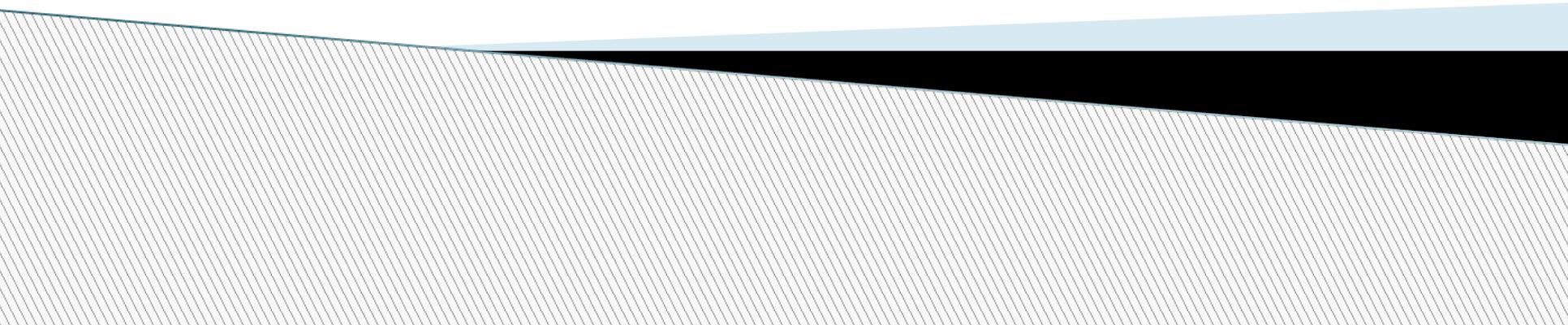


Лекция 5.

Эффективная перечислимость и распознаваемость



Определения

Эффективно перечислимое множество называется множество, элементы которого можно перечислить по алгоритму (пронумеровать натуральным рядом без пропусков и повторений).

Подмножество B множества A **эффективно распознается** в A , если существует алгоритм, позволяющий однозначно для каждого элемента множества A определить, принадлежит ли данный элемент множеству B или дополнению B до A .



Теорема Поста

Если множество A эффективно перечислимо, то подмножество B эффективно распознается в A тогда и только тогда, когда B и $A \setminus B$ оба эффективно перечислимы.

Доказательство: *необходимость*

- Пусть B распознается в A . Множество A представляет собой набор элементов $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Вытаскиваем \forall элемент a_i из множества A .
- Если $a_i \in B$, то нумеруем его в B ,
- Если $a_i \notin B$, то нумеруем его в $A \setminus B$.
- Т.к. A эффективно перечислимо, то таким образом будут вытащены все его элементы. Таким образом эффективно перечислены множества B и $A \setminus B$.

Теорема Поста

достаточность

- Пусть V и $A \setminus V$ эффективно перечислимы.
- Множества V и $A \setminus V$ представляет собой набор элементов $V = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $A \setminus V = \{y_1, y_2, \dots\}$.
- В силу того, что множества V и $A \setminus V$ эффективно перечислимы, существуют алгоритмы их перечисления. Т.к. A эффективно перечислимо, то начнем перечислять его элементы a_i .



Теорема Поста

- Для каждого элемента запустим параллельно алгоритмы перечисления B и $A \setminus B$ (поочерёдно по одному элементу из каждого множества) и будем сравнивать элементы множеств с a_i .
- Так как a_i принадлежит либо B , либо $A \setminus B$, то он встретится на каком-то конечном шаге перечисления. Таким образом, можно определить, к какому множеству он относится, а значит, B эффективно распознается в A ,
Q.E.D.

Эффективное перечисление машин Тьюринга



Теорема

- Множество машин Тьюринга эффективно перечислимо.

Доказательство:

Идея: описать произвольную машину Тьюринга некоторым числом, которое эффективно распознаётся среди натуральных чисел. Тогда, применив алгоритм распознавания к натуральному ряду, удастся перенумеровать все машины Тьюринга. А это будет означать, что они эффективно перечислимы.

Эффективное перечисление машин Тьюринга

- Произведём кодировку. Для этого перечислим и пронумеруем состояния (символы внутреннего алфавита) и закодируем их единичками:

S_0	Ω	A	B	C
1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
1	11	111	1111	11111

Эффективное перечисление машин Тьюринга

- Пронумеруем ленточные знаки (символы внешнего алфавита) и закодируем их двойками:

∂	Λ	a	b	c
1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
2	22	222	2222	22222

- Символы, определяющие движение управляющей головки получают коды, состоящие из троек. Стрелку в строке таблицы обозначим четверкой, а разделитель между строк (переход на новую строку), обозначим пятеркой.

Эффективное перечисление машин Тьюринга

□ Например,

R	L	H	□	новая строка
3	33	333	4	5

A a □ b L B □ □ 111222422223311115.

□ Поменяем местами символы элемента алфавита и состояния (в левой части), получим:

a A □ b L B □ □ 22211142222331115.

Эффективное перечисление

м. Тьюринга -

доказательство

- Теперь можно убрать “4” и “5”, тогда получим 222111222233111, тем самым уменьшив длину кода (данный шаг не является обязательным). Таким образом, каждой машине Тьюринга сопоставлено натуральное число.
- Теперь возьмем ряд натуральных чисел и применим к нему алгоритм распознавания, определяющий, является ли данное число кодом какой-либо машины Тьюринга. Если в результате проверки выясняется, что данный формат допустим, то соответствующему числу присваивается очередной свободный номер. Т.о. каждая машина Тьюринга получит свой собственный номер, следовательно, такие машины эффективно перечислимы, **Q.E.D.**

Эффективное перечисление алгоритмов Маркова



Теорема

- ▣ Множество алгоритмов Маркова эффективно перечислимо.

Доказательство:

Идея: описать произвольный алгоритм некоторым числом, которое эффективно распознаётся среди натуральных чисел. Тогда применив алгоритм распознавания к натуральному ряду, удастся перенумеровать все нормальные алгоритмы. А это означает, что они эффективно перечислимы.

Доказательство

Произведём кодировку:

- Нормальный алгоритм представляет собой набор строк, например:

$ab \rightarrow c$

$\wedge \square d \blacksquare$

- Пронумеруем символы алфавита. Первые три символа служебные, для них зарезервируем числа 1,2,3.

\rightarrow "1"

\wedge "2"

\blacksquare "3"

- Остальные символы получают следующие вакантные номера:

$a(x_1)$ "4"

$b(x_2)$ "5"

$c(x_3)$ "6"

$\dot{} \dot{} \dot{} \dot{}$
 (x_k) "k+3"

Отступление (из области свойств простых чисел)

- Если мы возьмем ряд простых чисел и каждое из них возведём в какую-нибудь степень, а затем их перемножим, то по полученному числу мы сможем сказать, в какой именно степени были соответствующие простые числа. Это делается путем деления получившегося числа поочередно на простые числа, начиная с двойки, до тех пор, пока возможно деление без остатка. Потом производится деление на 3, потом на 5 и т.д. до тех пор, пока не получится единица.

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot \dots = N$$

- Например, мы можем рассчитать степени, в которые были возведены простые числа, произведение которых образует 540:

$$540 = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

$$540/2 = 270; 270/2 = 135; 135/3 = 45;$$

$$45/3 = 15; 15/3 = 5; 5/5 = 1$$

- Двойка участвовала в делении 2 раза, тройка – 3 раза, пятерка – 1 раз. Проверим: $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 4 \cdot 27 \cdot 5 = 540$

Геделева нумерация

- Возьмём первую строчку алгоритма Маркова и представим её следующим образом:

$$a \quad b \quad \rightarrow \quad c \\ 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^1 \cdot 7^6 = A$$

- Полученное натуральное число A является кодом данной строчки (такая нумерация называется Гёделевой).

- Аналогично поступаем со второй строчкой алгоритма:

$$\Lambda \quad \rightarrow \quad d \cdot \\ 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^7 \cdot 7^3 = B$$

- B является кодом второй строчки.

Гедделева нумерация

- Далее формируем кодовое число всего алгоритма. Для этого выпишем ряд простых чисел и возведем каждое число в соответствующую этой строчке степень.

$$2^A, 3^B, \dots$$

- Перемножив эти числа, получим кодовый номер алгоритма.

$$2^A \cdot 3^B \dots = K$$

Таким образом, алгоритм представлен в виде произведения простых чисел, взятых в степенях, соответствующих коду каждой строки. Полученное число K является кодом данного алгоритма. При этом по данному коду можно восстановить полностью весь алгоритм.

Доказательство

- Теперь возьмем ряд натуральных чисел и применим к нему алгоритм распознавания, определяющий является ли данное число кодом какого либо алгоритма Маркова. Такой алгоритм распознавания будет состоять из двух процедур: сначала по данному числу K вычисляются числа A, B, C, \dots (коды строк), а затем из этих чисел извлекаются соответствующие x, y, z, \dots (коды символов в рамках каждой строки). Полученные значения проверяются на предмет соответствия формату строк алгоритмов Маркова. Если ответ положительный, то соответствующему числу K присваивается очередной свободный номер. Т.о. каждый алгоритм Маркова получит свой собственный номер, следовательно, нормальные алгоритмы эффективно перечислимы, **Q.E.D.**



Теорема

- **Множество останавливающихся машин Тьюринга эффективно перечислимо.**

Доказательство:

- Возьмем множество машин, останавливающихся на первом такте, и пронумеруем их:

$T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, \dots$

- Затем пронумеруем множество машин, останавливающихся на втором такте:

$T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}, \dots$

- Аналогично, на третьем такте:

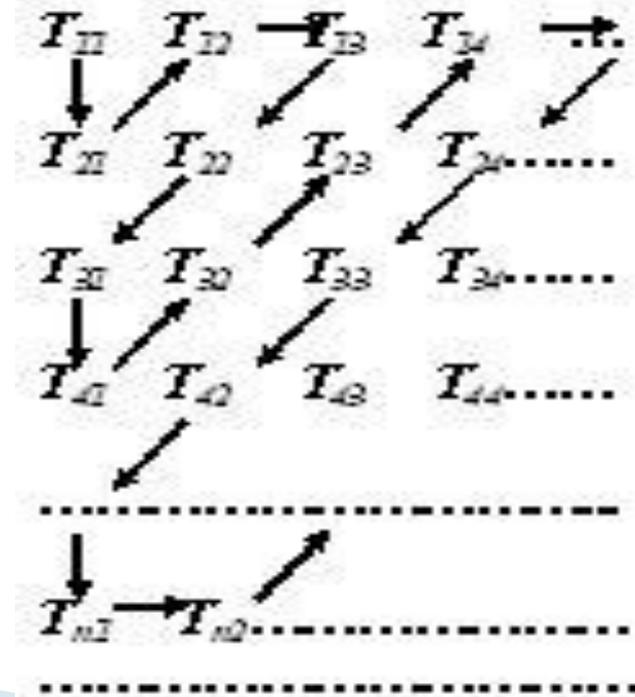
$T_{31}, T_{32}, T_{33}, T_{34}, \dots$, и т.д.

- Затем расположим их в виде бесконечной матрицы.

Доказательство

Используя диагональный метод, перечислим их (пронумеруем натуральными числами):

Таким образом, каждая останавливающаяся машина Тьюринга получит свой собственный номер. Отсюда следует, что останавливающиеся машины можно эффективно перечислить, **Q.E.D.**





Теорема

- Множество не останавливающихся машин Тьюринга невозможно эффективно перечислить.

Доказательство:

- Предположим **противное**, а именно, что множество не останавливающихся машин эффективно перечислимо. Тогда используем Теорему Поста, которая гласит, что подмножество B эффективно перечислимого множества A эффективно распознается в нем тогда и только тогда, когда это подмножество и его дополнение до всего множества эффективно перечислимы.
- Пусть множество A – это множество всех машин Тьюринга (оно эффективно перечислимо), а подмножество B – это множество останавливающихся машин Тьюринга (оно эффективно перечислимо).

Доказательство

- Тогда из нашего предположения об эффективной перечислимости не останавливающихся машин Тьюринга следует, что множество останавливающихся машин Тьюринга (B) эффективно распознается среди всех машин Тьюринга (A).
- Однако этого быть не может, так как общая задача об остановке машины Тьюринга на произвольной ленте неразрешима. Получили противоречие. Значит исходное предположение неверно, т.е. множество не останавливающихся машин Тьюринга эффективно не перечислимо, **Q.E.D.**