Конкретизация вида коэффициента эффективной квадратичной нелинейной восприимчивости.

Практическое задание №2

Система укороченных уравнений для комплексных амплитуд волн при ГВГ:

$$\frac{dA_1}{dz} + \delta_1 A_1 = -i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp(-i\Delta kz),$$

$$\frac{dA_2}{dz} + \delta_2 A_2 = -i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta kz).$$

Коэффициенты нелинейной связи σ_i имеют вид:

$$\sigma_1 = 4\pi k \mathbf{e}_1 \frac{\chi(\omega) : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}{n^2(\omega)}, \qquad \sigma_2 = 2\pi K \mathbf{e}_2 \frac{\chi(2\omega) : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1}{n^2(2\omega)}.$$

В эти выражения входят сомножители:

$$\mathbf{e}_1(\chi(\omega) : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2); \qquad \mathbf{e}_2(\chi(2\omega) : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1)$$

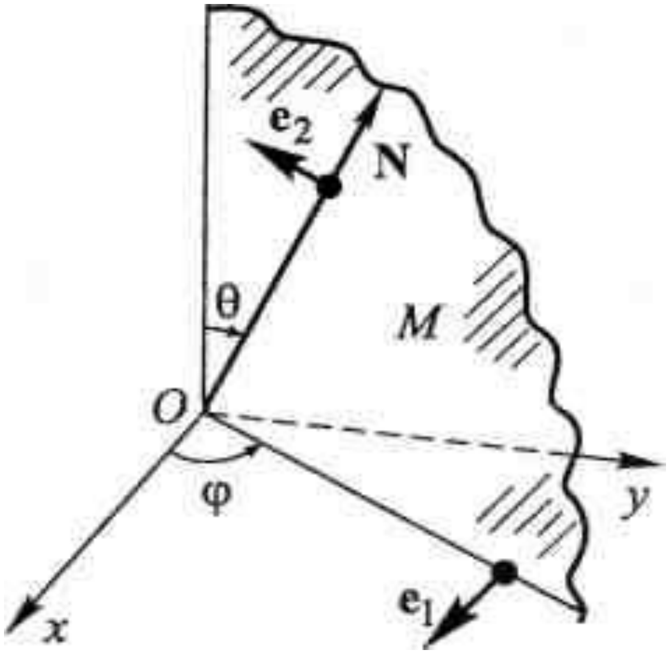
Система укороченных уравнений для комплексных амплитуд волн при ГСЧ и параметрическом преобразовании:

$$\frac{dA_1}{dz} + \delta_1 A_1 = -i\sigma_1 A_2^* A_3 \exp(-i\Delta kz),$$
$$\frac{dA_2}{dz} + \delta_2 A_2 = -i\sigma_2 A_1^* A_3 \exp(-i\Delta kz),$$
$$\frac{dA_3}{dz} + \delta_3 A_3 = -i\sigma_3 A_1 A_2 \exp(i\Delta kz).$$

В коэффициенты нелинейной связи σ_i входят сомножители, которые имеют вид:

$$\mathbf{e}_1(\chi(\omega_1):\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3); \qquad \mathbf{e}_2(\chi(\omega_2):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3); \qquad \mathbf{e}_3(\chi(\omega_1+\omega_2):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)$$

Таким образом, для получения конкретного вида коэффициентов σ_i необходимо провести перемножение единичных векторов $\mathbf{e}$, отвечающих состояниям поляризации волн на матрицу тензора нелинейной восприимчивости $\chi(\omega)$.



На рис. приведено расположение единичных векторов поляризаций в одноосном кристалле для обыкновенной волны – $\mathbf{e}_1$ и для необыкновенной волны – $\mathbf{e}_2$. **N** – вектор направления распространения волны в кристалле, задаваемый полярным углом Θ и азимутальным углом φ. Плоскость М называется плоскостью главного сечения кристалла. Таким образом, электрический вектор обыкновенной волны колеблется в плоскости перпендикулярной главному сечению кристалла, а необыкновенной волны лежит в этой плоскости.

Проекции единичных векторов для «о» волны имеют вид:

$$e_{1x} = e_{11} = \sin\phi; \qquad e_{1y} = e_{12} = -\cos\phi; \qquad e_{1z} = e_{13} = 0;$$

Проекции единичных векторов для «е» волны имеют вид:

$$e_{2x} = e_{21} = -\cos\phi\cos\theta; \quad e_{2y} = e_{22} = -\sin\phi\cos\theta; \quad e_{2z} = e_{23} = \sin\theta.$$

Тензор 3-го ранга χ содержит 27 компонент, однако он является симметричным относительно перестановки двух последних индексов: $\chi_{ijk}=\chi_{ikj}$.
Из этого следует, что число независимых компонент тензора χ не должно превышать 18.
В общем случае, число независимых компонент определяется симметрией кристаллической решетки, причем, чем больше элементов симметрии решетки, тем меньше число независимых компонент.
Существует способ, позволяющий перейти при записи тензора χ от системы трех индексов *i,j,k* к системе двух индексов *i,l* в матрице *d* размером 3 × 6, используя соотношения:

$$P_i = \sum_{l=1}^{6} d_{il} F_l,$$

или в развернутой записи

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}$$

Здесь использовано соответствие индексов:

ij	11	22	33	23	13	12
l	1	2	3	4	5	6,

а компоненты 6-и мерного вектора *F* даются следующим соотношением:
$F_1 = E_1E_1$, $F_2 = E_2E_2$, $F_3 = E_3E_3$, $F_4 = (E_2E_3 + E_3E_2)$, $F_5 = (E_1E_3 + E_3E_1)$ и $F_6 = (E_1E_2 + E_2E_1)$.

Порядок выполнения задания состоит в следующих действиях. Необходимо перейти от условно-векторной формы записи выражений к обычной.

Вводятся обозначения:

$$\mathbf{p}_1(\omega) = \chi(\omega) : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2; \qquad \mathbf{p}_2(2\omega) = \chi(2\omega) : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1.$$

Эти выражения в «обычном» представлении имеют вид:

$$p_{1i}(\omega) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\chi_{ijm}(\omega)e_{1j}e_{2m};$$

$$p_{2i}(2\omega) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\chi_{ijm}(2\omega)e_{1j}e_{1m}.$$

Распишем подробно первую сумму:

$$p_{11} = \chi_{111}e_{11}e_{21} + \chi_{112}e_{11}e_{22} + \chi_{113}e_{11}e_{23} +$$
$$+ \chi_{121}e_{12}e_{21} + \chi_{122}e_{12}e_{22} + \chi_{123}e_{12}e_{23} +$$
$$+ \chi_{131}e_{13}e_{21} + \chi_{132}e_{13}e_{22} + \chi_{133}e_{13}e_{23}.$$

$$p_{12} = \chi_{211}e_{11}e_{21} + \chi_{212}e_{11}e_{22} + \chi_{213}e_{11}e_{23} +$$
$$+ \chi_{221}e_{12}e_{21} + \chi_{222}e_{12}e_{22} + \chi_{223}e_{12}e_{23} +$$
$$+ \chi_{231}e_{13}e_{21} + \chi_{232}e_{13}e_{22} + \chi_{233}e_{13}e_{23}.$$

$$p_{13} = \chi_{311}e_{11}e_{21} + \chi_{312}e_{11}e_{22} + \chi_{313}e_{11}e_{23} +$$
$$+ \chi_{321}e_{12}e_{21} + \chi_{322}e_{12}e_{22} + \chi_{323}e_{12}e_{23} +$$
$$+ \chi_{331}e_{13}e_{21} + \chi_{332}e_{13}e_{22} + \chi_{333}e_{13}e_{23}.$$

Теперь можно записать конкретный вид искомого выражения:

$$\mathbf{e}_1(\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\mathbf{p}_1 = e_{11}p_{11} + e_{12}p_{12} + e_{13}p_{13}.$$

Составляющие векторов $\mathbf{e}_{1,2}$ не зависят от выбора нелинейного кристалла, а определяются только типом фазового синхронизма. Чтобы получить конкретное значение $d_{эфф}$ в предыдущее выражение подставляют выражения для векторов $\mathbf{e}_{1,2}$ и для тензора χ в соответствии с заданным типом синхронизма.

В качестве примера ниже проведен вывод $d_{эфф}$ для кристалла KDP при I-м типе (oo-e) синхронизма.
Тензор нелинейной квадратичной восприимчивости для этого кристалла, относящегося классу 42m имеет вид:

$$d_{i,l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}.$$

В силу свойств симметрии кристалла большинство компонент тензора для кристалла KDP равно нулю. Имеется только 3 отличных от нуля компонента, причем независимых компонент только 2.

В новых обозначениях развернутая запись для вектора $\mathbf{p}_1$ имеет вид:

$$p_{11} = d_{11}e_{11}e_{21} + d_{16}e_{11}e_{22} + d_{15}e_{11}e_{23} +$$
$$+ d_{16}e_{12}e_{21} + d_{12}e_{12}e_{22} + d_{14}e_{12}e_{23} +$$
$$+ d_{15}e_{13}e_{21} + d_{14}e_{13}e_{22} + d_{13}e_{13}e_{23}.$$

$$p_{12} = d_{21}e_{11}e_{21} + d_{26}e_{11}e_{22} + d_{25}e_{11}e_{23} +$$
$$+ d_{26}e_{12}e_{21} + d_{22}e_{12}e_{22} + d_{24}e_{12}e_{23} +$$
$$+ d_{25}e_{13}e_{21} + d_{24}e_{13}e_{22} + d_{23}e_{13}e_{23}.$$

$$p_{13} = d_{31}e_{11}e_{21} + d_{36}e_{11}e_{22} + d_{35}e_{11}e_{23} +$$
$$+ d_{36}e_{12}e_{21} + d_{32}e_{12}e_{22} + d_{34}e_{12}e_{23} +$$
$$+ d_{35}e_{13}e_{21} + d_{34}e_{13}e_{22} + d_{33}e_{13}e_{23}.$$

Подставляя в эти выражения формулы для явного вида компонент тензора нелинейной восприимчивости и компонент единичных векторов поляризации получим (обе исходные волны – «o» волны):

$$p_{11} = 0\cdot\sin\varphi\sin\varphi - 0\cdot\sin\varphi\cos\varphi + 0\cdot\sin\varphi\cdot 0 -$$
$$-0\cdot\cos\varphi\sin\varphi + 0\cdot\cos\varphi\cos\varphi - d_{14}\cdot\cos\varphi\cdot 0 +$$
$$+0\cdot 0\cdot\sin\varphi - d_{14}\cdot 0\cdot\cos\varphi + 0\cdot 0\cdot 0 \equiv 0$$

$$p_{12} = 0\cdot\sin\varphi\sin\varphi - 0\cdot\sin\varphi\cos\varphi + 0\cdot\sin\varphi\cdot 0 -$$
$$-0\cdot\cos\varphi\sin\varphi + 0\cdot\cos\varphi\cos\varphi - 0\cdot\cos\varphi\cdot 0 +$$
$$+0\cdot 0\cdot\sin\varphi - 0\cdot 0\cdot\cos\varphi + 0\cdot 0\cdot 0 \equiv 0$$

$$p_{13} = 0\cdot\sin\varphi\sin\varphi - d_{36}\cdot\sin\varphi\cos\varphi + 0\cdot\sin\varphi\cdot 0 -$$
$$-d_{36}\cdot\cos\varphi\sin\varphi + 0\cdot\cos\varphi\cos\varphi - 0\cdot\cos\varphi\cdot 0 +$$
$$+0\cdot 0\cdot\sin\varphi - 0\cdot 0\cdot\cos\varphi + 0\cdot 0\cdot 0 = -2d_{36}\cdot\sin\varphi\cos\varphi =$$
$$= -d_{36}\cdot\sin 2\varphi$$

Таким образом, после проделанных вычислений остался только один компонент вектора $\mathbf{p}_1$, а именно p_{13} = - $d_{36}\cdot\sin 2\phi$. Для получения результата необходимо умножить p_{13} на соответствующую компоненту орта поляризации «е» волны:

$$d_{эфф} = d_{36} \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin\theta.$$

Полученный результат показывает, что эффективный нелинейный коэффициент $d_{эфф}$ зависит не только от полярного угла θ, но и от азимутального угла ϕ. Так как полярный угол задается направлением синхронизма в кристалле, то его значение фиксировано. Для максимизации значения $d_{эфф}$ необходимо выбрать значение угла ϕ. Для данного случая оптимальным значением угла ϕ является 45^0.

Аналогично проводится расчет для выражения $\mathbf{e}_2(\chi(2\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)$.

Отрицательные одноосные кристаллы

Группа симметрии кристалла	Тип I (oo-e)	Тип II (oe-e)
4, 6	$d_{31}\sin\vartheta$	$\frac{1}{2}d_{14}\sin 2\vartheta$
422,622	0	$\frac{1}{2}d_{14}\sin 2\vartheta$
4mm,6mm	$d_{31}\sin\vartheta$	0
6m2	$-d_{22}\cos\vartheta\sin 3\varphi$	$d_{22}\cos^2\vartheta\cos 3\varphi$
3m	$d_{31}\sin\vartheta - d_{22}\cos\vartheta\sin 3\varphi$	$d_{22}\cos^2\vartheta\cos 3\varphi$
6	$(d_{11}\cos 3\varphi - d_{22}\sin 3\varphi)\cos\vartheta$	$(d_{11}\sin 3\varphi + d_{22}\cos 3\varphi)\cos^2\vartheta$
3	$(d_{11}\cos 3\varphi - d_{22}\sin 3\varphi)\cos\vartheta + {}$ $+d_{31}\sin\vartheta$	$(d_{11}\sin 3\varphi + d_{22}\cos 3\varphi)\cos^2\vartheta + {}$ $+\frac{1}{2}d_{14}\sin 2\vartheta$
32	$d_{11}\cos\vartheta\cos 3\varphi$	$d_{11}\cos^2\vartheta\sin 3\varphi + \frac{1}{2}d_{14}\sin 2\vartheta$
4	$-(d_{31}\cos 2\varphi + d_{36}\sin 2\varphi)\sin\vartheta$	$\frac{1}{2}\sin 2\vartheta\begin{bmatrix}(d_{14}+d_{36})\cos 2\varphi - \\ -(d_{15}+d_{31})\sin 2\varphi\end{bmatrix}$
42m	$-d_{36}\sin\vartheta\sin 2\varphi$	$\frac{1}{2}(d_{14}+d_{36})\sin 2\vartheta\cos 2\varphi$

Положительные одноосные кристаллы

Группа симметрии кристалла	Тип I (ee-o)	Тип II (oe-o)
4, 6	$-d_{14}\sin 2\vartheta$	$d_{15}\sin\vartheta$
422,622	$-d_{14}\sin 2\vartheta$	0
4mm,6mm	0	$d_{15}\sin\vartheta$
6m2	$d_{22}\cos^2\vartheta\cos 3\varphi$	$-d_{22}\cos\vartheta\sin 3\varphi$
3m	$d_{22}\cos^2\vartheta\cos 3\varphi$	
6	$(d_{11}\sin 3\varphi + d_{22}\cos 3\varphi)\cos^2\vartheta$	$(d_{11}\cos 3\varphi - d_{22}\sin 3\varphi)\cos\vartheta$
3	$(d_{11}\sin 3\varphi + d_{22}\cos\varphi)\cos^2\vartheta - {}$ $- \frac{1}{2} d_{14}\sin 2\vartheta$	$(d_{11}\cos 3\varphi - d_{22}\sin 3\varphi)\cos\vartheta + {}$ $+ d_{15}\sin\vartheta$
32	$d_{11}\cos^2\vartheta\sin 3\varphi - d_{14}\sin 2\vartheta$	$d_{11}\cos\vartheta\cos 3\varphi$
4	$(d_{14}\cos 2\varphi - d_{15}\sin 2\varphi)\sin 2\vartheta$	$-(d_{14}\sin 2\varphi + d_{15}\cos 2\varphi)\sin\vartheta$
42m	$d_{14}\sin 2\vartheta\cos 2\varphi$	$-d_{14}\sin\vartheta\sin 2\varphi$