8.2. Определение производной

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке X.

Выберем точку $x \in X$

Дадим аргументу *x* приращение Δ*x*, тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

<u>Производной</u> функции y=f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению независимого аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Обозначения производной:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df(x)}{dx}$$

Нахождение производной функции называется дифференцированием.

Если функция имеет конечную производную в некоторой точке, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Вернемся к рассматриваемым задачам.

Из задачи о касательной вытекает

геометрический смысл производно

Производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0:

$$k = f'(x_0)$$

Тогда уравнение касательной к кривой в данной точке будет иметь вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Из задачи о скорости движения вытекает

механический смысл производн

Производная пути по времени $S'(t_0)$ есть скорость точки в момент времени t_0:

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

Из задачи о производительности труда вытекает

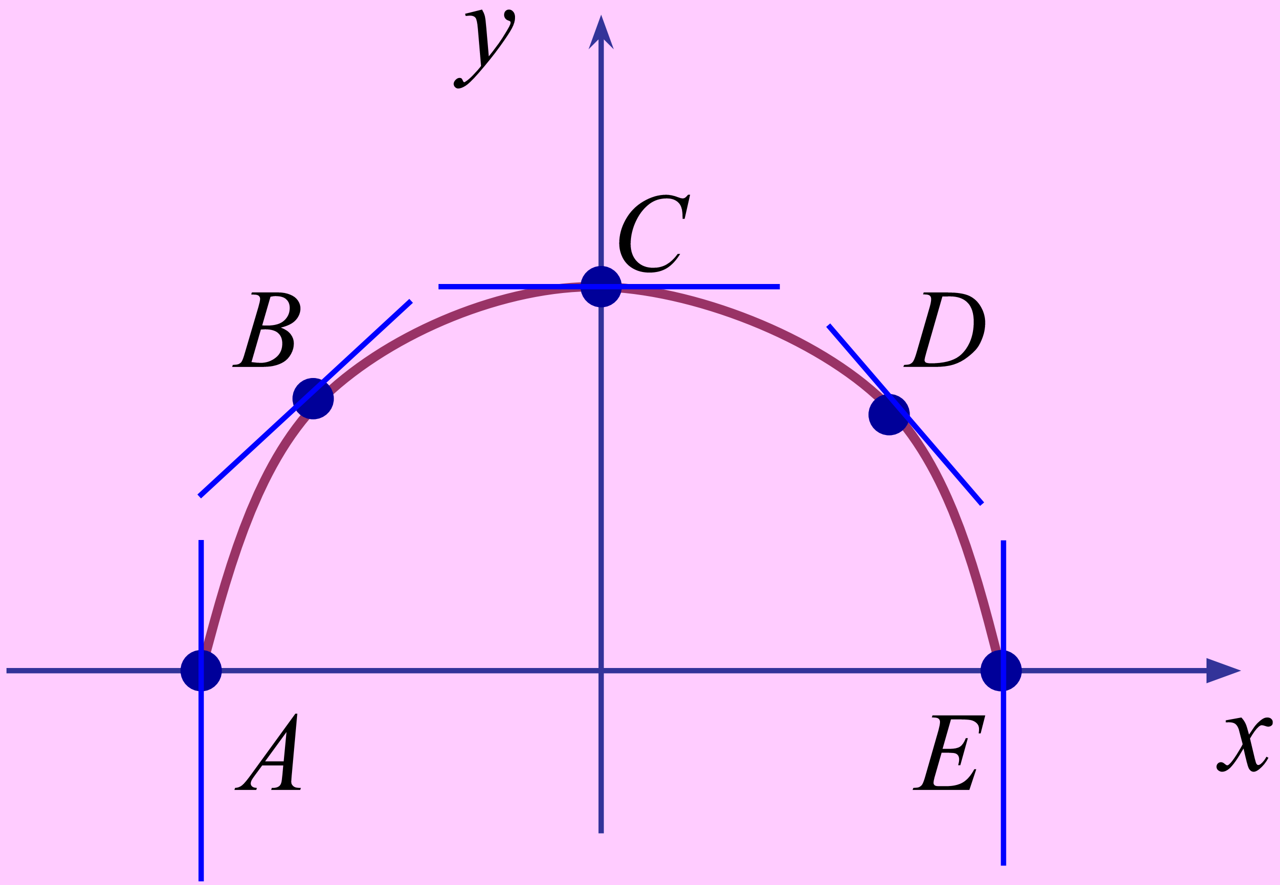
экономический смысл производно

Производная объема производимой продукции по времени $u'(t_0)$ ***есть производительность труда в момент времени*** t_0:

$$z(t_0) = u'(t_0)$$

ПРИМЕР.

График функции $y=f(x)$ есть полуокружность. Найти $f'(x)$ в точках A,B,C,D,E, делящих полуокружность на четыре равные части.



y
C
B
D
A
E
x

Из геометрического смысла производной вытекает, что производная $f^{/}(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0.

В точке B угол наклона касательной составляет 45^0. Следовательно:

$$y'_B = tg45^0 = 1$$

В точке D угол наклона касательной составляет 135^0. Следовательно:

$$y'_D = tg135^0 = -1$$

В точке *C* угол касательная параллельна оси *x*:

$$y'_C = tg0 = 0$$

В точках *A* и *E* угол наклона касательной составляет 90^0.

Тангенс этого угла не существует, следовательно функция в этих точках не дифференцируема.

ТЕОРЕМА

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство:

По условию теоремы функция *y=f(x)* дифференцируема в точке x_0 :

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

На основании *<u>теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций</u>* функцию, стоящую под знаком предела, можно представить как сумму этого предела и бесконечно малой величины:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где *α(Δx)* – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$

Отсюда:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$

Следовательно, по определению непрерывности функции, функция *y=f(x)* непрерывна в точке x_0.

Обратная теорема, в общем случае, неверна.

Например, функция

$$y = |x|$$

непрерывна в точке *x=0*:

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

Проверим, будет ли эта функция дифференцируема в данной точке.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

Т.е. общего предела не существует и функция не дифференцируема в этой точке.

Непрерывность функции является <u>необходимым,</u> <u>но не достаточным</u> условием дифференцируемости функции.

Если функция имеет непрерывную производную на промежутке X, то она называется гладкой на этом промежутке.

Если производная функции имеет конечное число точек разрыва 1 рода, то такая функция называется кусочно-гладкой.