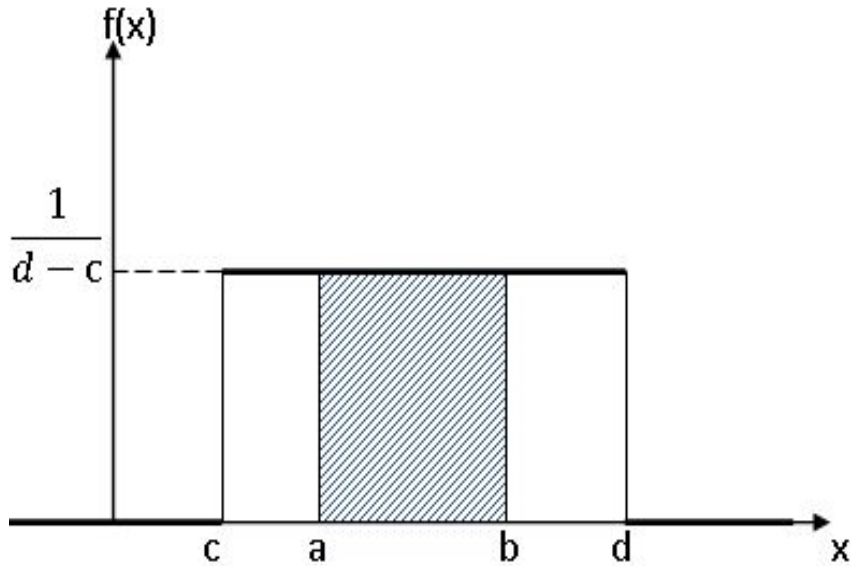


$$f(x) = \begin{cases} \text{const}, & \text{если } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{если } x < c, x > d \end{cases}$$

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \text{const} dx = \text{const} \int_c^d dx = \text{const} \cdot x \Big|_c^d = \text{const} \cdot (d - c) = 1 \Rightarrow$$

$$\text{const} = \frac{1}{d - c}$$

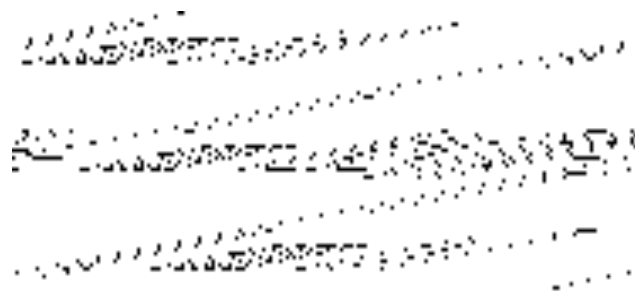
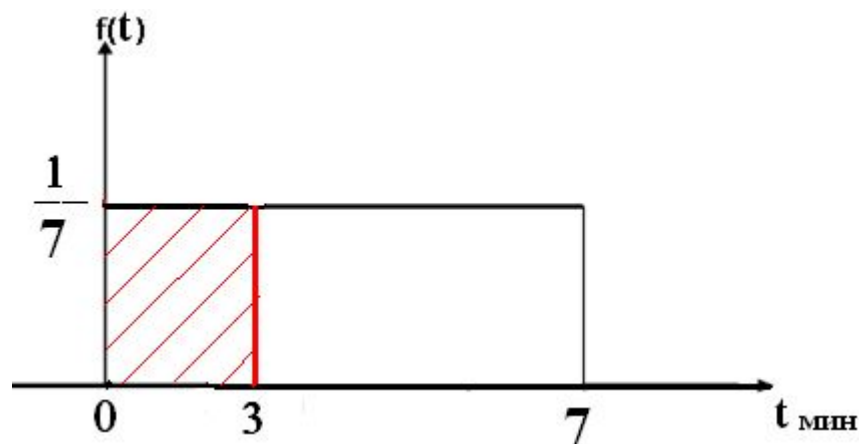
Равномерное распределение



Вероятность того что X попадёт в интервал

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{d-c} dx = \frac{1}{d-c} \cdot x \Big|_a^b = \frac{b-a}{d-c}$$

Больные попадают на флюорографическое обследование строго по расписанию работы кабинета и интервалом 7 минут. Составить функцию плотности случайной величины t – времени ожидания приглашения в кабинет больным, который наудачу подошёл к кабинету. Найти вероятность того, что он будет ждать приглашения **не более 3 –х минут.**



Вычислим вероятность того, что пассажир будет ожидать приглашения **не более 3 минут:**

$$P(0 \leq t \leq 3) = \frac{1}{7} \int_0^3 dt = \frac{1}{7} (t) \Big|_0^3 = \frac{1}{7} (3 - 0) = \frac{3}{7}$$

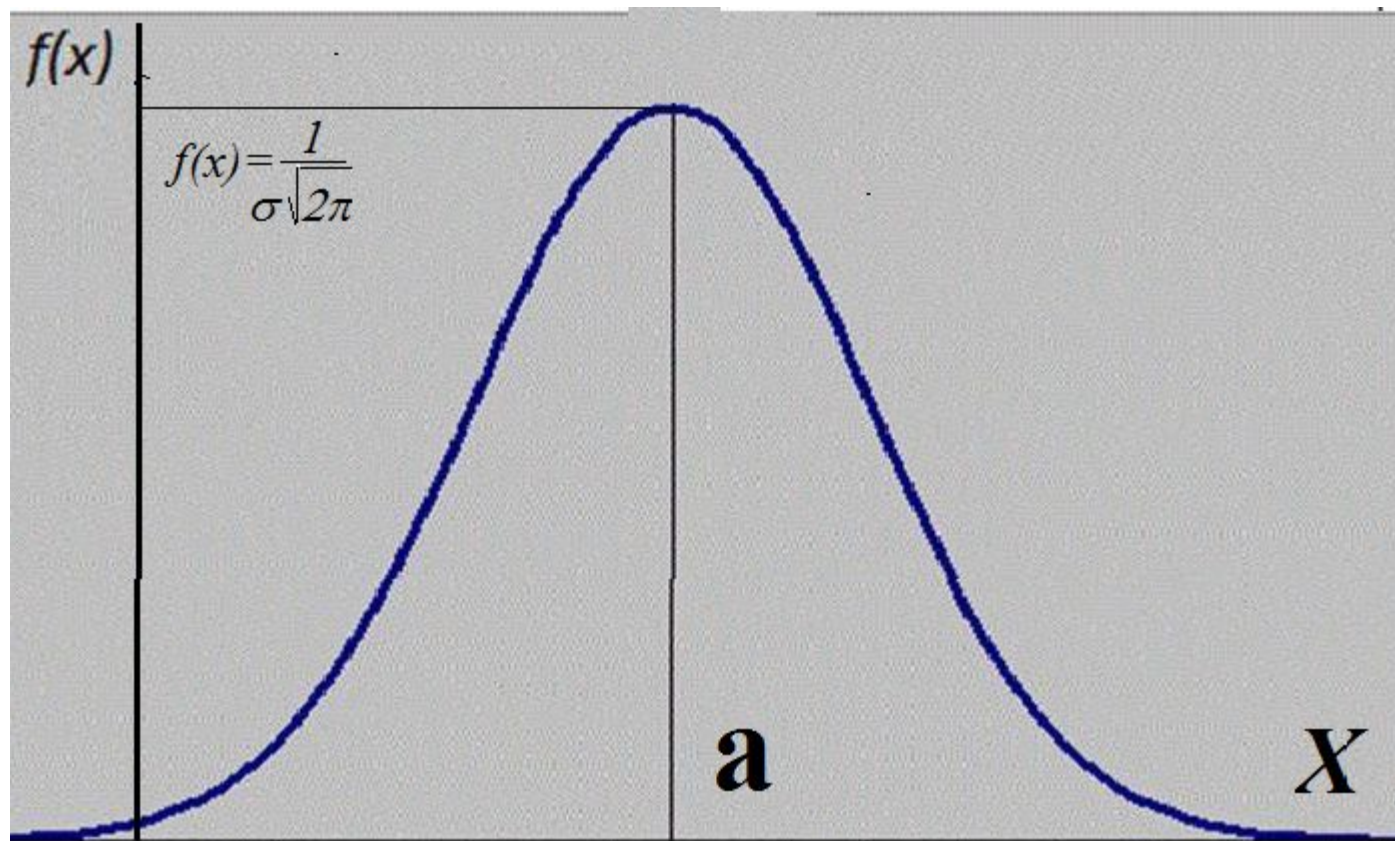
Нормальный закон распределения или распределение Гаусса

а и σ

параметры
распределе

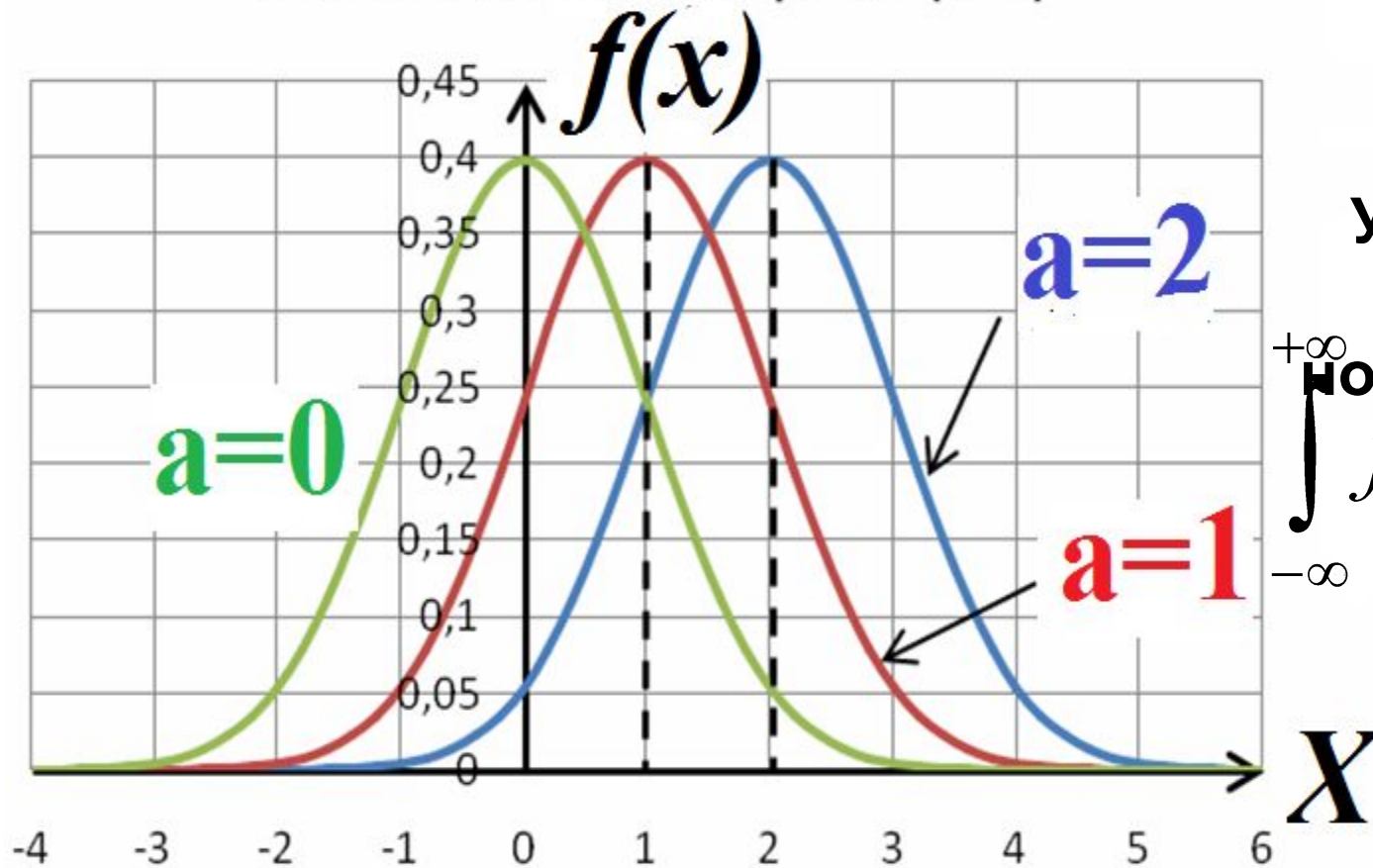
НИЯ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$



Нормальное распределение

Графики плотности распределения с разными значениями параметра a . ($\sigma=1$)



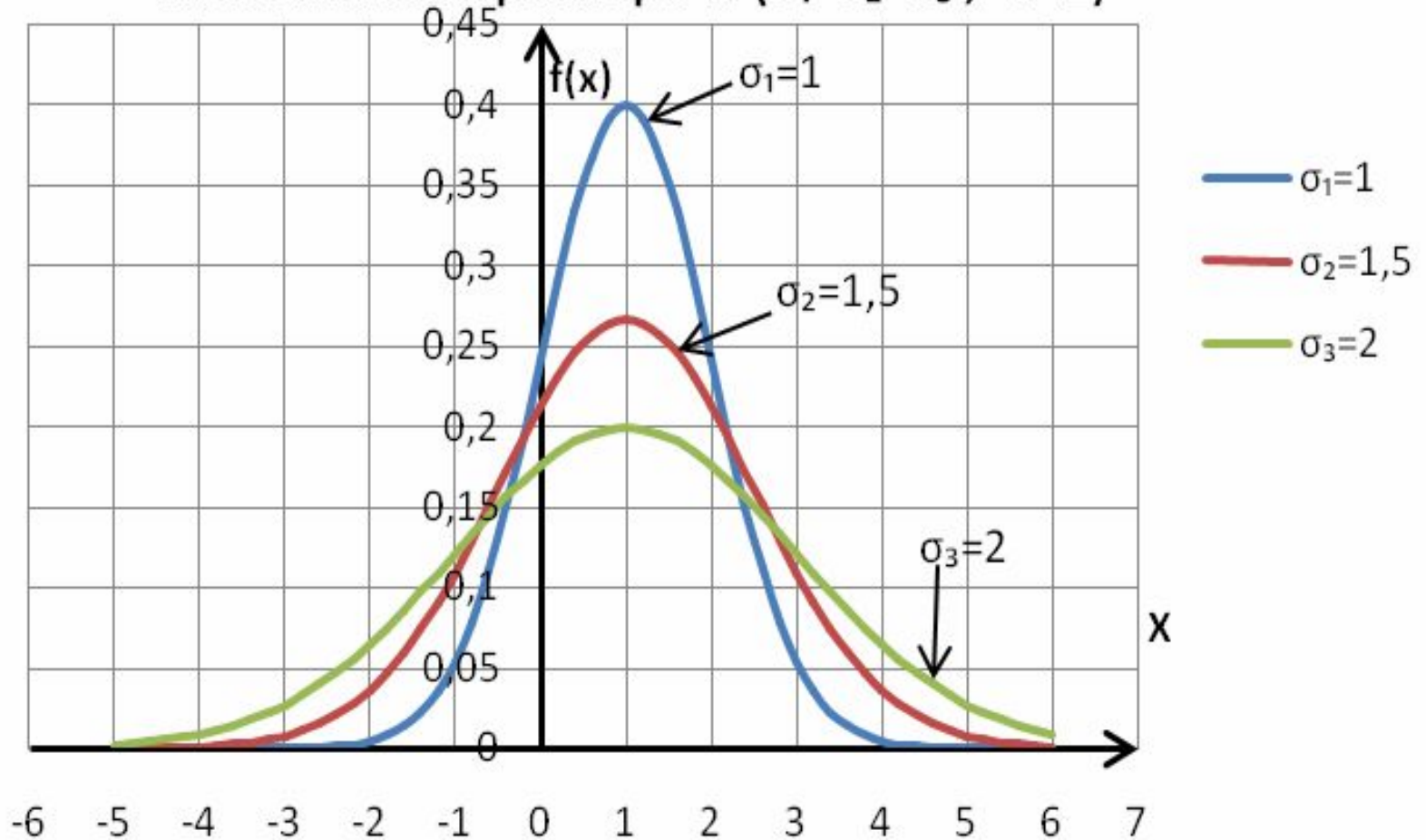
Условие

Нормировка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

С изменением параметра a кривая смещается по оси x .

Графики плотности распределения с разными значениями параметра σ . ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, $a=1$)



**С изменением параметра σ меняется форма кривой,
но не площадь под ней**

Параметры нормального распределения

математическое

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{\text{ожидание}}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a$$

дисперси

$$D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^2 \cdot f(x) dx \stackrel{\text{Я.}}{=} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

$\sigma = \sqrt{D}$ – среднее квадратическое отклонение.

Нормальная функция распределения

$$F(x) = P(-\infty, x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dx =$$

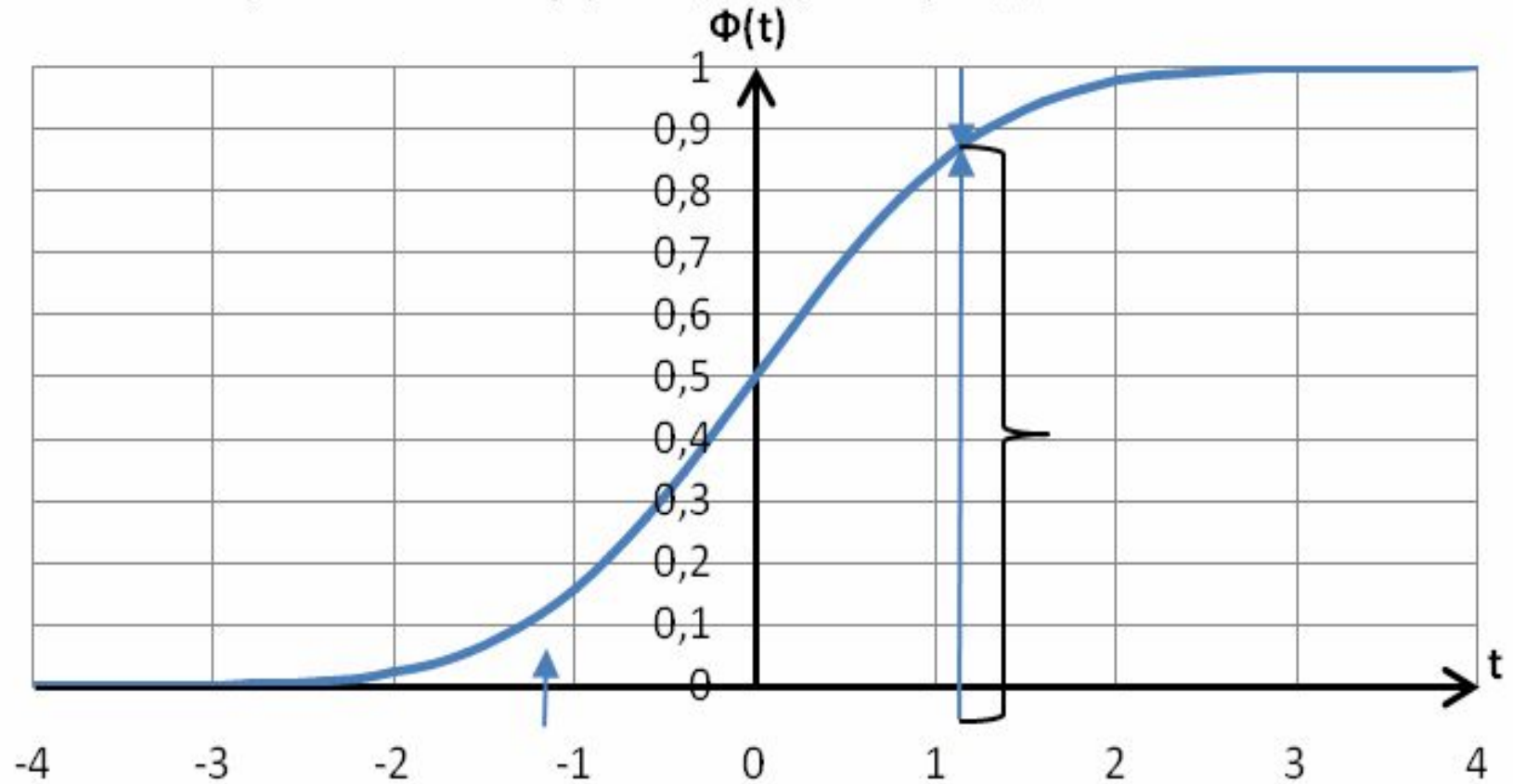
- *Введём замену переменной:*

$$t = \frac{x - a}{\sigma} = \frac{x - M[X]}{\sigma[X]} \quad dt = \frac{1}{\sigma} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t) = \Phi\left(\frac{x - M[X]}{\sigma[X]}\right)$$

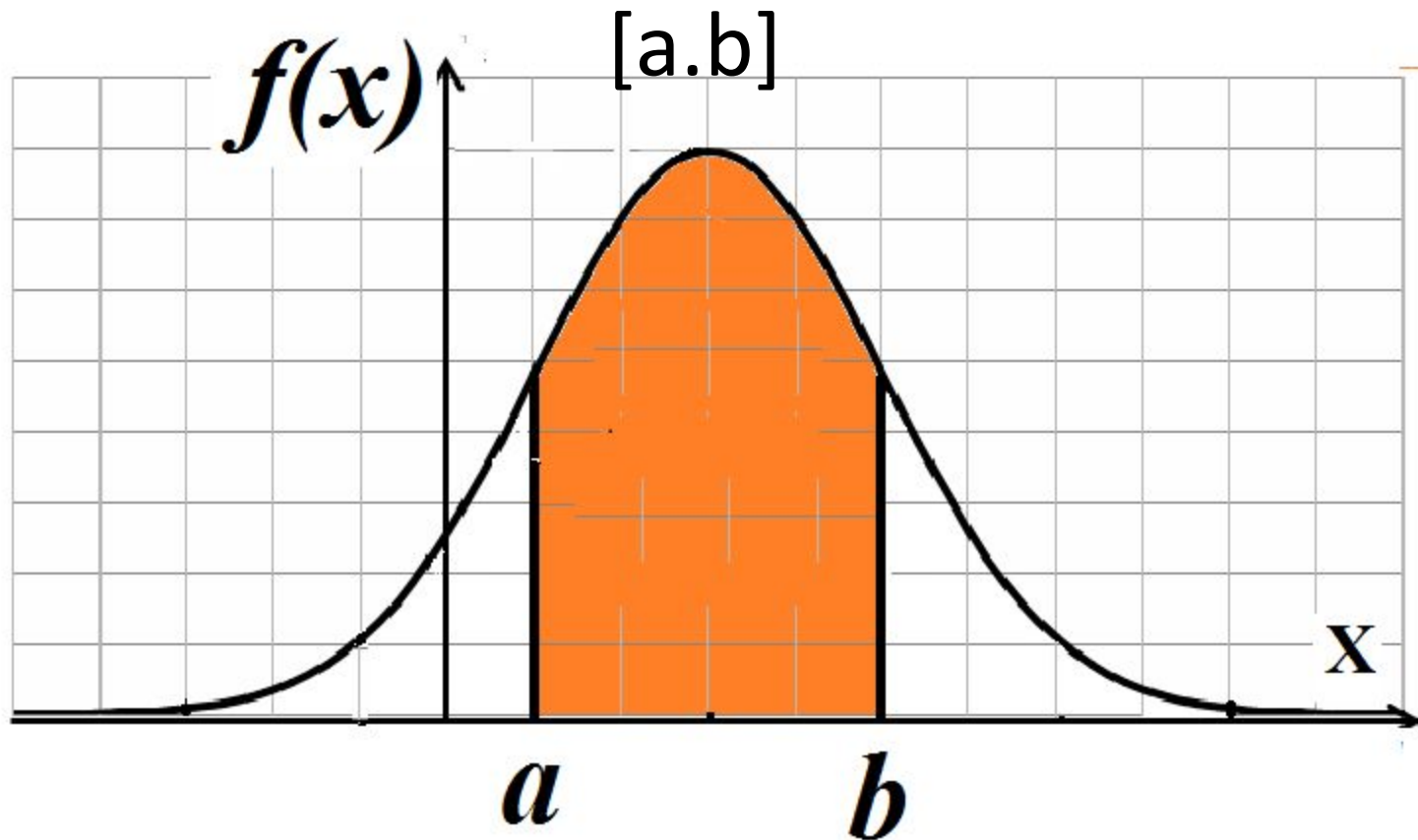
Свойства функции $\Phi(t)$

Нормальная функция распределения.



$$\Phi(0) = 0,5; \quad \Phi(-\infty) = 0; \quad \Phi(+\infty) = 1; \quad \Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$$

Вероятность попадания значений случайной величины в интервал



$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b - M[X]}{\sigma[X]}\right) - \Phi\left(\frac{a - M[X]}{\sigma[X]}\right)$$

Таблицы
нормального
распределения

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0	0,5	0,3	0,6179	0,6	0,7257	0,9	0,8159
0,01	0,504	0,31	0,6217	0,61	0,7291	0,91	0,8186
0,02	0,508	0,32	0,6255	0,62	0,7324	0,92	0,8212
0,03	0,512	0,33	0,6293	0,63	0,7357	0,93	0,8238
0,04	0,516	0,34	0,6331	0,64	0,7389	0,94	0,8264
0,05	0,5199	0,35	0,6368	0,65	0,7422	0,95	0,8289
0,06	0,5239	0,36	0,6406	0,66	0,7454	0,96	0,8315
0,07	0,5279	0,37	0,6443	0,67	0,7486	0,97	0,834
0,08	0,5319	0,38	0,648	0,68	0,7517	0,98	0,8365
0,09	0,5359	0,39	0,6517	0,69	0,7549	0,99	0,8389
0,1	0,5398	0,4	0,6554	0,7	0,758	1	0,8413
0,11	0,5438	0,41	0,6591	0,71	0,7611	1,01	0,8438
0,12	0,5478	0,42	0,6628	0,72	0,7642	1,02	0,8461
0,13	0,5517	0,43	0,6664	0,73	0,7673	1,03	0,8485
0,14	0,5557	0,44	0,67	0,74	0,7704	1,04	0,8508
0,15	0,5596	0,45	0,6736	0,75	0,7734	1,05	0,8531
0,16	0,5636	0,46	0,6772	0,76	0,7764	1,06	0,8554
0,17	0,5675	0,47	0,6808	0,77	0,7794	1,07	0,8577
0,18	0,5714	0,48	0,6844	0,78	0,7823	1,08	0,8599
0,19	0,5753	0,49	0,6879	0,79	0,7852	1,09	0,8621
0,2	0,5793	0,5	0,6915	0,8	0,7881	1,1	0,8643
0,21	0,5832	0,51	0,695	0,81	0,791	1,11	0,8665
0,22	0,5871	0,52	0,6985	0,82	0,7939	1,12	0,8686
0,23	0,591	0,53	0,7019	0,83	0,7967	1,13	0,8708
0,24	0,5948	0,54	0,7054	0,84	0,7995	1,14	0,8729
0,25	0,5987	0,55	0,7088	0,85	0,8023	1,15	0,8749
0,26	0,6026	0,56	0,7123	0,86	0,8051	1,16	0,877
0,27	0,6064	0,57	0,7157	0,87	0,8078	1,17	0,879
0,28	0,6103	0,58	0,719	0,88	0,8106	1,18	0,881
0,29	0,6141	0,59	0,7224	0,89	0,8133	1,19	0,883

Пример 1

- Случайная величина распределена по нормальному закону. Параметры распределения: $a=4$, $\sigma=3$. Найти вероятность того, что случайная величина попадёт в интервал от $(-\infty)$ до 5

$$t_2 = \frac{x - a}{\sigma} = \frac{5 - 4}{3} = 0,33 \quad t_1 = \frac{-\infty - 4}{3} = -\infty$$

$$P(-\infty \leq x \leq 5) = F(5) - F(-\infty) = \Phi\left(\frac{5 - 4}{3}\right) - \Phi(-\infty) =$$

$$\Phi(0,33) - 0 = \boxed{0,62}$$

Пример 2

Случайная величина распределена по нормальному закону. Параметры распределения: $a=4$, $\sigma = 3$

- Чему равно x , если

$$P(X \leq x) = 0,53$$

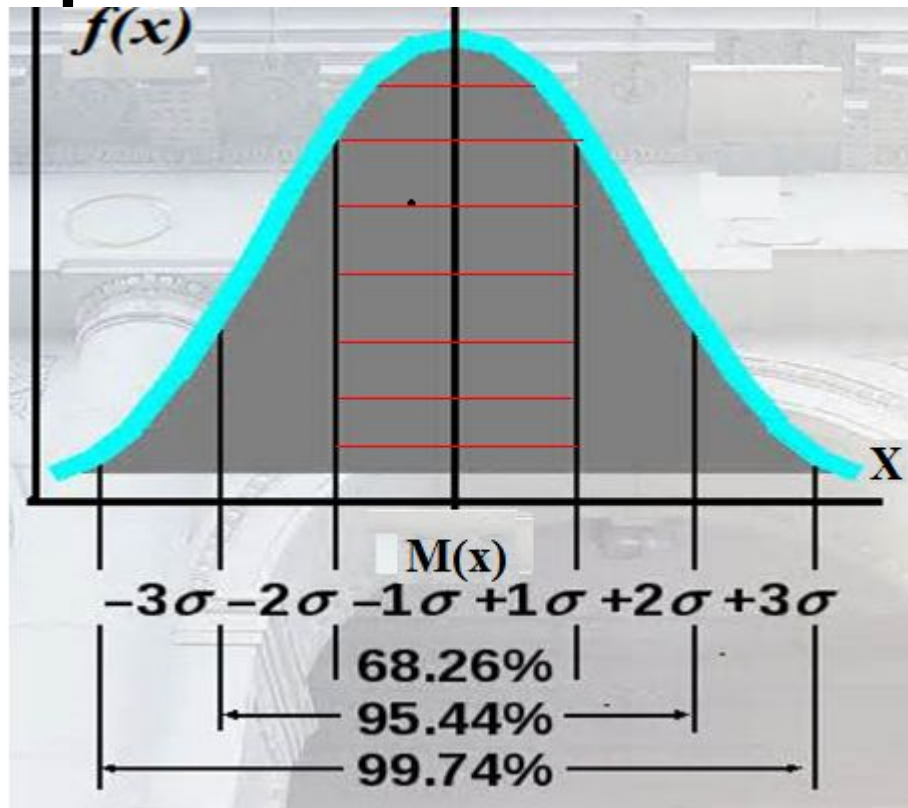
$$P(X \leq x) = F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-4}{3}\right) = 0,53$$

- По таблице находим: для

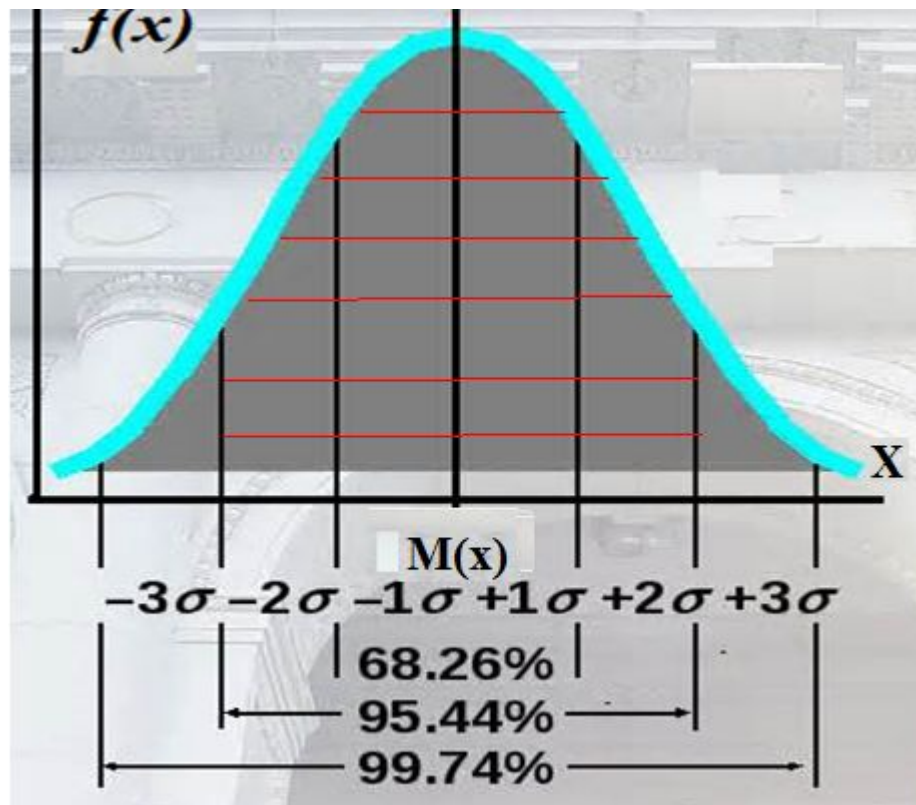
$$\Phi(t) = 0,53 \Rightarrow t \approx 0,08 \Rightarrow \frac{x-4}{3} = 0,08$$

$$0,24 = x - 4 \Rightarrow \boxed{x = 4,24}$$

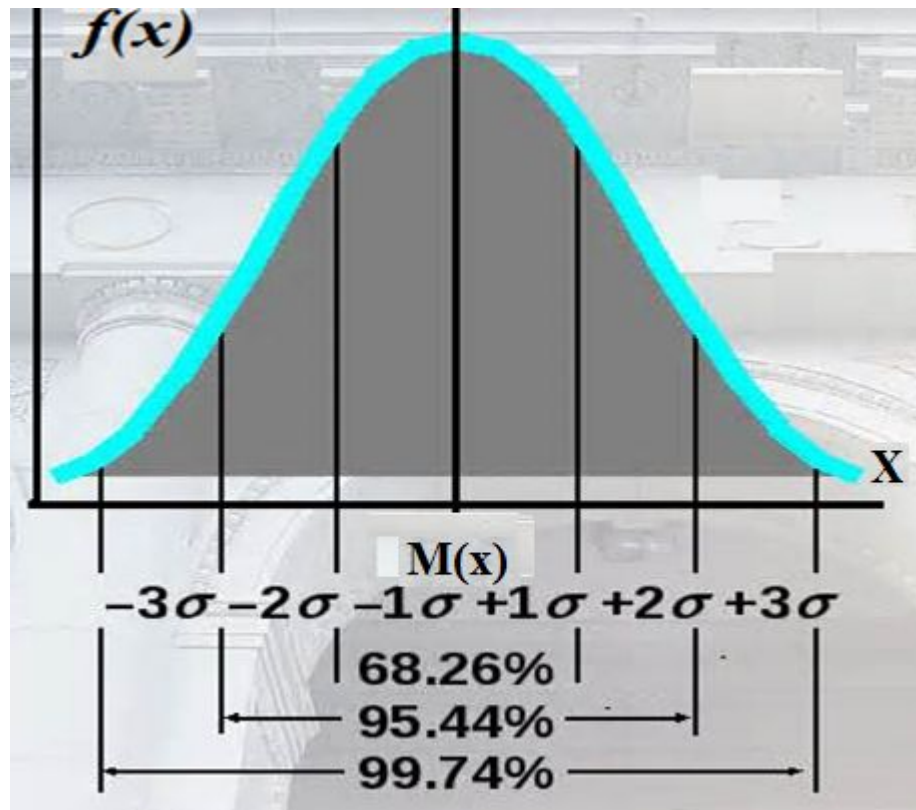
Правило 3-х сигм



$$P(M[X] - \sigma[X] \leq x \leq M[X] + \sigma[X]) = \Phi\left(\frac{M[X] + \sigma[X] - M[X]}{\sigma[X]}\right) - \Phi\left(\frac{M[X] - \sigma[X] - M[X]}{\sigma[X]}\right) =$$
$$= \Phi(+1) - \Phi(-1) = \Phi(+1) - (1 - \Phi(+1)) = 2 \cdot \Phi(+1) - 1 = 2 \cdot 0,84 - 1 = 0,68$$



$$\begin{aligned}
 P(M[X] - 2\sigma[X] \leq x \leq M[X] + 2\sigma[X]) &= \Phi\left(\frac{M[X] + 2\sigma[X] - M[X]}{\sigma[X]}\right) - \Phi\left(\frac{M[X] - 2\sigma[X] - M[X]}{\sigma[X]}\right) = \\
 &= \Phi(+2) - \Phi(-2) = \Phi(+2) - (1 - \Phi(+2)) = 2 \cdot \Phi(+2) - 1 = 2 \cdot 0,977 - 1 = 0,954
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P(M[X] - 3\sigma[X] \leq x \leq M[X] + 3\sigma[X]) &= \Phi\left(\frac{M[X] + 3\sigma[X] - M[X]}{\sigma[X]}\right) - \Phi\left(\frac{M[X] - 3\sigma[X] - M[X]}{\sigma[X]}\right) = \\
 &= \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(+3) - (1 - \Phi(+3)) = 2 \cdot \Phi(+3) - 1 = 2 \cdot 0,9986 - 1 = 0,9972
 \end{aligned}$$

Математическая статистика.

Статистическая совокупность – это множество объектов, обладающих общими признаками, которые являются наиболее важными (типичными) для характеристики этих объектов.

Объём совокупности n – это число членов совокупности

Генеральная совокупность – это совокупность всех объектов, которые имеют типичную характеристику или признак. Это все возможные значения случайной величины. (Объём генеральной совокупности). $n \rightarrow \infty$

Выборочная совокупность (выборка) – это отобранная тем или иным способом часть генеральной совокупности

Варианта – это числовое значение изучаемого признака (отдельные значения случайной величины)

Основные задачи, которые стоят перед математической статистикой

- Определение закона распределения случайной величины по имеющимся статистическим данным (по выборке – закон распределения для всей генеральной совокупности).
- Определение неизвестных параметров распределения (по выборке оценить параметры генеральной совокупности).
- Задача проверки правдоподобия выдвигаемых статистических гипотез

Сбор экспериментальных данных.

1) Получаем **статистический ряд** – совокупность числовых данных или выборку объёмом n :

$$X\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

2) **Производим ранжирование** -- это расположение всех имеющихся вариантов по возрастанию

Пример: при измерении частоты пульса у 10 пациентов получены следующие результаты:

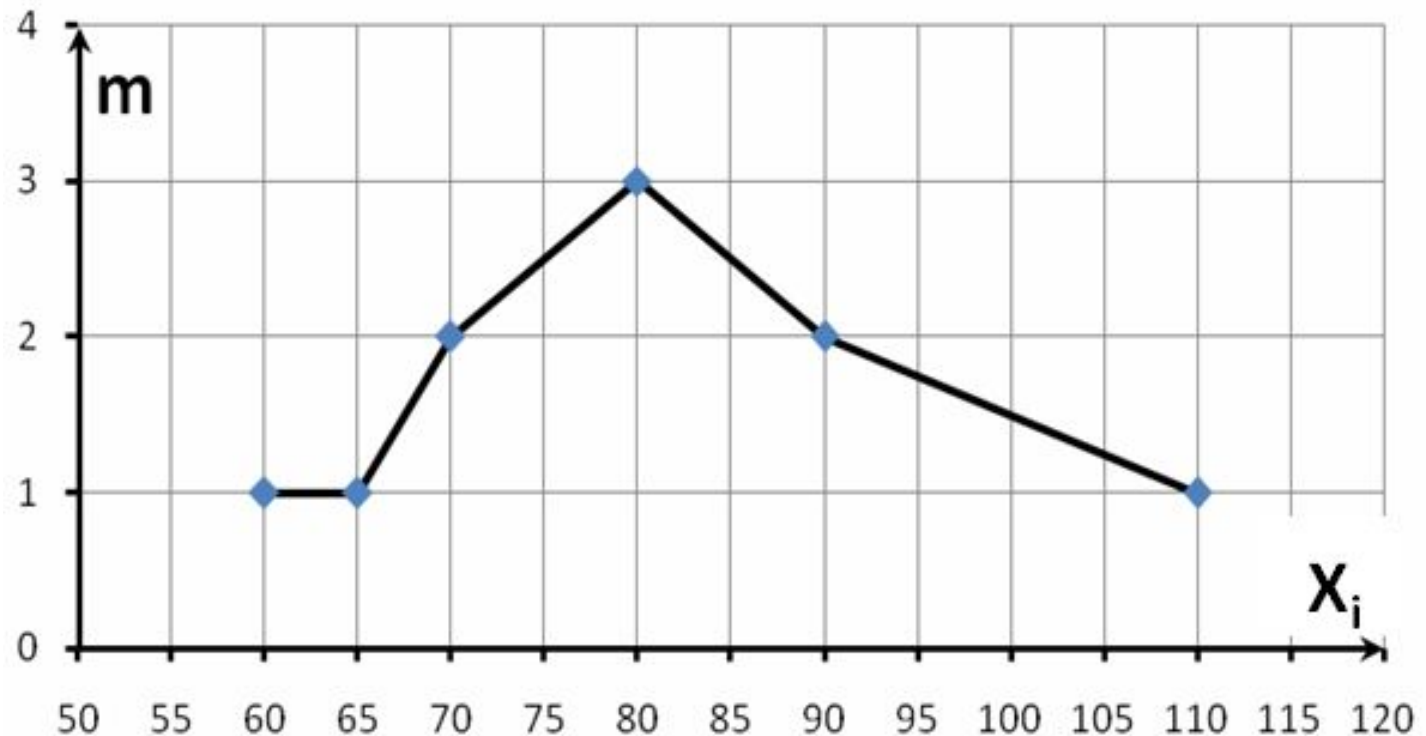
90, 110, 65, 80, 90, 60, 70, 80, 70, 80

Ранжированный ряд имеет вид: 60, 65, 70, 70, 80, 80, 80, 90, 90, 110.

3) Составляем вариационный ряд (статистическое распределение)

Дискретный вариационный ряд это таблица, состоящая из двух строк : конкретных значений вариантов x_i , (сколько раз случайная величина принимала данное значение).

x_i	60	65	70	80	90	110
m_i	1	1	2	3	2	1



ПОЛИГОН
частот

Для непрерывной случайной величины
составляется интервальный вариационный ряд:

Первая строка - интервалы изменения признака,

Вторая строка- частоты, относящиеся к данным интервалам

Число интервалов можно приблизительно определить по формулам:

$$k = \log_2 n \quad \text{-берётся целая часть числа.}$$

$$k = 5 \cdot \ln n \quad \text{-(формула Брукса, 1963)}$$

Длина интервала Δx рассчитывается по формуле:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

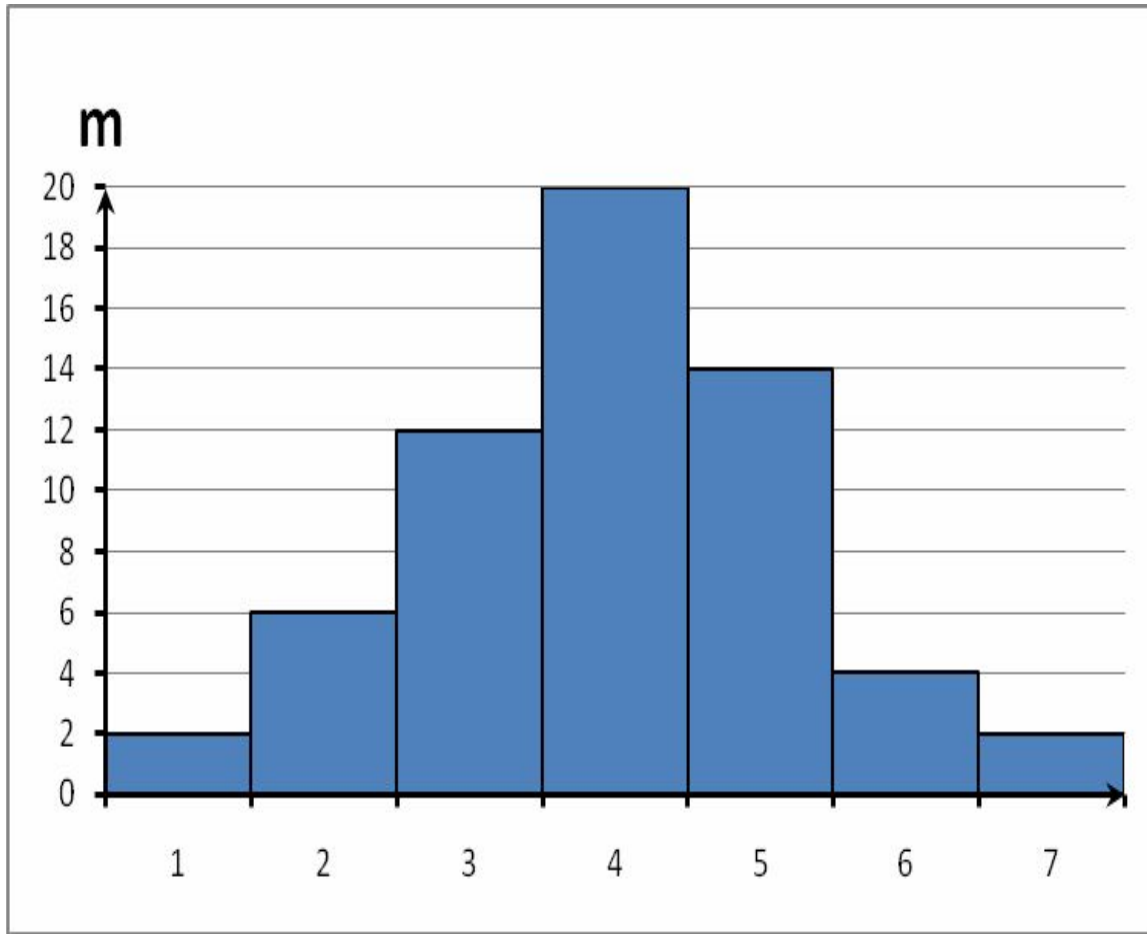
Пример. Анализ веса 60-ти новорожденных дал следующие результаты: min вес 1,5 кг, max вес 5 кг.

$k=7$

$$\Delta x = \frac{5\text{кг} - 1,5\text{кг}}{7} = 0,5 \text{ кг}$$

Интервальный вариационный ряд:

вес x_i (кг)	1,5-2	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4	4-4,5	4,5-5
число новорожд енных m_i	2	6	12	20	14	4	2



Гистограмма:

Статистические характеристики совокупности

Генеральная совокупность
($n \rightarrow \infty$)

Выборка (n -
конечно)

Математическое ожидание Среднее

$$M[X] = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

арифметическое
 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Дисперсия

$$D[X] = \sum_{i=1}^k (x_i - M[X])^2 \cdot P(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^2}{n}$$

Оценка

дисперсии
 $S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Среднее квадратическое
отклонение Оценка

среднеквадратического

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

отклонения
 $S_n = \sqrt{S_n^2}$

Ошибка среднего арифметического

Извлечём из генеральной совокупности N выборок одинакового объёма n , тогда их средние арифметические сами будут являться значениями случайной величины и имеют отклонения от истинного значения $M[X]$.

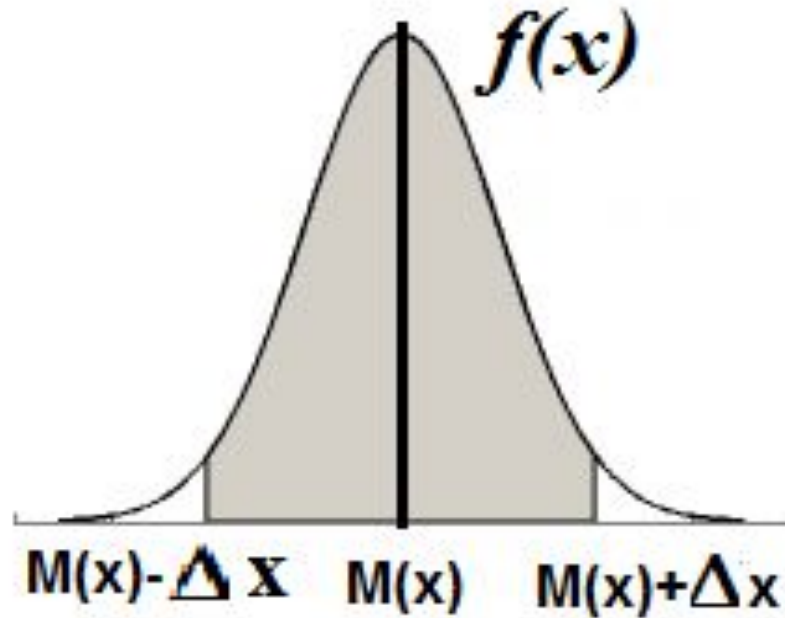
$$\bar{X} \{ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N \}$$

Ошибка среднего арифметического $S_{\bar{x}}$ показывает насколько близко получаемое по выборке среднее арифметическое значение, приближается к истинному среднему $M[X]$ генеральной совокупности

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}}$$

Интервальные оценки параметров

Доверительный интервал
 $M[X] - \Delta x \leq \bar{x} \leq M[X] + \Delta x$

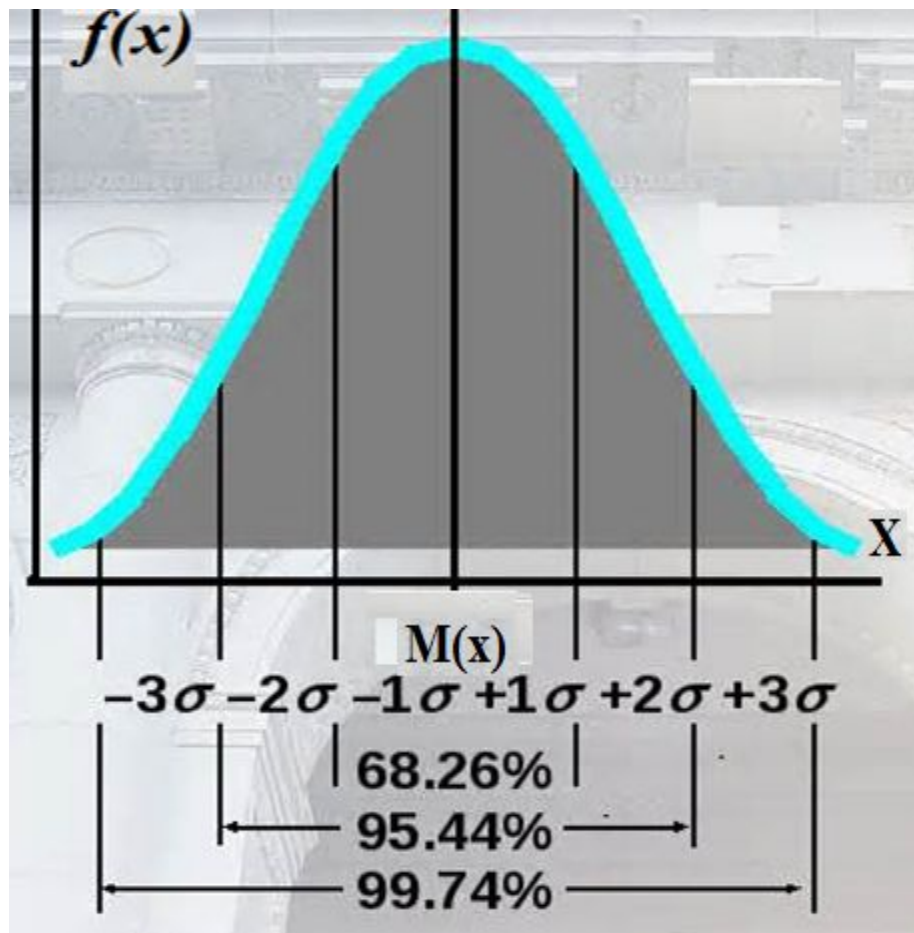


$$\int_{M[X] - \Delta x}^{M[X] + \Delta x} f(x) dx = F(M[X] + \Delta x) - F(M[X] - \Delta x) =$$
$$= P(M[X] - \Delta x \leq \bar{x} \leq M[X] + \Delta x)$$

Доверительным интервалом какого либо параметра, называют такой интервал, о котором можно сказать, что с вероятностью P_D он содержит в себе этот параметр.

Доверительные интервалы для нормального распределения

P_D ($\alpha=1-P_D$)	$\Delta X=t \cdot \sigma$ ($N \rightarrow \infty$)
0,95 (0,05)	$2 \cdot \sigma$
0,99 (0,01)	$3 \cdot \sigma$

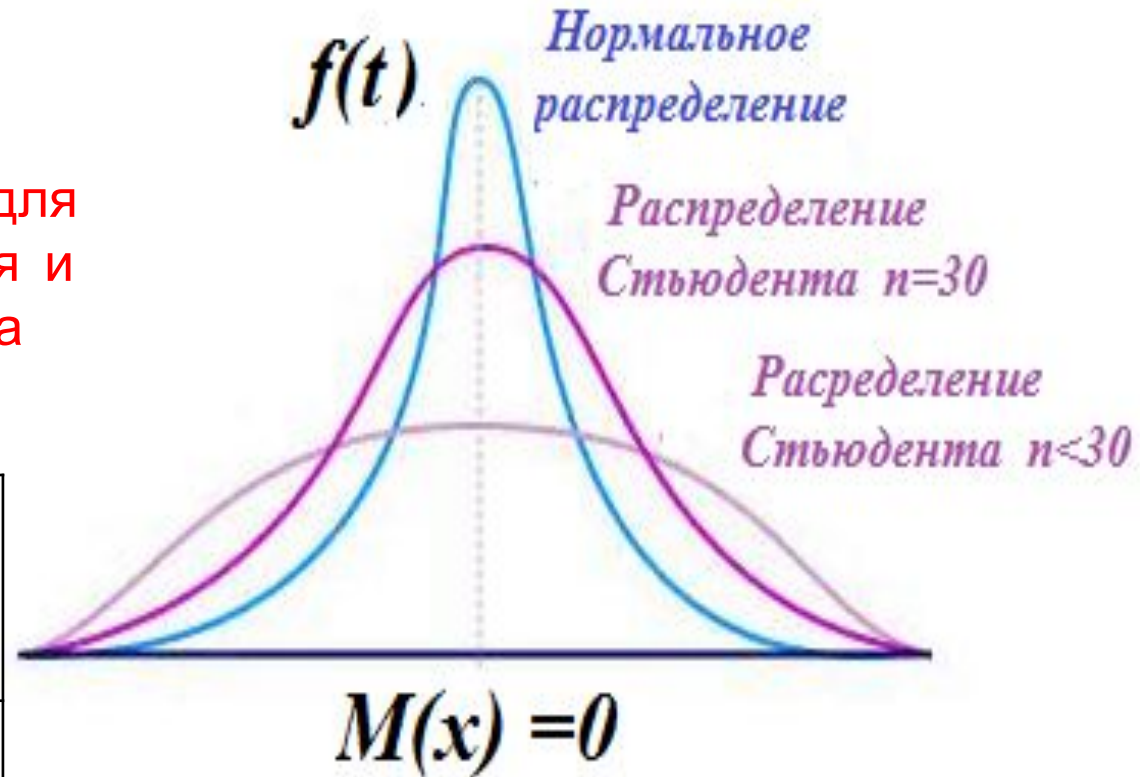


уровень значимости $\alpha=1-P_D$.

Распределение Стьюдента (малые выборки)

Доверительные интервалы для
нормального распределения и
распределения Стьюдента

P_D ($\alpha=1-P_D$)	$\Delta X=t \cdot \sigma$ ($N \rightarrow \infty$)	$\Delta X=t_{St} \cdot S_{\bar{X}}$ ($N=4$)
0,95 (0,05)	$2 \cdot \sigma$	$2,78 \cdot S_{\bar{X}}$
0,99 (0,01)	$3 \cdot \sigma$	$4,60 \cdot S_{\bar{X}}$



$$\Delta X = t_{St}(P_D, n) \cdot S_{\bar{x}} = t_{St}(P_D, n) \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}$$

Пример: При определении концентрации белка в растворе были получены следующие результаты (в мг/л): 110, 112, 115, 113, 114. Найти 1) **среднее значение**, 2) **стандартное отклонение** и 3) **доверительный интервал** для $P_D = 0.95$.

$$\bar{x} = \frac{110 + 112 + 115 + 113 + 114}{5} = 112,8$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}} =$$

$$\sqrt{\frac{(110 - 112,8)^2 + (112 - 112,8)^2 + (115 - 112,8)^2 + (113 - 112,8)^2 + (114 - 112,8)^2}{5 \cdot (5 - 1)}} \\ = \sqrt{\frac{2,8^2 + 0,8^2 + 2,2^2 + 0,2^2 + 1,2^2}{5 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{7,84 + 0,64 + 4,84 + 0,04 + 1,44}{5 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{14,8}{20}} = 0,86$$

$$\Delta x_D = t_{st} \cdot S_{\bar{x}} = 2,8 \cdot 0,86 = 2,4$$

$$\underline{M[X] = 112,8 \pm 2,4 \text{ (МГ/Л)} \quad \text{для } P_D = 0,95}$$

Алгоритм обработки результатов прямых измерений

- 1) Провести серию измерений $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $N \geq 3$.
не менее трех
- 2) Найти среднее арифметическое .
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} .$$
- 3) Вычислить доверительный интервал

$$\Delta x_{\text{ср}} = t_{\text{Ст}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x)^2}{N \cdot (N - 1)}}$$

для заданной доверительной вероятности P_D на приборе,

Алгоритм обработки результатов прямых измерений

- 4) Найти **систематическую ошибку**.
- а). если указан класс точности прибора:

$$\text{Кл.т.} = \frac{\Delta x_{\text{сист}}}{X_{\text{шкалы}}} \cdot 100\% \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{\text{сист}} = \frac{\text{Кл.т.} \cdot X_{\text{шкалы}}}{100\%}$$

где $X_{\text{шкалы}}$ – это предел шкалы (максимальное значение на шкале)

б). если класс точности не указан (например, линейка или термометр)

$$\Delta x_{\text{сист}} = \frac{\text{ЦЕНА ДЕЛЕНИЯ}}{2}$$

5) Вычислить общую ошибку: $\Delta x_{\text{общ}} = \sqrt{\Delta x_{\text{сл.}}^2 + \Delta x_{\text{сист.}}^2}$.

. Эту ошибку называют еще **абсолютной ошибкой**.

Алгоритм обработки результатов прямых измерений

- 6) Записать окончательный результат: .

$$X = \bar{X} \pm \Delta X_{\text{общ}}, \text{ для } P_D = 0,95$$

- 7) Кроме абсолютной ошибки желательно также найти коэффициент вариации (или относительную ошибку, выраженную в процентах):

$$\omega \% = \frac{\Delta X}{\bar{X}} \cdot 100\%.$$

Контрольные вопросы.

- Биномиальное .распределение.
- Распределение Гаусса:
 - а). Параметры распределения.
 - б). Нормированная случайная величина.
 - в). Правило трёх сигм.
- Основные понятия математической статистики.
- Схема предварительной обработки экспериментальных данных.
- Статистические характеристики совокупности.
- Ошибка среднего арифметического.
- Доверительный интервал и доверительная вероятность.
- Распределение Стьюдента.
- Обработка прямых измерений