ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ

Теория и практика обработки результатов измерений

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые: иначе такое бросание будет пустою забавой.

КОЗЬМА ПРУТКОВ

Есть и другая точка зрения….

I *Д.Ю. Иванов, Т.Н. Князева, Ю.Н. Лазарева*

Введение
в математическую обработку результатов эксперимента

(БГТУ, 2018)

II *Д.Ю. Иванов, Ю.Н. Лазарева*

Математическая обработка результатов измерений
в примерах

(БГТУ, 2019)

Ну!
И зачем нам всё это…?

Проблема эфира

Проблема эфира, который заполняет всё мироздание, волновала науку с давних пор. В 1887 г. Майкельсон и Морли предприняли сложнейший для своего времени эксперимент по определению влияния движения Земли по орбите на скорость света .

В результате, никакого влияния обнаружено не было. Но чтобы это доказать и, главное, чтобы все в это поверили, скорость света следовало измерять с соответствующей точностью.

Попробуем её оценить. Скорость света: c=300000 км/с, а скорость движения Земли: v=30 км/с.

Из этих чисел видно, что абсолютная погрешность измерения скорости света не должна была превышать (3÷4) км/с. Много это или мало?

На этот вопрос отвечает другой способ определения точности измерений – относительная погрешность: $\varepsilon=\Delta c/c$. Из приведённых данных получаем $\varepsilon=10^{-4}$, или одна сотая процента.

Значит, прежде, чем приступать к проведению столь сложного и дорогостоящего эксперимента, его авторы должны были убедиться, что это им по силам.

Кстати, современная точность определения скорости света: $\varepsilon=10^{-9}$

Прежде, чем мы перейдём к другому примеру, отметим, что только что мы познакомились с двумя способами описания точности измерений: ***абсолютной и относительной погрешностями.***

***подробнее см.* I стр. 7**

Производство винтовок и патронов к ним

Пусть, например, один из цехов завода производит стволы, а другой – патроны. Понятно, что и те, и другие должны подходить друг другу в любых комбинациях. Для этого их размеры должны быть достаточно жёстко заданы и отклонения от регламента не могут выходить за определённые пределы. Чтобы этого достичь, заводу потребуется завести у себя целую науку – метрологию, частью которой и является *теория погрешностей*.

И в обычной жизни мы сталкиваемся с измерениями на каждом шагу, часто даже не замечая этого (примерка одежды, расстановка мебели, определение веса и т.п.). При этом чаще всего в этих случаях нас устраивают даже не слишком точные приборы и измерения.

Существует ли истинный размер?

Тем не менее, всё же может возникнуть вопрос: а нельзя ли, если очень нужно, провести измерения ***абсолютно*** точно, определив тем самым ***истинную*** величину?

Представим себе, что мы могли бы неограниченно увеличивать точность измерения, скажем, линейных размеров предмета. К чему мы пришли бы в конце концов? Мы стали бы чувствовать движение отдельных атомов. Отсюда видно, что истинного значения измеряемой величины не существует в принципе.

Как же быть?

Опыт показывает, что если достаточно чувствительным прибором (это важно) **много** раз измерять одну и ту же величину (длину, массу, силу тока и т.п.), то при каждом измерении мы будем в *силу случайных причин* получать не одинаковые результаты. Метрологи сказали бы, что результат каждого измерения отягощён *случайной* погрешностью.

Прямые и косвенные измерения

Измерения, проведённые непосредственно с помощью тех или иных приборов, называются ***прямыми***, а вычисление искомой величины по формулам, связывающим эту величину с другими параметрами, определёнными в ходе прямых измерений, носит название ***косвенных*** измерений.

Одну и ту же величину часто можно определить как с помощью прямых, так и посредством косвенных измерений.

Например, массу тела можно узнать, взвесив его на весах, но её же можно рассчитать, зная плотность материала, на основе прямого измерения объёма тела по формуле

$$.m=V\rho$$

Сопротивление проводника можно измерить непосредственно омметром, но можно и рассчитать по закону Ома, использовав прямые измерения силы тока и напряжения:

$$R=U/I.$$

Погрешности прямых и косвенных измерений в силу их принципиально различной природы находят поэтому и принципиально разными методами. В первом случае – это теория вероятностей, а во втором – дифференциальное исчисление.

Прямые измерения

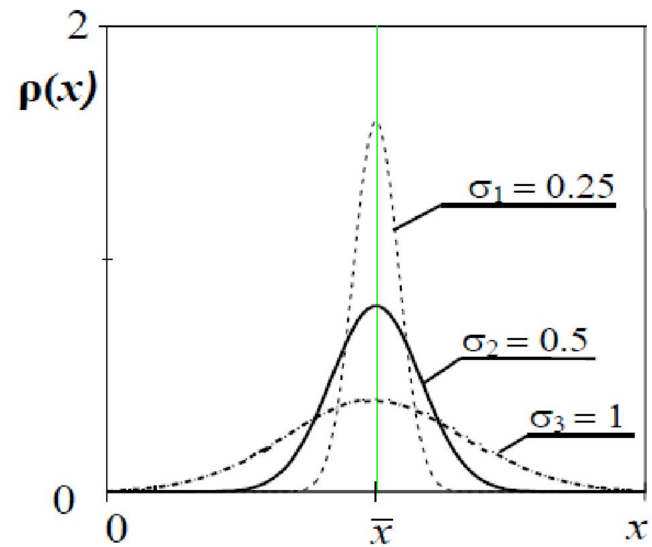
В основе подхода к оценке результата прямых измерений и его случайной погрешности лежат достаточно простые и интуитивно понятные идеи, но потребовался талант К.Ф. Гаусса (1777-1855), которого ещё при жизни называли «*королём математиков*», чтобы эти идеи оформились в изящную законченную математическую теорию.

Каковы же эти идеи?

- наилучшим значением измеряемой физической величины является среднее арифметическое $\bar{x}$
- отклонения от среднего в сторону меньших и больших значений равновероятны;
- чем больше отклонение от среднего, тем меньше измерений попадает в этот диапазон Δx. Иначе говоря, функция распределения $\rho(x)$ по обе стороны от x есть монотонно убывающая функция;
- функция распределения $\rho(x)$ с увеличением абсолютной величины x должна приближаться к нулю асимптотически, т.е. очень большие отклонения от среднего, хотя и маловероятны, но все же возможны.

Функция распределения Гаусса

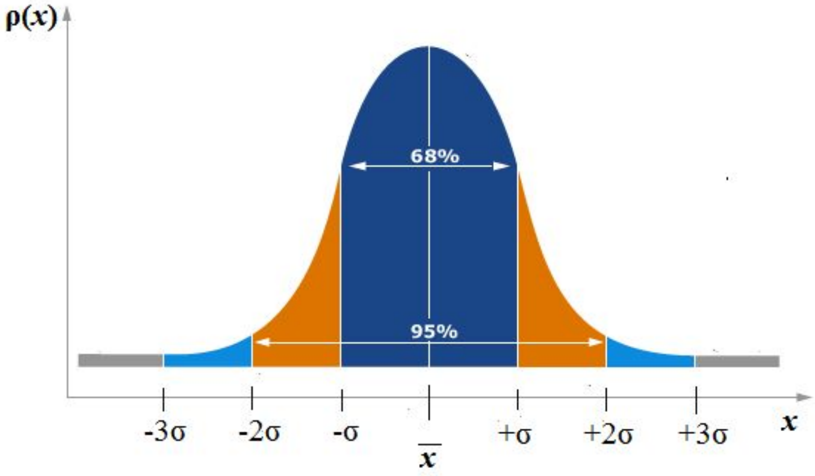
$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$



Параметр σ, задавая ширину распределения, определяет, тем самым, качество проведённых измерений: чем меньше σ, тем точнее измерения. В теории ошибок величину σ принято называть *средней квадратичной ошибкой измерения.*

Функция распределения Гаусса

В соответствии со смыслом функции распределения $\rho(x)$ площадь фигуры, ограниченной участком кривой $\rho(x)$ и вертикальными прямыми, проведёнными из точек x_1 и x_2, численно равна вероятности попадания результата измерения в интервал $\Delta x = x_2 - x_1$. Вероятность такого типа называется *доверительной вероятностью*.



Доска Гальтона (видео)

Лучше всего влияние случайных причин на результат измерения можно продемонстрировать с помощью устройства, изобретённого в 1873 г. английским учёным Ф. Гальтоном (1822-1911). Доска Гальтона моделирует основные свойства распределения Гаусса.

Она представляет собой ящик с прозрачной передней стенкой. В заднюю стенку в шахматном порядке вбиты штырьки, образующие треугольник. Сверху в ящик через воронку, выход из которой расположен ровно посередине между левой и правой стенками, засыпают шарики. В идеальном случае, сталкиваясь со штырьком, шарик каждый раз с одинаковой вероятностью может повернуть либо направо, либо налево. Нижняя часть ящика разделена перегородками по числу штырьков в нижнем ряду, в результате чего шарики, скатываясь на дно ящика, образуют столбики, которые тем выше, чем ближе к середине доски. При достаточно большом числе шариков внешний вид столбиков приближается к кривой нормального распределения – кривой Гаусса.

Предварительные итоги

Если в неизменных условиях произвести очень большое число измерений (в пределе – бесконечно большое), то, построив кривую Гаусса, можно будет :

- найти среднее арифметическое всех проведённых измерений (соответствует максимуму кривой Гаусса). В теории вероятностей оно называется *математическим ожиданием*;
- найти среднеквадратичную ошибку σ;
- после чего записать окончательный результат измерений в зависимости от требуемой надёжности (доверительной вероятности, α) следующим образом:
- в науке (и в лаборатории) обычно считают достаточными: α=0,95 и соответствующий ей доверительный интервал в 2σ.

$$\left.\begin{array}{ll} x = (\bar{x} \pm \sigma), & \alpha = 0.68 \\ \boxed{x = (\bar{x} \pm 2\sigma), \quad \alpha = 0.95} & \\ x = (\bar{x} \pm 3\sigma), & \alpha = 0.997 \end{array}\right\}$$

***Подробнее см.* I, стр. 8-12**

Жизнь коротка, или распределение Стьюдента

Основной недостаток теории Гаусса заключается в необходимости проведения очень большого числа измерений, для чего ни у кого нет ни времени, ни желания. Но что-то делать, ведь, было нужно. Это осознавали многие, но сделал, как обычно, один человек.

Его звали Уильям Сили Госсет (1876 — 1937). Выпускник Оксфорда, Госсет, до конца жизни работал в ирландской пивоваренной компании Гиннес, которая для повышения качества и уменьшения себестоимости своей продукции, содержала большой штат, состоящий из лучших учёных.

Проблема выбора наиболее подходящих сортов хмеля, стоявшая перед Гиннес, в результате трансформировалась для Госсета во вполне академическую задачу: насколько увеличится погрешность измерения в случае, когда имеется лишь маленькая выборка из 2 или 10 образцов, по сравнению с выборкой в 1000 образцов?

И Госсет решил её. Но фирма, чтобы не открывать свои секреты другим пивоварам, разрешила ему опубликовать свои результаты только под псевдонимом. Он выбрал псевдоним Student. Сегодня его метод, известный как «*t*-распределение Стьюдента» (Student's *t*-distribution), являясь фундаментом современной статистики, стал ещё и *de facto* стандартной частью промышленных протоколов контроля качества.

Последовательность обработки прямых измерений

- Определить среднее арифметическое по всей совокупности проведённых *многократных* измерений одной и той же физической величины по одной из формул:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \text{или} \qquad \bar{x} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)}{n}$$

- Сосчитать оценку среднеквадратичной ошибки среднего (применение распределения Стьюдента начинается именно с этого момента). Поскольку число измерений *n* обычно невелико, вычислить σ нельзя, но можно провести её *оценку* с помощью предложенной Госсетом (Стьюдентом) формулы:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \,.$$

Последовательность обработки прямых измерений

- И, наконец, определяем

$$\overline{\Delta x} = t_\alpha(n) \cdot S_{\overline{x}} \,.$$

То есть среднюю абсолютную погрешность Δx результата x определяем, домножая полученную оценку на коэффициент Стьюдента $t_\alpha(n)$, который для заданной доверительной вероятности α зависит только от числа произведённых измерений n

Таблица

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30
$t_{\alpha=0.95}(n)$	12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,09	2,04

***Подробнее см.* I, стр. 13-18; II, 13-18** (рассмотрены примеры)

Обработка ряда виртуальных измерений

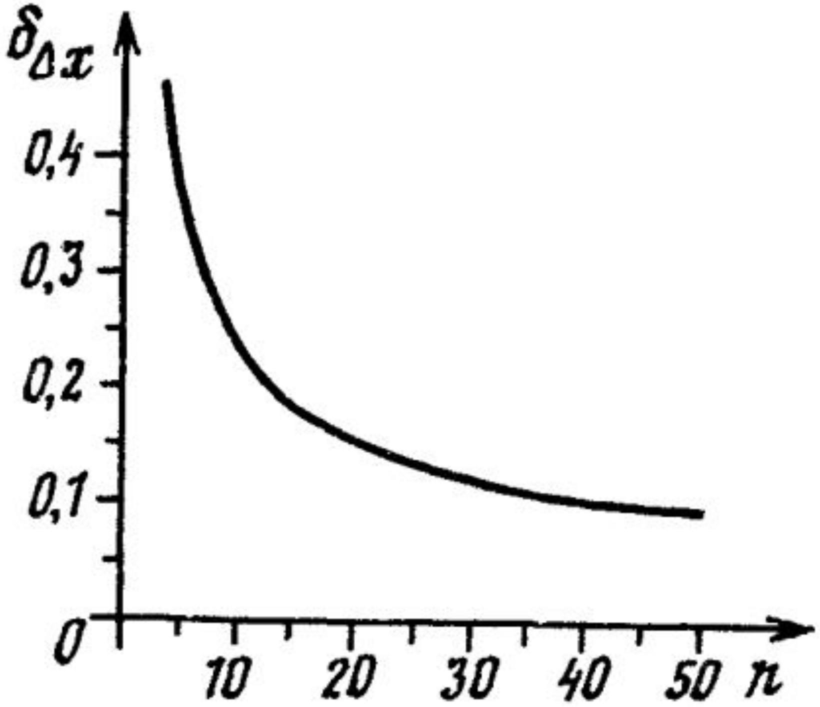
II, стр. 13-18 (рассмотрены примеры)

Полная погрешность прямых измерений

;I, стр. 15-18

II, стр. 10-13 (рассмотрены примеры)

Ошибка ошибки и корректная запись результата



I, стр. 28;

II, стр. 7-9 (рассмотрены примеры).

Погрешности косвенных измерений

I, стр. 18-20 (обоснование);

II, стр. 18-19, 22-23 (рассмотрены примеры)

Построение и анализ графиков

I, стр. 20-27;

II, стр. 24-31

Оба пособия равноценно дополняют друг друга

Общие рекомендации по проведению физического эксперимента с написанием отчёта

II, стр. 3-7, 32-35

Дополнение

Приложение I, стр. 29-42

- Латинский и греческий алфавиты,
- некоторые приближённые математические формулы,
- основные физические постоянные,
- аналоговые и цифровые электроизмерительные приборы

Приложение II, стр. 36-40

- Простейшие механические измерительные приборы,
- таблица коэффициентов Стьюдента