

# **Работа и механическая энергия**

**Лекция №4**

# План лекции

- 1. Работа силы. Мощность.
- 2. Консервативные силы.
- 3. Кинетическая энергия.
- 4. Потенциальная энергия.
- 5. Закон сохранения энергии.
- 6. Применение законов сохранения импульса и энергии к расчету абсолютно упругого и неупругого ударов:
  - А) Абсолютно неупругий удар;
  - Б) Абсолютно упругий удар.

# Энергия

- Энергия – это универсальная и наиболее общая характеристика всех форм движения материи и их превращений друг в друга.
- Энергией называется СФВ изменение, которой равна работе совершаемой в данном процессе.

$$\Delta W = A$$

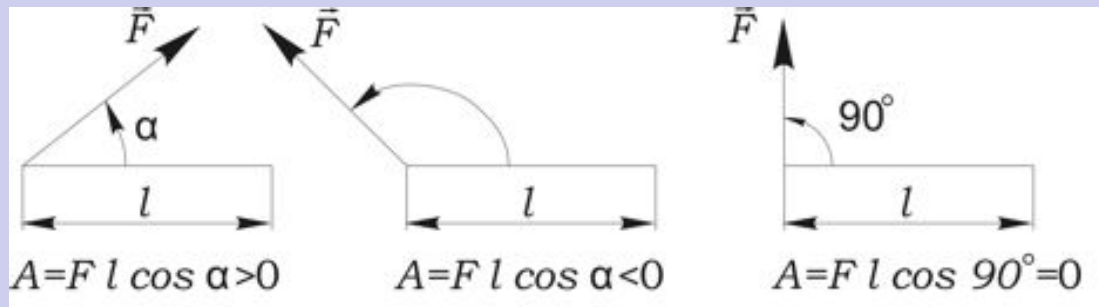
- Для различных форм движения и соответствующих им взаимодействий в физике рассматривают следующие виды энергии: механическую; внутреннюю; электромагнитную; ядерную и т.д.

- В механике рассматривается *механическая энергия*.
- **Механическая энергия** тела – СФВ, являющаяся мерой его механического движения и механического взаимодействия и зависящая от массы тела, скорости его движения и расстояния до других тел или расстояния между частицами одного и того же тела.
- Для количественного описания *механического движения* тела, при котором происходит изменение энергии тела, в механике вводят понятие **работы силы**.

# **1. Работа силы. Мощность**

Работа  $A$  силы – СФВ, характеризующая процесс передачи механического движения от одного тела к другому и равная скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

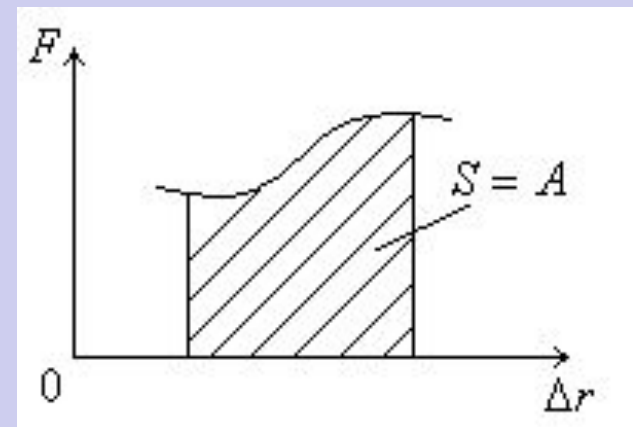
$$A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cos \alpha \quad \text{где } \alpha = \left( \vec{F}, \Delta \vec{r} \right)$$



$$[A] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж (джоуль)}$$

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{— элементарная работа}$$

$$A = \int \delta A = \int_{r_1}^{r_2} F dr$$



## Мощность силы

**Мощность  $N$  ( $P$ ) силы** – СФВ, характеризующая быстроту совершения работы и равная производной работы по времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt}$$

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t} \text{ - средняя мощность}$$

$$[N] = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ Вт (ватт)}$$

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

## 2. Консервативные силы

Если на частицу в каждой точке пространства подвержена воздействию других тел, то эта частица находится в поле сил.

- Поле сил называется **центральный**, если направление силы действующей на частицу в любой точке пространства, проходит через ее неподвижный центр, а величина силы зависит от расстояния до этого центра.

Примеры полей: *гравитационное* и *электростатическое*.

- Поле называется **однородным**, если силы действующие на частицу *одинаковы* по **величине** и **направлению** ( $F = const$ ).
- Поле называется **стационарным**, если оно не изменяется с течением времени. Поле изменяющееся со временем, называется **нестационарным**.

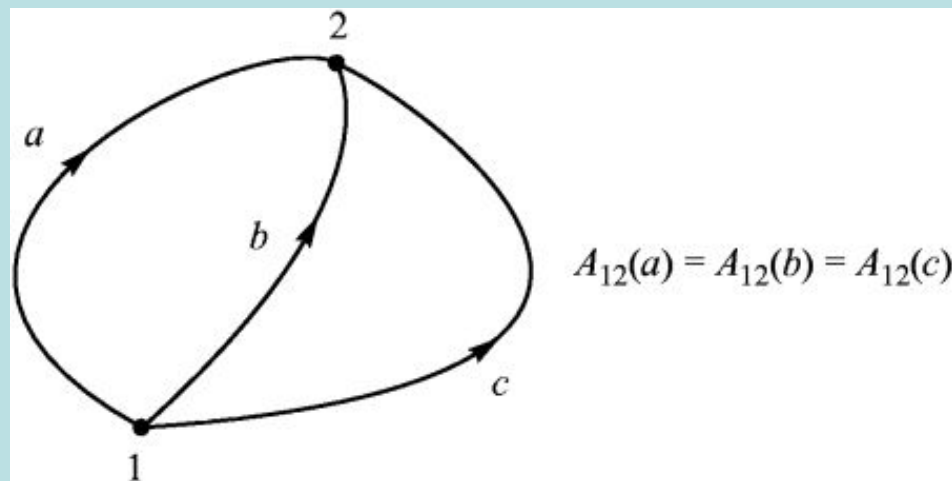


- Для **стационарного поля** работа, совершаемая над частицей силами поля, зависит лишь только от **начального** и **конечного** положения частицы и не зависит от **пути**, по которому двигалась частица. Силы, обладающие таким **свойством**, называются **консервативными силами**.
- **Консервативная сила** – это сила, работа которой не зависит от формы траектории.

По замкнутой траектории работа такой силы равна нулю:

$$A_{\text{замк}} = 0.$$

$$A = \oint_{(L)} \vec{F} d\vec{r} = 0$$



Примеры - сила тяжести, сила упругости, сила Кулона, сила Ампера и др.

**Консервативные силы** можно определить двумя способами:

- 1) Как силы, работа которых не зависит от **пути**, по которому частица переходит из одного положения в другое;
- 2) Как силы, работа которых на **любом замкнутом пути** равна **нулю**.

Работа совершаемая **силой тяжести** в поле Земли определяется по формуле:

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2)$$

Из этой формулы видно, что работа в поле силы тяжести не зависит от пути. Отсюда следует, что **сила тяжести** является **консервативной силой**.

- **Диссипативная** (неконсервативная) **сила** – это сила, работа которой **зависит** от формы траектории.

**Примеры** - силы трения, силы сопротивления движению, сила тяги, сила давления газа и др.

# 3. Кинетическая энергия

- В механике различают два вида **механической энергии**: **кинетическую** и **потенциальную**.
- **Кинетической энергией** механической системы называется энергия механического движения этой системы.

Изменение кинетической энергии м.т. происходит под действием приложенной к ней силы  $F$  и равно работе совершаемой этой силой.

$$\Delta W_k = A$$

- Кинетическая энергия  $W_k$  тела - СФВ, являющаяся мерой его механического движения и равная половине произведения массы частицы на квадрат ее скорости, т.е.

$$W_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$A = \Delta W_k$$

- теорема о кинетической энергии

- Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех частей этой системы:

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

- Кинетическую энергию **твёрдого тела** движущегося **поступательно** можно найти по формуле:

$$W_k = \frac{m v^2}{2}$$

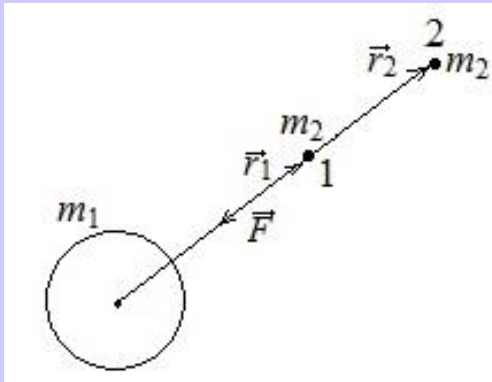
где  $m$  – масса всего тела.

- Кинетическая энергия системы есть функция состояния ее механического движения  $f(v)$ , т.е. она полностью определяется значением масс и скоростей входящих в неё тел (м.т.).
- Кинетическая энергия системы в отличии от её импульса **не зависит** от того, в каких направлениях движутся её части (тела или м.т. входящие в рассматриваемую механическую систему).

## 4. Потенциальная энергия

- **Потенциальная энергия** - СФВ, являющаяся мерой механического взаимодействия тел или частей тела. Она является непрерывной однозначной и дифференцируемой функцией, зависящей от расстояния между телами или расстояния между частицами одного тела.

# Потенциальная энергия тела в гравитационном поле

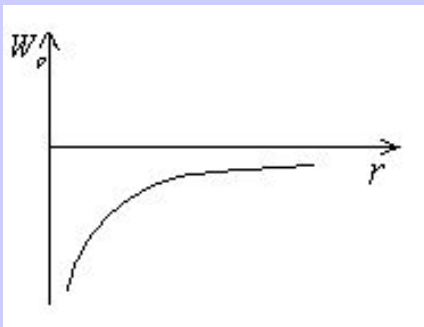


$$A = -\int_{r_1}^{r_2} F dr = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = \gamma \left( \frac{m_1 m_2}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} =$$
$$= -\left[ -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} - \left( -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} \right) \right] = -\Delta W_p$$

$$A = -\Delta W_p$$

$$W_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

- потенциальная энергия тела в гравитационном поле

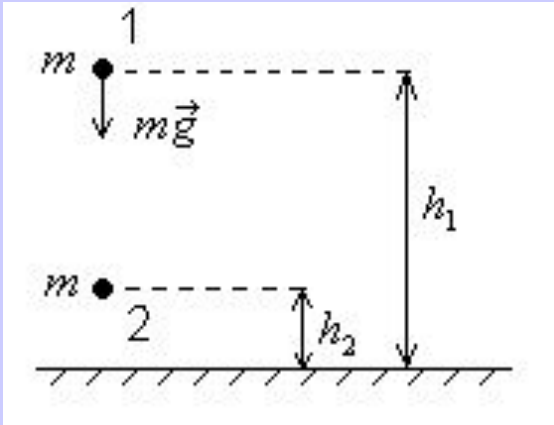


$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad W_p \rightarrow 0$$

Значение потенциальной энергии можно определить с точностью до некоторой постоянной, поэтому выбор начала отсчета условен.

Обычно за нулевой уровень энергии принимают потенциальную энергию бесконечности.

# Потенциальная энергия тела, поднятого над Землей



$$F_{\text{тяж}} = \text{const}$$

$$A = |\vec{F}| \cdot |\Delta r| \cos 0^\circ = mg(h_1 - h_2) = -(mgh_2 - mgh_1)$$

$$W_p = mgh$$

- потенциальная энергия тела поднятого над землей (при  $h \ll R_3$ ).

$$A = -\Delta W_p$$

- теорема о потенциальной энергии:

Работа внешних консервативных сил равна убыли потенциальной энергии тела.



# Потенциальная энергия упруго деформированного тела

Воспользуемся законом Гука:  $F_{yx} = -kx = -kr_x$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_y dr = \int_{r_1}^{r_2} -kr dr = -k \int_{r_1}^{r_2} r dr = -k \frac{r^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2} = -\left( \frac{kr_2^2}{2} - \frac{kr_1^2}{2} \right)$$

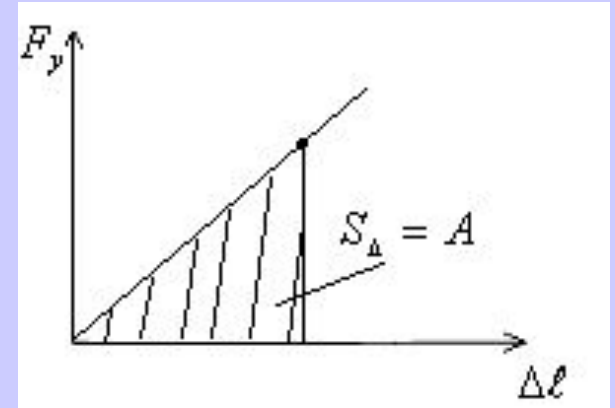
Заменим  $r_1$  и  $r_2$  на  $x_1$  и  $x_2$  соответственно:

$$A = -\left( \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right)$$

Согласно теореме о потенциальной энергии  $A = -\Delta W_p$

$W_p = \frac{kx^2}{2}$	- потенциальная энергия упругого деформированного тела
------------------------	--

Согласно закону Гука  $F_y = k\Delta l$ . Построим график:  
 Учтем, что  $F_y$  является переменной силой.



$$A = -\Delta W_p = W_{p0} - W_p = -W_p$$

$$A = S_{\Delta} = \frac{1}{2} F_y \Delta l = \frac{\sigma S \Delta l}{2} = \frac{E \varepsilon S \Delta l}{2} \frac{l_0}{l_0}$$

С учетом того, что  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  и  $V = S l_0$ , имеем:

$$W_p = \frac{E \varepsilon^2}{2} V$$

$$w = \frac{W}{V}$$

- объемная плотность энергии тела

$$w = \frac{E \varepsilon^2}{2}$$

- объемная плотность энергии упруго деформированного тела

# Связь консервативной силы и потенциальной энергии

- Применим теорему о потенциальной энергии к элементарной работе консервативной силы:

$$\delta A = -dW_p,$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dW_p$$

$$\vec{F} = -\frac{dW_p}{d\vec{r}}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad \text{- оператор Гамильтона (набла-оператор)}$$

$$\nabla W_p = \text{grad} W_p$$

Вектор градиента скалярного поля – это вектор, показывающий направление наибольшего возрастания данной скалярной функции и равный производной данной функции по координатам.

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad} W_p}$$

- связь между консервативной силой и потенциальной энергией

# 5. Закон сохранения энергии

**Полная механическая энергия системы тел** – это энергия **механического движения** и **взаимодействия** – равна сумме ее **кинетической** и **потенциальной** энергий:

$$W = W_k + W_p$$

На **м.т.** (тела) механической системы могут действовать как **внутренние**, так и **внешние силы**, которые могут быть **консервативными** и **неконсервативными**.

- Если механическая система замкнута и консервативна, то на нее не действуют внешние силы, тогда работа *внешних сил* равна нулю.
- Для таких систем выполняется *закон сохранения механической энергии*.

- **Закон сохранения механической энергии:**

- Полная механическая энергия замкнутой системы тел между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.

$$W_{\text{пол}} = W_k + W_p = \text{const}$$

- Закон сохранения механической энергии является основным законом механики.
- Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени. Однородность времени проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчета времени.

- Если система замкнута, то изменение ее механической энергии обусловлено только действием в ней непотенциальных сил:

$$\Delta W = A^{\text{нпс}}$$

- Системы, в которых действуют непотенциальные силы и их механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии, то они называются **диссипативными системами**.
- **Диссипация** это **рассеяние**, в данном случае рассеяние энергии.
- В природе все системы являются диссипативными.
- Закон сохранения и превращения энергии – **фундаментальный закон природы**, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.

**6. Применение законов сохранения  
импульса и энергии  
к расчету абсолютно упругого и  
неупругого ударов:**

- А) Абсолютно неупругий удар
- Б) Абсолютно упругий удар

# Удар

- **Ударом** называется **явление** изменение скоростей тел на конечные значения за очень короткий промежуток времени, происходящее при их столкновениях.
- **Силы взаимодействия** (внутренние силы) между сталкивающимися телами столь велики, что *внешними силами*, действующими на них можно **пренебречь**. Это позволяет систему тел в процессе их соударения приближенно рассматривать как **замкнутую систему** и применять к ней **законы сохранения**.
- Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами.



- В природе нет **идеально упругих тел** и **идеально гладких поверхностей**, поэтому относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел *после удара* и *до удара* называется **коэффициентом восстановления  $\varepsilon$** :

$$\varepsilon = \frac{v'_n}{v_n}$$

- где  $v_n$  – скорость тела до удара,  $v'_n$  – скорость тела после удара.
- Если для сталкивающихся тел  $\varepsilon=0$ , то такие тела называются **абсолютно неупругими**, если  $\varepsilon=1$  – **абсолютно упругими**.
- Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется **линией удара**.
- **Удар** называется **прямым**, если перед ударом скорости центров масс соударяющихся тел параллельны линии удара, в противном случае удар называется **косым**.
- **Удар** называется **центральный**, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

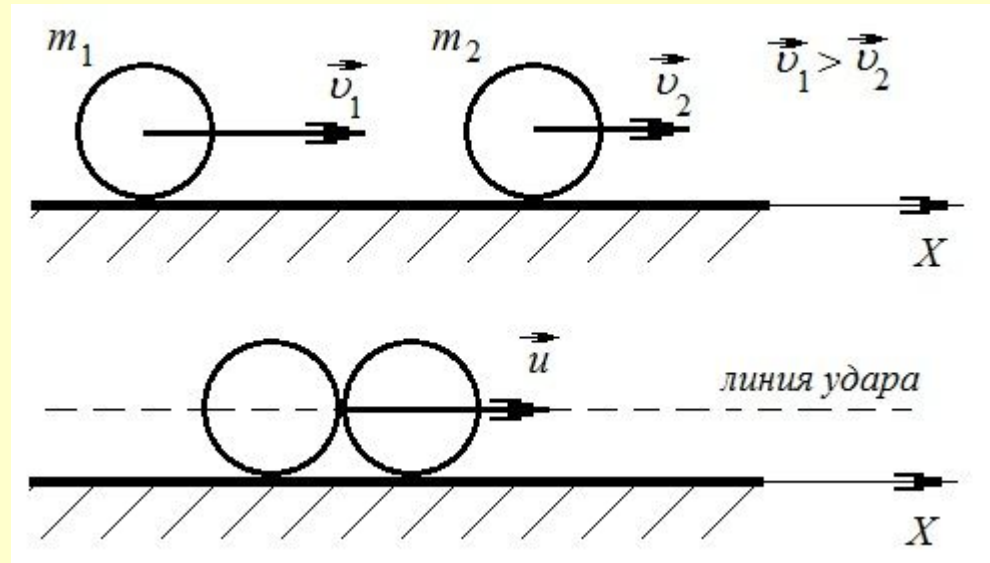
# Абсолютно неупругий удар

- Удар называется абсолютно неупругим, если после удара тела объединяются и дальше движутся как одно целое, т.е. с одной и той же скоростью.

При абсолютно неупругом ударе выполняется закон сохранения импульса, а закон сохранения энергии не выполняется.

$m_1$  и  $m_2$  – массы соударяющихся тел,  $v_1$  и  $v_2$  – скорости этих тел до удара, найдем скорость  $u$  этих тел после удара.

Запишем закон сохранения импульса:



$$\overset{\nabla}{p}_1 + \overset{\nabla}{p}_2 = \overset{\nabla}{p}'_1 + \overset{\nabla}{p}'_2 = const$$

$$m_1 \overset{\nabla}{v}_1 + m_2 \overset{\nabla}{v}_2 = m_1 \overset{\nabla}{u} + m_2 \overset{\nabla}{u}$$

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_x$$

$$u_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

- При абсолютно неупругом ударе закон сохранения энергии не выполняется, так как часть механической энергии переходит во внутреннюю (в тепло), т.е. соударяющиеся тела нагреваются.

$$\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} < 0$$

$$Q = W_{k1} - W_{k2}$$

$$W_{k1} = \frac{m_1 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} \qquad W_{k2} = \frac{m_1 u_x^2}{2} + \frac{m_2 u_x^2}{2}$$

# Абсолютно упругий удар

- Абсолютно упругим ударом называется такой удар, при котором механическая энергия соударяющихся тел не преобразуется в другие виды энергии.
- При абсолютном упругом ударе выполняются законы сохранения *импульса* и *энергии*.
- При абсолютно упругом ударе происходит перераспределение *механической энергии* между соударяющимися телами, и после удара тела движутся с разными **скоростями**.
- В процессе удара систему соударяющихся упругих тел можно считать замкнутой и консервативной.

$m_1$  и  $m_2$  – массы соударяющихся тел,  $v_1$  и  $v_2$  – скорости этих тел до удара, найдем скорость  $u_1$  и  $u_2$  этих тел после удара.

Запишем **закон сохранения энергии**:

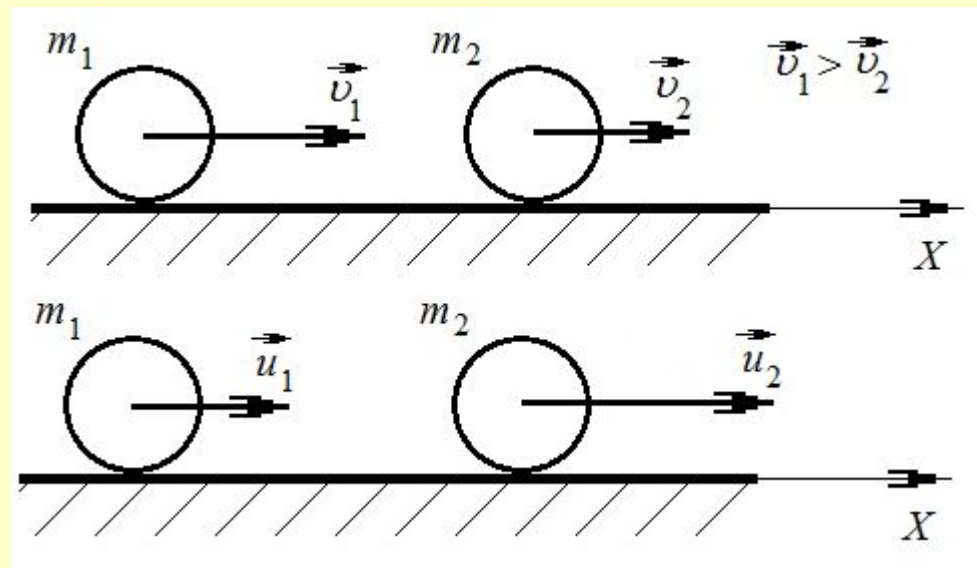
$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$$

Запишем **закон сохранения импульса**:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

т.к. все скорости направлены вдоль оси  $Ox$ , то из ЗСИ следует, что

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}$$



ЗСЭ запишем в следующем виде

$$m_1 v_{1x}^2 - m_1 u_{1x}^2 = m_2 u_{2x}^2 - m_2 v_{2x}^2 \quad | \times -1$$

$$m_1 (u_{1x}^2 - v_{1x}^2) = -m_2 (u_{2x}^2 - v_{2x}^2)$$

ЗСИ запишем в следующем форме

$$m_1 (u_{1x} - v_{1x}) = -m_2 (u_{2x} - v_{2x})$$

теперь перепишем ЗСЭ

$$m_1 (u_{1x} + v_{1x})(u_{1x} - v_{1x}) = -m_2 (u_{2x} + v_{2x})(u_{2x} - v_{2x})$$

- Произведя сокращения получим:

$$u_{1x} + v_{1x} = u_{2x} + v_{2x}$$

- Выразим скорость второго тела после удара

$$u_{2x} = u_{1x} + v_{1x} - v_{2x}$$

- Эту формулу подставим в ЗСИ, получим

$$u_{1x}(m_1 + m_2) = m_1 v_{1x} - m_2 v_{1x} + 2m_2 v_{2x}$$

- Из этого уравнения находим скорость первого тела после удара:

$$u_{1x} = \frac{v_{1x}(m_1 - m_2) + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

- Произведя аналогичные рассуждения получаем формулу для расчёта скорости второго тела после удара:

$$u_{2x} = \frac{v_{2x}(m_2 - m_1) + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}$$