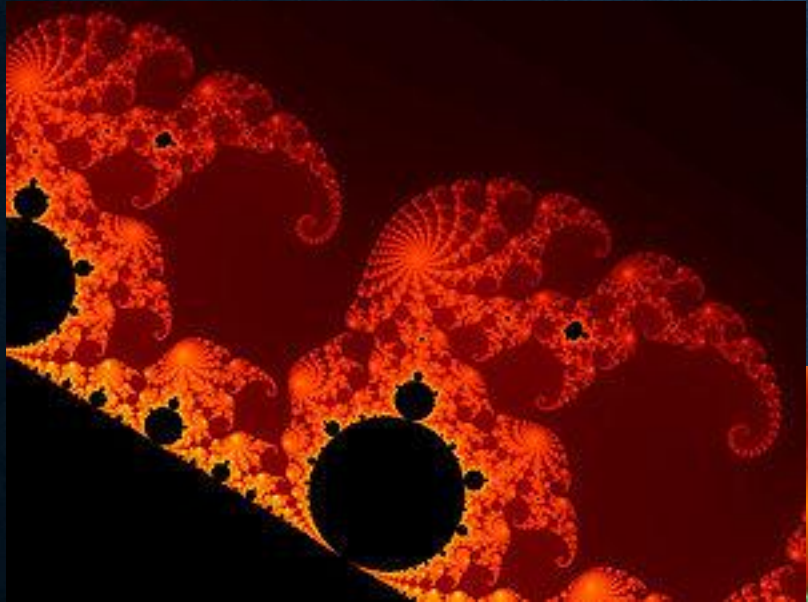


Фрактали

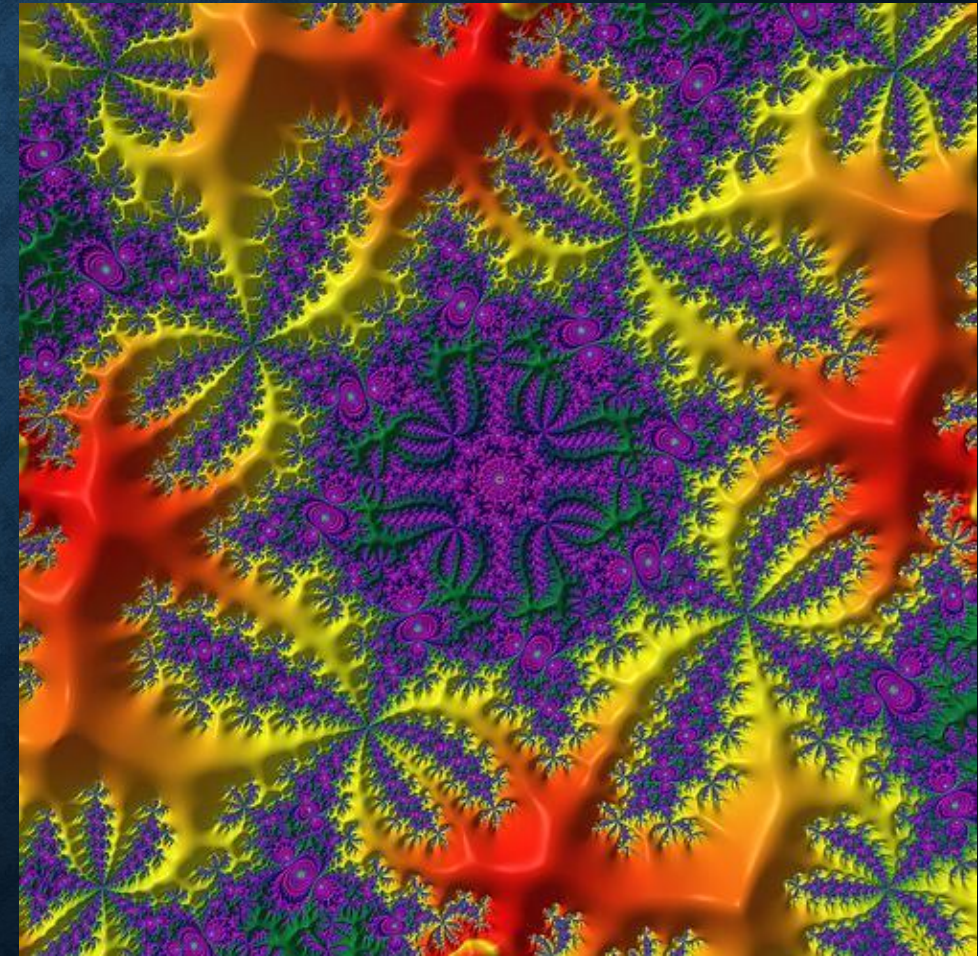


Фрактал (лат. *fractus* — подрібнений, дробовий) — нерегулярна, самоподібна структура. В широкому розумінні фрактал означає фігуру, малі частини якої в довільному збільшенні є подібними до неї самої.

Термін *фрактал* увів 1975 року Бенуа Мандельброт.



В 1975 році Мандельброт використав слово *фрактал*. Він проілюстрував своє математичне означення захоплюючими зображеннями, зробленими за допомогою комп'ютера. Ці зображення привернули велику увагу; багато з них базувалися на рекурсії, що призвело до появи поширеного розуміння слова *фрактал*.



Самоподібні множини з незвичайними властивостями в математиці

Починаючи з кінця XIX століття, в математиці з'являються приклади самоподібних об'єктів з патологічними з точки зору класичного аналізу властивостями. До них можна віднести наступні:

- множина Кантора — ніде не щільна незліченна досконала множина. Модифікувавши процедуру, можна також отримати ніде не щільну множину позитивної довжини;
- трикутник Серпінського («скатертина») і килим Серпінського — аналоги множини Кантора на площині;
- губка Менгера — аналог множини Кантора в тривимірному просторі;
- приклади Вейерштраса і ван дер Вардена ніде не диференційованої неперервної функції;
- крива Коха — неперервна крива, що не перетинається, нескінченної довжини, яка не має дотичної ні в одній точці;
- крива Пеано — неперервна крива, що проходить через всі точки квадрата;
- траєкторія броунівської частинки також з імовірністю 1 ніде не диференційована. Її хаусдорфова розмірність дорівнює двом.

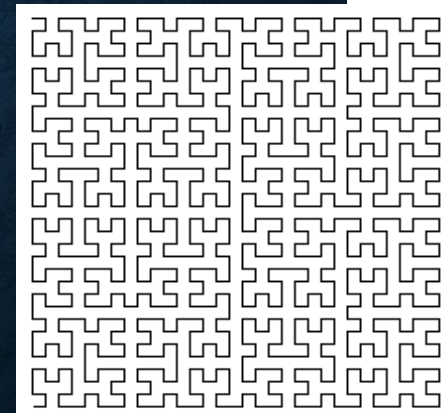
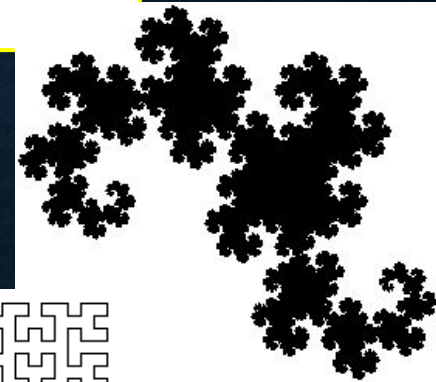
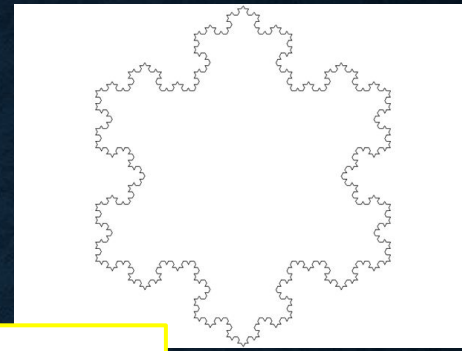
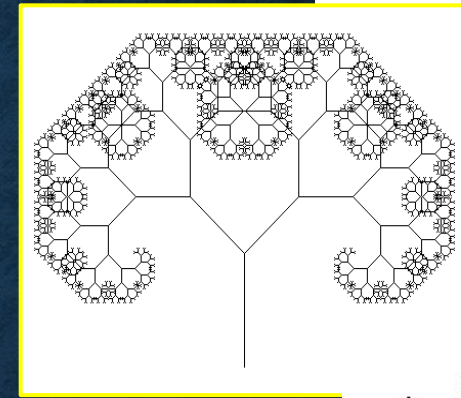
Рекурсивна процедура отримання фрактальних кривих

Існує проста рекурсивна процедура отримання фрактальних кривих на площині. Задамо довільну ламану з кінцевим числом ланок, звану генератором. Далі, замінимо в ній кожен відрізок генератором (точніше, ламаною, подібною генератору). У цій ламаній знову замінимо кожний відрізок генератором. Продовжуючи до нескінченності, в межі отримаємо фрактальну криву.

Прикладами таких кривих слугують :

- крива Коха (сніжинка Коха);
- крива Леві;
- крива Міньковського;
- крива Гільберта;
- ломана (крива) дракона (Фрактал Хартера—Хейтуея);
- крива Пеано.

За допомогою схожої процедури виходить дерево Піфагора.



Стохастичні фрактали

Природні об'єкти часто мають фрактальну форму. Для їх моделювання можуть застосовуватися стохастичні (випадкові) фрактали. Приклади стохастичних фракталів:

- траєкторія броунівського руху на площині і в просторі;
- межа траєкторії броунівського руху на площині. У 2001 році Лоулер, Шрамм і Вернер довели припущення Мандельброта про те, що її розмірність дорівнює $4/3$;
- еволюції Шрамма—Левнера — конформно — інваріантні фрактальні криві, що виникають в критичних двовимірних моделях статистичної механіки, наприклад, в моделі Ізінга і перколяції;
- різні види рандомізованих фракталів, тобто фракталів, отриманих за допомогою рекурсивної процедури, в яку на кожному кроці введений випадковий параметр.

Плазма — приклад використання такого фрактала в комп'ютерній графіці.



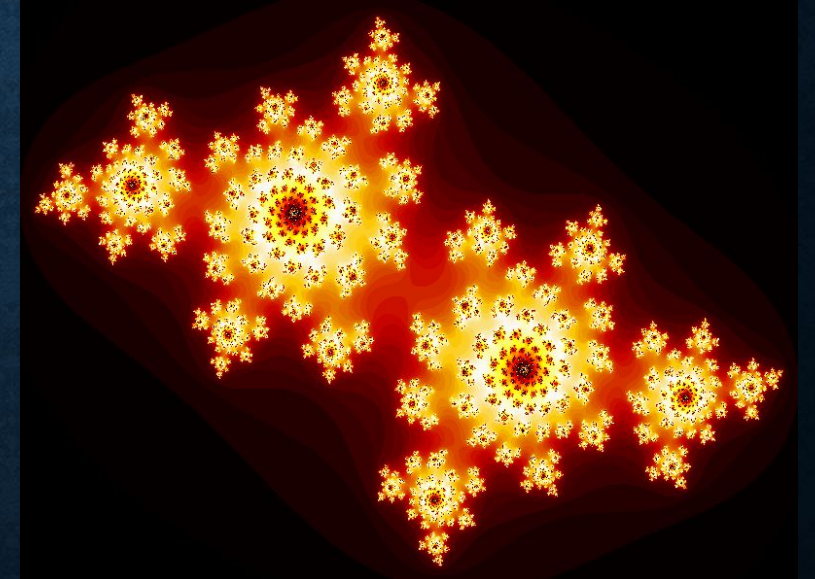
Генерування фракталів

Три поширені методи генерування фракталів:

Ітераційні функції — будуються відповідно до фіксованого правила геометричних заміщень. Множина Кантора, килим Серпінського, трикутник Серпінського, крива Пеано, крива Коха, крива дракона, Т-Квадрат та губка Менгера є прикладами таких фракталів.

Рекурентні відношення — Фрактали, що визначаються рекурентним відношенням в кожній точці простору (такому як площина комплексних чисел). Прикладами фракталів цього типу є множина Мандельброта, палаючий корабель та фрактал Ляпунова.

Випадкові процеси — Фрактали, що генеруються з використанням стохастичних, а не детермінованих процесів, наприклад: фрактальні ландшафти, траєкторія Леві та броунівське дерево. Останній утворює так звані кластери дифузійних концентратів



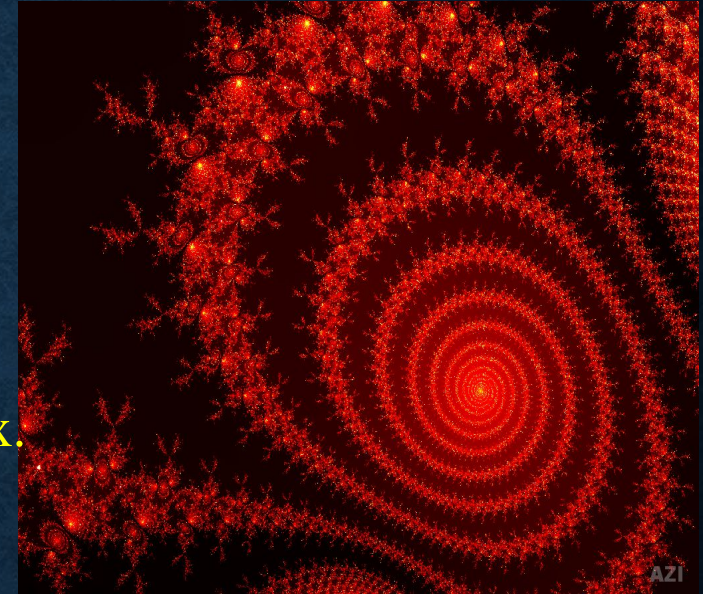
Класифікація фракталів

Фрактали також можна класифікувати відповідно до їхньої самоподібності. Розрізняють три типи самоподібності у фракталах:

Точна самоподібність — Це найсильніший тип самоподібності; фрактал виглядає однаково при різних збільшеннях. У фракталів, згенерованих з використанням ітераційних функцій, часто виявляється точна самоподібність.

Майже самоподібність — Слабка форма самоподібності; фрактал виглядає приблизно (але не точно) самоподібним при різних збільшеннях. Майже самоподібні фрактали містять малі копії цілого фракталу у перекручених та вироджених формах. Фрактали, згенеровані з використанням рекурентних відношень, зазвичай є майже (але не точно) самоподібними.

Статистична самоподібність — Це найслабкіша форма самоподібності; фрактал має чисельні або статистичні міри, що зберігаються при збільшенні. Найприйнятніші означення «фракталів» просто містять в собі деякий вид статистичної самоподібності.



Об'єкти, що володіють фрактальними властивостями, в природі

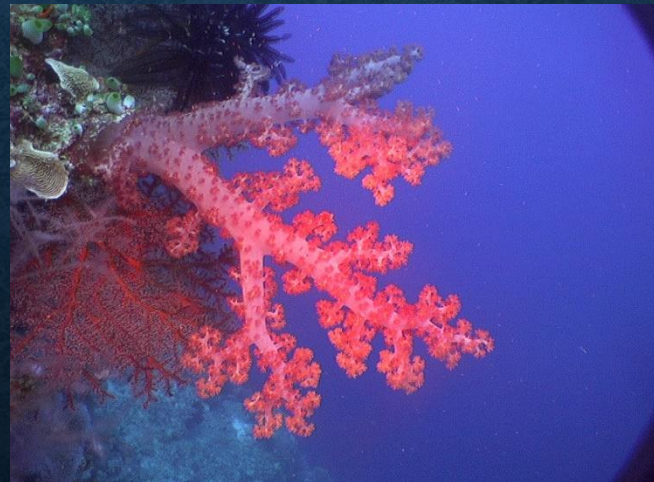
У живій природі:

- Корали;
- Морські зірки і їжаки;
- Морські раковини;
- Квіти і рослини (броколі, капуста);
- Плоди (ананас);
- Крони дерев і листя рослин;
- Кровоносна система і бронхи людей і тварин;



У неживій природі:

- Межі географічних об'єктів (країн, областей, міст);
- Берегові лінії;
- Гірські хребти;
- Сніжинки;
- Хмари;
- Блискавки;
- Утворені на склі візерунки;
- Кристали;
- Сталактити, сталагміти, геліктити



Застосування

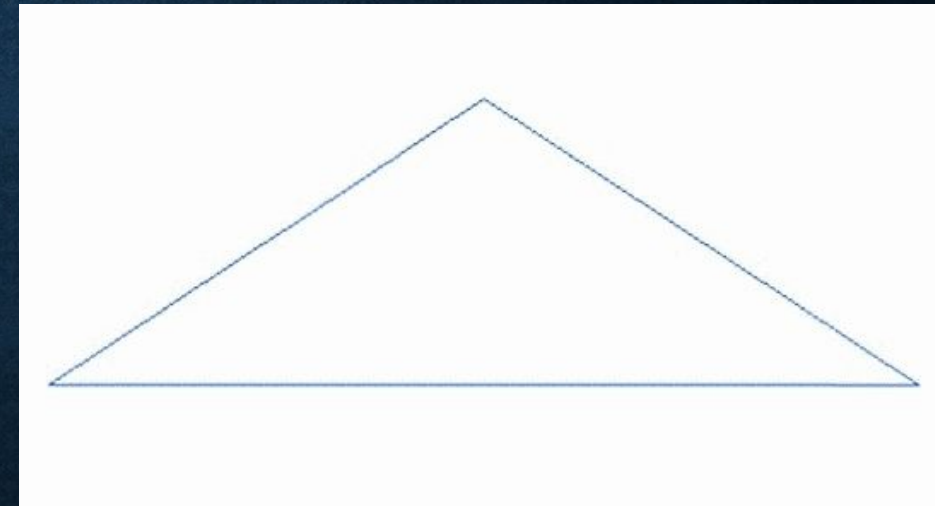
Природничі науки

У фізиці фрактали природним чином виникають при моделюванні нелінійних процесів, таких, як турбулентний плин рідини, складні процеси дифузії — адсорбції, полум'я, хмари тощо. Фрактали використовуються при моделюванні пористих матеріалів, наприклад, в нафтохімії. У біології вони застосовуються для моделювання популяцій і для опису систем внутрішніх органів (система кровоносних судин). Після створення кривої Коха було запропоновано використовувати її при обчисленні протяжності берегової лінії.

Генерація зображень природних об'єктів

Фрактал, який моделює поверхню гори.

Геометричні фрактали застосовуються для отримання зображень дерев, кущів, берегових ліній тощо. Алгебричні та стохастичні — для побудови ландшафтів, поверхні морів, моделей біологічних та інших об'єктів.



Механіка рідин

Фракталами добре описуються такі процеси та явища, що стосуються механіки рідин і газів:

- _динаміка та турбулентність складних потоків;
- _моделювання полум'я;
- _пористі матеріали, у тому числі в нафтохімії.

Біологія

- _моделювання популяцій;
- _біосенсорні взаємодії;
- _процеси всередині організму, наприклад, биття серця.