

2.2 Задача Коши для уравнения первого порядка

Задача Коши для уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)); \quad y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

здесь x_0 – начальная точка, y_0 – начальное значение.

Рассмотрим условия корректности (по Адамару) задачи Коши (4) *

1), 2). **Существование и единственность решения.**

Пусть Q – плоская область, $f(x, y)$ – заданная в Q функция, (x_0, y_0) – внутренняя точка области Q , a и b есть положительные числа такие, что замкнутый прямоугольник

$$G = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

целиком лежит в области Q , M есть число $M = \max_G |f(x, y)|$, K есть постоянная

Липшица функции $f(x, y)$ в этом прямоугольнике т.е. $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K|y_2 - y_1|$.

З а м е ч а н и е. Если область G выпукла по y , то условию Липшица удовлетворяют функции, имеющие ограниченную в G частную производную по y .

Рассмотреть $f(x, y) = |y|$.

Т е о р е м а 1. * (Локальная теорема существования и единственности). Пусть $f(x, y)$ непрерывна на области Q и пусть для нее на этой области выполняется условие Липшица по переменной y . Тогда найдется положительное число h , такое, что на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ задача Коши (4) имеет решение и притом единственное.

Число h , определяется из условий

$$h \leq a, \quad Mh \leq b, \quad Kh < 1. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е. Решение $y(x)$ будет функцией из $C^1([x_0 - h, x_0 + h])$.

Отрезок $[x_0 - h, x_0 + h]$ будем называть отрезком Пеано или локальным отрезком существования решения.

3). Зависимость решений от начальных данных и от правой части.

Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены, непрерывны и ограничены в области Q , содержащей прямоугольники

$$G = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

$$G_1 = \{(x, y) : |x - \bar{x}_0| \leq a, |y - \bar{y}_0| \leq b\}.$$

Рассмотрим две задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)); \quad y(x_0) = y_0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y(x)); \quad y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0. \quad (\text{II})$$

Пусть для задачи (I) и (II) выполнены условия теоремы 1. Тогда, если M в (5) заменить на $M = \max(\sup_Q |f(x, y)|, \sup_Q |g(x, y)|)$, то задачи (I) и (II) имеют решения $\varphi(x)$, $\omega(x)$, определенные на отрезках $[x_0 - h, x_0 + h]$ и $[\bar{x}_0 - h, \bar{x}_0 + h]$ соответственно.

Т е о р е м а 2. Пусть для функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, точек (x_0, y_0) и $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ прямоугольников G и G_1 выполняются условия, указанные выше. Тогда для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что неравенства

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta, \quad |y_0 - \bar{y}_0| < \delta, \quad \sup_Q |f(x, y) - g(x, y)| < \delta$$

влекут выполнение для всех чисел x из отрезка $[x_0 - h_1, x_0 + h_1]$, $h_1 < h$, неравенства $|\varphi(x) - \omega(x)| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности выполняется $\bar{x}_0 \leq x_0$.

Положим $\delta_0 = h - h_1$, число δ и будем выбирать так, чтобы выполнялось неравенство $\delta < \delta_0$. При таком выборе числа δ из неравенства $|x_0 - \bar{x}_0| < \delta$ следует

$$[x_0 - h_1, x_0 + h_1] \subset [x_0 - h, x_0 + h],$$

так как $h_1 < h$, и

$$[x_0 - h_1, x_0 + h_1] \subset [\bar{x}_0 - h, \bar{x}_0 + h].$$

Последнее вложение следует из неравенств:

а) $x_0 + h_1 < \bar{x}_0 + \delta + h_1 < \bar{x}_0 + \delta_0 + h_1$ и учитывая, что $\delta_0 = h - h_1$, получим

$$x_0 + h_1 < \bar{x}_0 + h,$$

б) $x_0 - h_1 > \bar{x}_0 - h_1 = \bar{x}_0 + \delta_0 - h > \bar{x}_0 - h$.

Значит на отрезке $[x_0 - h_1, x_0 + h_1]$ обе функции $\varphi(x), \omega(x)$ определены и для них выполняется равенство*

$$\varphi(x) - \omega(x) = y_0 - \bar{y}_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt - \int_{\bar{x}_0}^x g(t, \omega(t)) dt.$$

Последние два слагаемых можно преобразовать:

$$\int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt - \int_{\bar{x}_0}^x g(t, \omega(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt -$$

$$- \int_{x_0}^x f(t, \omega(t)) dt + \int_{x_0}^x f(t, \omega(t)) dt - \int_{x_0}^x g(t, \omega(t)) dt + \int_{x_0}^x g(t, \omega(t)) dt - \int_{\bar{x}_0}^x g(t, \omega(t)) dt =$$

$$= \int_{x_0}^x [f(t, \varphi(t)) - f(t, \omega(t))] dt + \int_{x_0}^x [f(t, \varphi(t)) - g(t, \omega(t))] dt - \int_{\bar{x}_0}^{x_0} g(t, \omega(t)) dt.$$

В силу выбора $h_1 < h$, и учитывая, что для h справедливы оценки (5), получим для точек $x \in [x_0 - h_1, x_0 + h_1]$, что точки $(x, \varphi(x))$, $(x, \omega(x))$ будут лежать в прямоугольниках G и G_1 соответственно.

Поясним это на примере точки $(x, \varphi(x))$: $|\varphi(x) - y_0| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq M|x - x_0| \leq Mh_1$.
Оценим для $x \in [x_0, x_0 + h_1]^*$ величину $p(x) = |\varphi(x) - \omega(x)|$:

$$p(x) = |\varphi(x) - \omega(x)| \leq |y_0 - \bar{y}_0| + \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t)) - f(t, \omega(t))| dt +$$

$$+ \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t)) - g(t, \omega(t))| dt + \int_{\bar{x}_0}^{x_0} |g(t, \omega(t))| dt \leq \delta + K \int_{x_0}^x p(t) dt + \delta h_1 + M\delta,$$

$$p(x) \leq \delta N + K \int_{x_0}^x p(t) dt, \quad \text{здесь } N = (1 + h_1 + M) \quad (6)$$

Пусть $F(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$. Имеют место соотношения:

$$F(x) \geq 0, \quad F(x_0) = 0, \quad p(x) = \frac{dF}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{dF}{dx} \leq \delta N + KF(x). *$$

Умножим последнее неравенство на функцию $e^{-K(x-x_0)}$ и заменим переменную x переменной t . Получим неравенство

$$\frac{d}{dt} [e^{-K(t-x_0)} F(t)] \leq \delta N e^{-K(t-x_0)}.$$

Интегрируя его от точки x_0 до точки x , получаем неравенство

$$e^{-K(x-x_0)} F(x) \leq \delta N \int_{x_0}^x e^{-K(t-x_0)} dt = -\delta N \frac{1}{K} \int_0^{-K(x-x_0)} e^z dz = \delta N \frac{1}{K} (1 - e^{-K(x-x_0)}).$$

Умножая полученное неравенство на $e^{K(x-x_0)}$, имеем оценку

$$F(x) \leq \delta N \frac{1}{K} (e^{K(x-x_0)} - 1).$$

Следовательно, из неравенства (6) получим:

$$p(x) \leq \delta N e^{K(x-x_0)} \leq \delta N e^{Kh_1} \quad \text{для всех } x \in [x_0, x_0 + h_1]. \quad (7)$$

Аналогичная оценка может быть получена и для всех $x \in [x_0 - h_1, x_0]$ с заменой пределов интегрирования. Теперь если ε и δ связаны соотношением $\varepsilon = \delta N e^{Kh_1}$, то теорема доказана.

2.3 Продолжимые и непродолжимые решения

Пусть плоская область Q содержит прямоугольник

$$G = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

внутри себя.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области Q и выполнены условия локальной теоремы существования и единственности, то задача Коши (4) имеет решение $\varphi(x)$, определенное на некотором локальном отрезке $[\alpha, \beta]$ оси Ox .

Рассмотрим один из концов этого отрезка, например, правый. Согласно теореме, точка $(\beta, \varphi(\beta))$ будет лежать в области Q . Но тогда существует замкнутый прямоугольник G_1 , имеющий своим центром точку $(\beta, \varphi(\beta))$ и целиком лежащий внутри области Q .

Далее, согласно теореме существования, существует отрезок $[\beta, \beta_1]$ ($\beta_1 > \beta$) оси Ox , на котором задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(\beta) = \varphi(\beta)$$

имеет решение $\bar{\varphi}(x)$.

Построим функцию $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in [\alpha, \beta] \\ \bar{\varphi}(x) & \text{при } x \in (\beta, \beta_1] \end{cases}.$$

Эта функция будет решением задачи Коши (4) не на локальном отрезке существования или отрезке Пеано, а уже на большем отрезке. Другими словами, решение $\varphi(x)$ задачи Коши (4) мы **продолжили вправо**. Очевидно, что действуя аналогично, мы можем продолжить решение $\varphi_1(x)$ с отрезка $[\alpha, \beta_1]$ на следующий отрезок $[\alpha, \beta_2]$ и т.д.

Пусть плоская область Q содержит прямоугольник

$$G = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

внутри себя.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области Q и выполнены условия локальной теоремы существования и единственности, то задача Коши (4) имеет решение $\varphi(x)$, определенное на некотором локальном отрезке $[\alpha, \beta]$ оси Ox .

Рассмотрим один из концов этого отрезка, например, правый. Согласно теореме, точка $(\beta, \varphi(\beta))$ будет лежать в области Q . Но тогда существует замкнутый прямоугольник G_1 , имеющий своим центром точку $(\beta, \varphi(\beta))$ и целиком лежащий внутри области Q .

Далее, согласно теореме существования, существует отрезок $[\beta, \beta_1]$ ($\beta_1 > \beta$) оси Ox , на котором задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(\beta) = \varphi(\beta)$$

имеет решение $\bar{\varphi}(x)$.

Построим функцию $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in [\alpha, \beta] \\ \bar{\varphi}(x) & \text{при } x \in (\beta, \beta_1] \end{cases}.$$

Эта функция будет решением задачи Коши (4) не на локальном отрезке существования или отрезке Пеано, а уже на большем отрезке. Другими словами, решение $\varphi(x)$ задачи Коши (4) мы **продолжили вправо**. Очевидно, что действуя аналогично, мы можем продолжить решение $\varphi_1(x)$ с отрезка $[\alpha, \beta_1]$ на следующий отрезок $[\alpha, \beta_2]$ и т.д.

Возникает вопрос – как далеко мы сможем дойти? Нетрудно привести пример, когда решение задачи Коши невозможно продолжить вправо далее определенной точки, несмотря на то, что правая часть соответствующего дифференциального уравнения будет непрерывна в любой сколь угодно большой области Q .

Таким примером может служить, скажем, задача Коши

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0 > 0.$$

Найдем решение этой задачи. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y^2} = dx; \quad y^2 \neq 0.$$

Интегрируя уравнение, получим $\frac{-1}{y} = x + c$. Общее решение уравнения

$$y = -\frac{1}{x + c} \quad \text{и} \quad y = 0.$$

Выделим из общего решения функцию, удовлетворяющую начальным условиям

$$y(0) = -\frac{1}{0 + c}.$$

Следовательно $c = \frac{1}{y_0}$, и решением задачи Коши будет функция $\varphi(x) = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$.

Очевидно, что данное решение не может быть продолжено правее точки $1/y_0$.

О п р е д е л е н и е . Решение $\varphi(x)$ какого-либо дифференциального уравнения, заданное на интервале (α, β) , называется **продолжимым вправо** на интервал (α, β_1) , если $\beta_1 > \beta$ и если существует решение $\varphi_1(x)$ того же уравнения, заданное на интервале (α, β_1) и такое, что $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$ при $x \in (\alpha, \beta)$.

Аналогично определяется продолжимость вправо с интервала на отрезок, с отрезка на отрезок, а также соответствующая продолжимость влево.

Т е о р е м а 3. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на области Q . Тогда для непродолжимости решения $\varphi(x)$ задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ с интервала (α, β) вправо достаточно выполнения одного из трех условий:

1. $\beta = +\infty$;
2. при $x \rightarrow \beta - 0$ выполняется $|\varphi(x)| \rightarrow +\infty$;
3. при $x \rightarrow \beta - 0$ расстояние от точки $(x, \varphi(x))$ до границы области Q стремится к нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что решение $\varphi(x)$ продолжимо с интервала (α, β) вправо. Тогда оно будет продолжимо как минимум на полуинтервал $(\alpha, \beta]$ следовательно, условие 1 не имеет места.

Продолженная функция, за которой мы сохраним обозначение $\varphi(x)$, должна быть непрерывна в точке β , а значит – конечной (случай 2 быть не может).

Далее, поскольку будет выполняться равенство $\varphi'(\beta) = f(\beta, \varphi(\beta))$, то точка обязана лежать в области определения функции f , то есть в области Q .

Из сказанного вытекает, что если решение $\varphi(x)$ продолжимо вправо с интервала (α, β) , то условия 1 – 3 выполняться не могут. Другими словами, если одно из условий 1 – 3 выполняется, то решение $\varphi(x)$ действительно не может быть продолжено с интервала (α, β) . ■

Очевидно, что имеет место аналогичная теорема о непродолжимости влево.

З а м е ч а н и е. Имеет место и обратное утверждение – теорема о том, что если решение не продолжимо вправо, то обязательно будет выполняться одно из условий 1 – 3. Доказывать эту теорему не будем.

2.4 Глобальная теорема существования и единственности

Глобальная теорема существования и единственности устанавливает разрешимость задачи Коши (4) на всей числовой оси.

Т е о р е м а 4. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на всем пространстве $\mathbb{R}^2$ и пусть выполняется условие

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K(x)|y_1 - y_2|; \quad (x, y_1) \in \mathbb{R}^2; \quad (x, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

в котором $K(x)$ есть неотрицательная непрерывная для всех x из $\mathbb{R}$ функция. Тогда задача Коши (4) разрешима на всей числовой оси и притом единственным образом.

Заметим, что глобальное условие Липшица, выполнение которого требуется условиями теоремы 2, представляет собой весьма сильное условие. Фактически оно означает, что функция $f(x, y)$ не может расти при $|y| \rightarrow \infty$ быстрее первой степени.

З а м е ч а н и е. Решение задачи Коши (4) существует, если $f(x, y)$ непрерывна в Q , условие Липшица обеспечивает выполнение единственности*.

Раздел 3. Системы дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка, в которой неизвестными являются n функций y независимого переменного x :

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

Представление системы в векторном виде:

$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}(x)) \quad (3.1)$$

Здесь

$$\bar{f}(x, \bar{y}(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \boxtimes \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}, \quad \bar{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \boxtimes \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Начальные данные

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0, \quad \text{или} \quad y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \quad (3.2)$$

Основная теорема теории обыкновенных дифференциальных уравнений*

Т е о р е м а 5 (Теорема существования и единственности решения задачи Коши).

Пусть:

– Q – область пространства R^{n+1} переменных $(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$;

– функции $f_k = f_k(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ – непрерывные в области Q ;

– выполняется условие Липшица $\|\bar{f}(x, \bar{y}_1) - \bar{f}(x, \bar{y}_2)\| \leq k\|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$

(для любого $k = \overline{1, n}$ производные $\frac{\partial f_k(x, \bar{y}(x))}{\partial y_j} \quad (1 \leq k, j \leq n)$

определены и непрерывны в области Q);

– множество $G \subset Q$, $G = ((x, \bar{y}) : |x - x_0| \leq a, \|\bar{y}(x) - \bar{y}_0\| \leq b)$.

Тогда задача Коши (3.1), (3.2), где $(x_0, y(x_0)) \in G$,

1) имеет решение на $[x_0 - h, x_0 + h]$, где h – достаточно малое положительное число;

2) это решение единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В основе доказательства лежит теорема Шаудера о существовании неподвижной точки, в нашем случае это принцип сжатых отображений для систем операторных уравнений.

Пусть S непустое семейство вектор-функций $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, определенных на одном и том же множестве M (некоторое множество банахова пространства B). Эти вектор-функции φ обладают следующими свойствами:

- а) Каждая функция φ_i ограничена (быть может, своей константой);
- б) Предел всякой равномерной сходящейся последовательности вектор-функций φ , принадлежащих $\mathbf{M}$, также принадлежит $\mathbf{M}$;
- в) Для множества $\mathbf{M}$ определен оператор A , переводящий каждую вектор-функцию φ из $\mathbf{M}$ в вектор-функцию $A\varphi = (A_1\varphi, \dots, A_n\varphi)$, также из $\mathbf{M}$;
- г) Для всяких двух вектор-функций φ^*, φ^{**} из $\mathbf{M}$

$$\|A\varphi^* - A\varphi^{**}\| \leq m\|\varphi^* - \varphi^{**}\|, \quad 0 < m < 1.$$

Тогда в семействе S существует одна и только одна вектор-функция φ , такая что

$$\varphi = A\varphi.$$

Доказательство содержит два этапа:

I. Определить оператор.

II. Доказать, что для определенного оператора имеет место принцип сжатых отображений.

Задача (3.1), (3.2) в операторном виде

$$\tilde{A}\bar{y}(x) = \bar{y}'(x), \quad \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \quad (3.3)$$

здесь $\tilde{A}$ - дифференциальный оператор.

Задачу (3.1), (3.2) можно записать в виде системы интегральных уравнений

$$\bar{y}(x) = \bar{y}(x_0) + \int_{x_0}^x \bar{f}(t, \bar{y}(t))dt, \quad (3.4)$$

или в операторной форме:

$$A\bar{y}(x) = y(x) \quad (\text{интегральный оператор})$$

I. Задачи

$$\tilde{A}\bar{y}(x) = \bar{y}'(x), \quad \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \quad (3.3) \quad \text{и}$$

$$\bar{y}(x) = \bar{y}(x_0) + \int_{x_0}^x \bar{f}(t, \bar{y}(t)) dt \quad (3.4) \quad \text{эквивалентны:}$$

всякое решение задачи (3.3), есть решение (3.4) и наоборот, всякое непрерывное на $[x_0 - h, x_0 + h]$ решение системы (3.4) есть решение задачи (3.1), (3.2).

Докажем это утверждение.

Пусть $\bar{y}(x)$ – решение (3.1), (3.2) или (3.3), определенное на $[x_0 - h, x_0 + h]$, и $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Тогда, интегрируя обе части (3.1) от x_0 до x и учитывая начальные данные, получим (3.4).

Обратно, если $\bar{y}(x)$ – непрерывное на $[x_0 - h, x_0 + h]$ решение (3.4), то при $x = x_0$ имеем $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \Rightarrow \text{§(3.2)}$ выполнено. Так как $\bar{f}(x, \bar{y}(x))$ непрерывна, то функция

$\bar{y}(x) = \bar{y}(x_0) + \int_{x_0}^x \bar{f}(t, \bar{y}(t)) dt$ дифференцируема при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Следовательно,

$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}(x)), \quad \text{то есть выполняется (3.1).}$$

Следовательно, в качестве оператора в принципе сжатых отображений можно использовать интегральный оператор

$$A\bar{y}(x) = \bar{y}(x_0) + \int_{x_0}^x \bar{f}(t, \bar{y}(t)) dt.$$

II. Покажем что для интегрального оператора $A\bar{y}$ имеет место принцип сжатых отображений.

Определим $\mathbf{M}$ – некоторое множество банахова пространства B , т.е. пространство $C[x_0 - h, x_0 + h]$ непрерывных на $|x - x_0| \leq h$ вектор-функций $\bar{y}(x)$ с нормой

$$\|\bar{y}(x)\|_C = \max_{|x-x_0| \leq h} \|\bar{y}(x)\| = \max_{|x-x_0| \leq h} \max_{1 \leq i \leq n} |y_i(x)|,$$

и значит, для $\bar{y}(x)$ из $\mathbf{M}$ выполняется $\|\bar{y}(x) - \bar{y}(x_0)\| \leq b$.

Построим семейство S вектор-функций

$$\bar{y}_0(x) = \bar{y}_0, \quad \bar{y}_i(x) = A\bar{y}_i(x) = \bar{y}(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, \bar{y}_{i-1}(t)) dt, \quad i=1, 2, 3, \dots$$

Каждая вектор функция принадлежит $\mathbf{M}$ и ограничена, если $h \leq b/M$, $M = \max_G \|\bar{f}(x, \bar{y}(x))\|$

Покажем, что построенная последовательность вектор-функций сходится равномерно на $\mathbf{M}$. Для этого достаточно показать, что ряд

$$\bar{y}_0 + (\bar{y}_1(x) - \bar{y}_0) + \dots + (\bar{y}_n(x) - \bar{y}_{n-1}) + \dots \quad (3.5)$$

равномерно сходится.

Действительно, полученный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как имеет место оценка

$$\|\bar{y}_{n+1}(x) - \bar{y}_n(x)\| \leq Mk^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Эту оценку проверим методом математической индукции. При $n = 0$ она выполняется:

$$\|\bar{y}_1(x) - \bar{y}_0(x)\| \leq M|x - x_0|,$$

а из справедливости ее при некотором $n = l$ следует выполнение при $n = l + 1$:

$$\begin{aligned} \|\bar{y}_{l+2}(x) - \bar{y}_{l+1}(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x [\bar{f}(t, \bar{y}_{l+1}(x)) - \bar{f}(t, \bar{y}_l(x))] dx \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|f(t, \bar{y}_{l+1}(x)) - f(t, \bar{y}_l(x))\| dt \right| \leq \\ &\leq k \|\bar{y}_{l+1}(x) - \bar{y}_l(x)\| |x - x_0| \leq Mk^l \frac{|x - x_0|^{l+1}}{(l+1)!} k. \end{aligned}$$

Следовательно, если учитывать, что $|x - x_0| \leq h$, то любая частичная сумма ряда

(3.5) $\bar{y}_0 + (\bar{y}_1(x) - \bar{y}_0) + \dots + (\bar{y}_n(x) - \bar{y}_{n-1}) + \dots$ ограничена по норме

$$\|U_n\| \leq \|\bar{y}_0\| + \frac{M}{k} (kh + \frac{k^2 h^2}{2!} + \dots + \frac{k^n h^n}{n!}) \leq \|y_0\| + \frac{M}{k} (e^{kh} - 1).$$

Значит, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n(x) = \bar{y}(x)$, так как ряд сходится равномерно, и

последовательность вектор-функций будет сходиться равномерно, причем $\bar{y}(x) \in \mathbf{M}$, так как для любого положительного ε существует такое N , что для $n > N$ выполняется $\|\bar{y}_n(x) - \bar{y}(x)\| < \varepsilon$, следовательно:

$$\|\bar{y}(x) - \bar{y}_0\| = \|\bar{y}(x) - \bar{y}^{(n)}(x) + \bar{y}^{(n)}(x) - \bar{y}_0\| \leq \varepsilon + b.$$

Покажем, что при достаточно малом h для $(A\bar{y})$ имеет место:

I. $(A\bar{y})$ отображает $\mathbf{M}$ на $\mathbf{M}$.

Действительно, поскольку $\bar{y}(x) \in \mathbf{M}$, то $(A\bar{y})(x) \in C[x_0 - h, x_0 + h]$ как интеграл от непрерывной вектор-функции и, если $h \leq b/M$, получаем оценку:

$$\begin{aligned} \|(A\bar{y})(x) - \bar{y}_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x \bar{f}(t, \bar{y}(t)) dt \right\| \leq \max_{|x-x_0| \leq h} \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{x_0}^x f_i(t, \bar{y}(t)) dt \right| \leq \max_{|x-x_0| \leq h} \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{x_0}^x |f_i| dt \right| \leq \\ &\leq \max_{|x-x_0| \leq h} \left| \int_{x_0}^x \|f(t, \bar{y}(t))\| dt \right| \leq Mh \leq b. \end{aligned}$$

II. (Ay) сжимает $\mathbf{M}$.

$$\bar{y}(x) \in \mathbf{M}, \quad \bar{z}(x) \in \mathbf{M}$$

$$\begin{aligned} \|(Ay)(x) - (Az)(x)\| &\leq \left| \int_{x_0}^x \|\bar{f}(t, \bar{y}(t)) - \bar{f}(t, \bar{z}(t))\| dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x k \|\bar{y}(t) - \bar{z}(t)\| dt \right| \leq k \|\bar{y}(t) - \bar{z}(t)\|_C \cdot h = m \|\bar{y}(t) - \bar{z}(t)\|_C. \end{aligned}$$

Если $m = kh < 1$, то (Ay) сжимает множество $\mathbf{M}$, следовательно, задача $\bar{y}(x) = (Ay)(x)$ имеет решение.

Покажем единственность.

Предположим, существуют две неодинаковые функции $\bar{y}(x)$ и $\bar{z}(x)$.

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) - \bar{z}(x) &= (Ay)(x) - (Az)(x), \\ \|\bar{y}(x) - \bar{z}(x)\| &= \|(Ay)(x) - (Az)(x)\| \leq k \|\bar{y}(x) - \bar{z}(x)\|, \end{aligned}$$

следовательно, $(1 - k) \|\bar{y}(x) - \bar{z}(x)\| \leq 0$, и значит,

$$\|\bar{y}(x) - \bar{z}(x)\| = 0. \quad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Отрезок существования и единственности решения задачи (3.1), (3.2) определили из условий $h \leq b/M$ и $kh < 1$.

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y(x) = f(x) \quad (4.1)$$

где $p_i(x) \in C(a,b)$ и $f(x) \in C(a,b)$.

Уравнение (4.1) с переменными коэффициентами $p_i(x)$, где $i = \overline{1, n}$, называется **однородным**, если $f(x) = 0$.

Пусть $y(x) \in C^{(n)}(a,b)$, тогда $L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y(x)$ есть линейный дифференциальный оператор, так как

$$1) L(Cy) = CL(y), \quad C = \text{const},$$

$$2) L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Следовательно, для решений однородного линейного уравнения

$$L(y) = y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y(x) = 0 \quad (4.2)$$

имеет место утверждение:

1') если $y(x)$ есть решение (4.2), то $y_1(x) = Cy(x)$, где $C = \text{const}$, также – решение (4.2),

2') если $y_1(x), \dots, y_m(x)$ есть решения (4.2), то $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_my_m(x)$, где $C_i = \text{const}$, есть также решение (4.2).

Вопрос: существует ли в пространстве решений уравнения (4.2) набор (система) линейно независимых решений, то есть базис, через который можно записать любое решение уравнения (4.2)?

Рассмотрим для уравнения (4.2) задачу Коши с начальными условиями

$$L(y) = y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y(x) = 0$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (4.3)$$

здесь $y_0, \dots, y_{n-1}$ – константы, $x_0 \in (a, b)$.

З а м е ч а н и е . Если $y_i = 0$, $i = \overline{0, n-1}$, то $y = 0$ есть решение задачи Коши.

Т е о р е м а 6. Задача (4.2), (4.3) с $p_i(x) \in C(a, b)$ имеет единственное решение на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим вектор-функцию

$$\bar{y}(x) = (z_1, z_2, \dots, z_n),$$

где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y'(x)$, $\dots$, $z_n(x) = y^{(n-1)}(x)$.

Тогда с учетом (4.2) получим систему уравнений

$$z_1'(x) = z_2(x)$$

$$z_2'(x) = z_3(x)$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1}'(x) = z_n(x)$$

$$z_n'(x) = -(p_1(x)z_n(x) + p_2(x)z_{n-1}(x) + \dots + p_n(x)z_1(x)).$$

Для этой системы выполнены все условия Теоремы 5, причем решение с отрезка $[x_0 - h, x_0 + h]$ можно продолжить на любой отрезок $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. ■

4.1 Линейная зависимость и независимость систем функций. Определитель Вронского

Пусть в интервале $(a; b)$ функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ имеют производные до $(n-1)$ -го порядка включительно.

Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \boxtimes & & \boxtimes \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

будем называть **определителем**

Вронского для системы функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ в точке x .

Т е о р е м а 7. Если $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы в интервале $(a; b)$, то $W(x) = 0$ в каждой точке $x \in (a; b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на интервале $(a; b)$, то найдутся такие постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ для каждой точки $x \in (a; b)$.

Предположим $\alpha_n \neq 0$:
$$y_n(x) = -\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x) + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x)\right).$$

Дифференцируя это равенство $n-1$ раз, получим

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & -\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x) + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x)\right) \\ \boxtimes & & \boxtimes \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & -\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)}(x) + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)}(x)\right) \end{vmatrix}.$$

Последний столбец в каждой точке $x \in (a; b)$ есть линейная комбинация предыдущих, следовательно, $W(x) = 0$. ■ 20

З а м е ч а н и е . Обратная теорема не верна.

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & \forall x \geq 0 \\ 0 & \forall x < 0 \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \geq 0 \\ x^2 & \forall x < 0 \end{cases}$$

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на любом интервале $(-a; a)$, но их определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in (-a; a).$$

Рассмотрим для уравнения (4.2) задачу Коши

$$Ly = 0$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$y_0, \dots, y_{n-1}$ — КОНСТАНТЫ.

Т е о р е м а 8. Если $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы в интервале $(a; b)$, и каждая функция $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ есть решение однородного линейного уравнения, то определитель Вронского этих функций не равен нулю ни в одной из точек интервала $(a; b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим обратное: существует такая точка $x_0 \in (a; b)$, что $W(x_0) = 0$. Составим систему линейных уравнений относительно $C_1, \dots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Ее определитель Вронского $|W(x_0)| = 0$, следовательно, система имеет ненулевое решение $(C_1^0, \dots, C_n^0)$.

Определим $y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \dots + C_n^0 y_n(x)$.

Это тоже решение однородного уравнения, так как представляет собой линейную комбинацию решений $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$.

Для $y(x)$ имеют место равенства:

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 0, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

то есть $y(x)$ – решение задачи Коши с нулевыми начальными данными.

Но функция $y^*(x) \equiv 0$ также является решением задачи Коши, значит, в силу единственности решения задачи Коши для линейного уравнения

$$C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \dots + C_n^0 y_n(x) = 0,$$

функции $y_i(x)$ линейно зависимы на (a, b) , что противоречит условию теоремы. ■