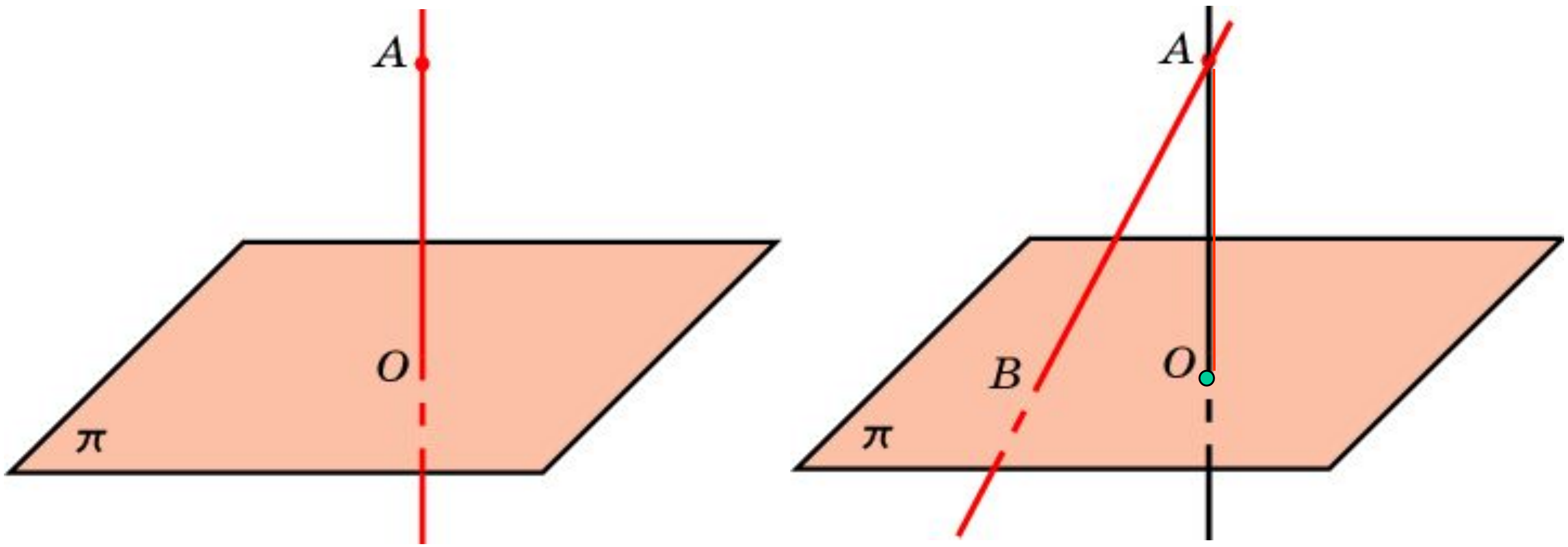
ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

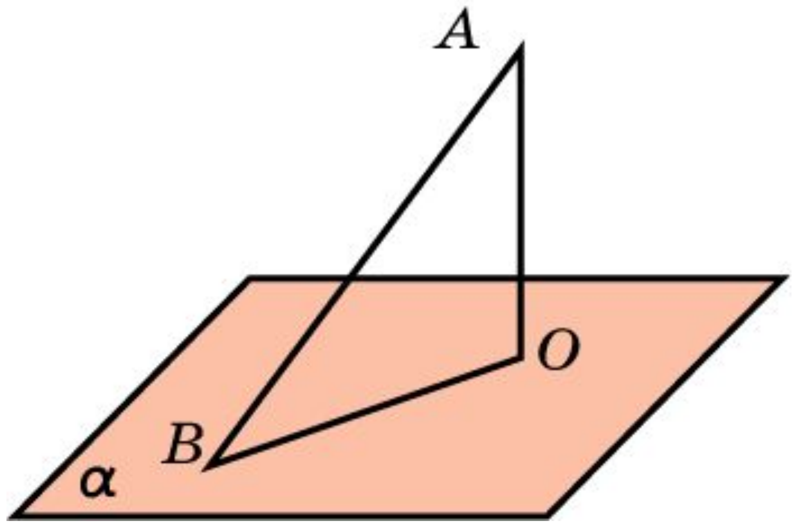
Пусть точка A не принадлежит плоскости π. Проведем прямую a, проходящую через эту точку и перпендикулярную π. Точку пересечения прямой a с плоскостью π обозначим O. Отрезок AO называется перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость π.



Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

Теорема о перпендикуляре и наклонной

Теорема. Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.

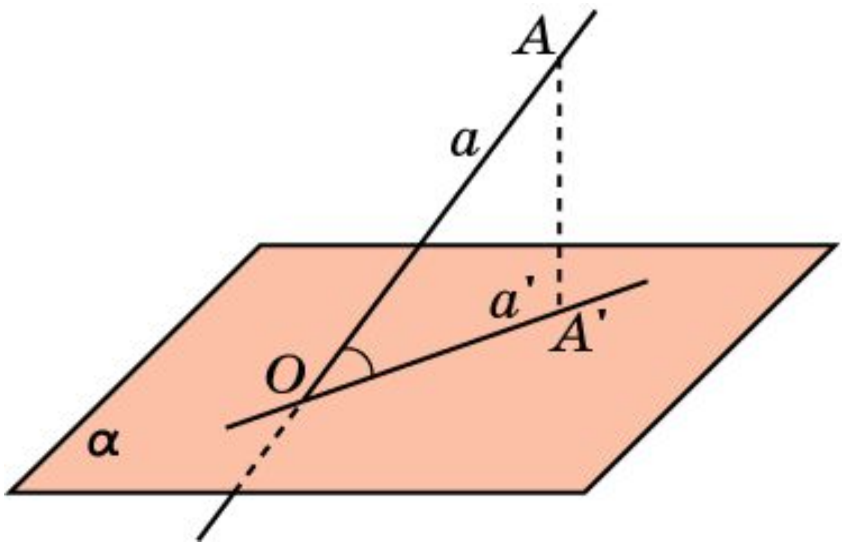


Доказательство. Пусть AB – наклонная к плоскости α, AO – перпендикуляр, опущенный на эту плоскость, OB- *ортогональная проекция*. Треугольник AOB прямоугольный, AB – гипотенуза, AO – катет. Следовательно, $AO < AB$.

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

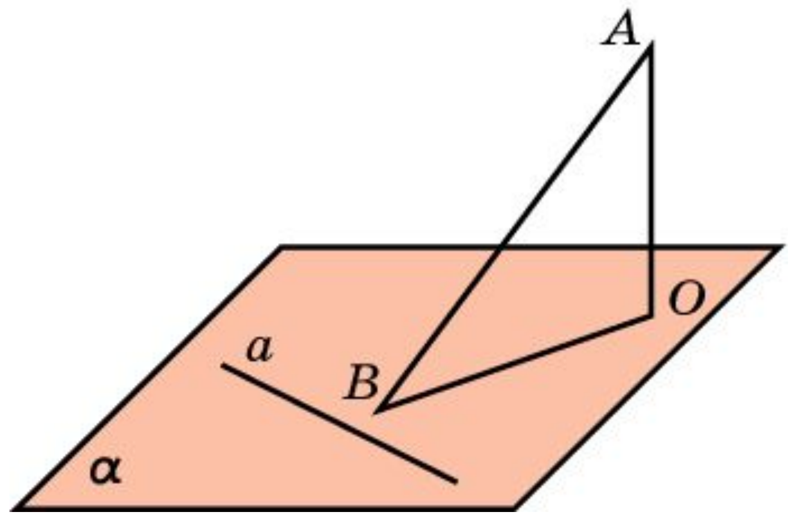
Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.

Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.



Теорема о трех перпендикулярах

Теорема. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.



Дано:

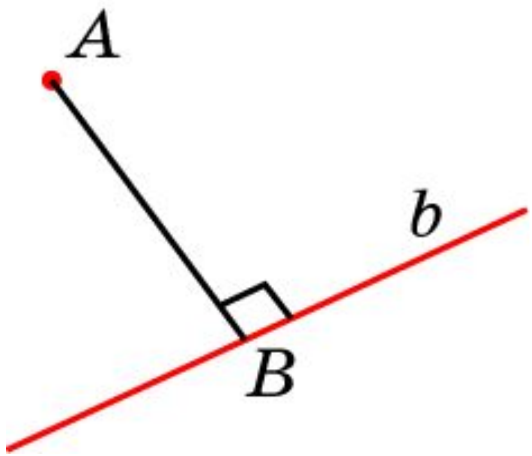
$AO \perp \alpha,$

$a \in \alpha, a \perp OB$

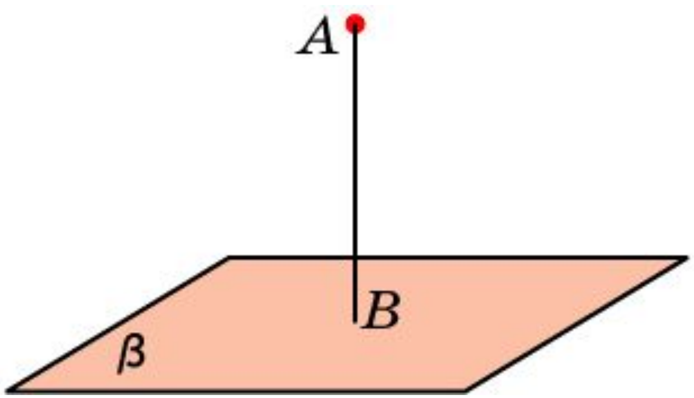
Д-ть: $a \perp AB$

Доказательство. Т.к. AO - перпендикуляр к плоскости α, то AO перпендикулярна прямой a плоскости α. Прямая a плоскости α перпендикулярна проекции OB наклонной AB. Тогда она будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым OB и AO. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая a перпендикулярна плоскости AOB и, следовательно, она будет перпендикулярна наклонной AB, принадлежащей этой плоскости.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



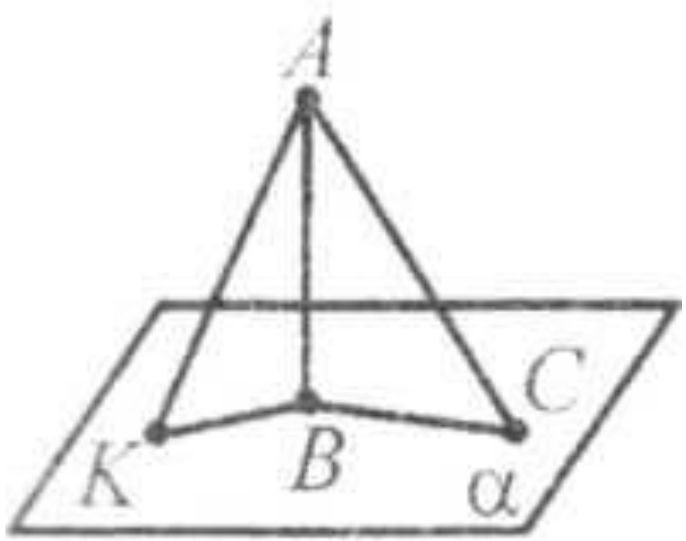
Расстоянием от точки до прямой в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.



Расстоянием от точки до плоскости в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

Упражнение 1

Верно ли утверждение: «Если из одной точки, не принадлежащей плоскости, проведены к ней две равные наклонные, то их проекции тоже равны»?



Дано:

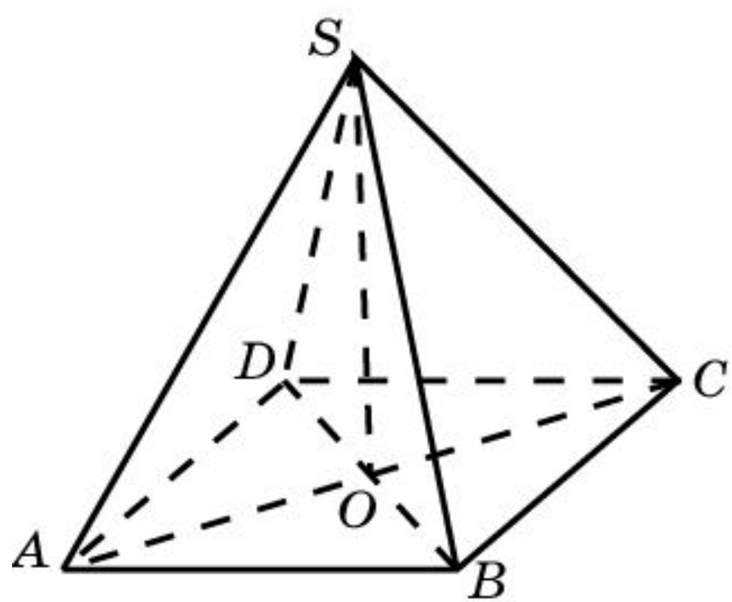
$AB \perp \alpha, AK = AC$

Д - ть : KB = BC

Ответ: Да.

Упражнение 2

К плоскости прямоугольника $ABCD$ в точке пересечения диагоналей восстановлен перпендикуляр. Верно ли утверждение о том, что произвольная точка S этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника?



Дано:

$SO \perp ABCD$,

$ABCD$ – прямоугольник

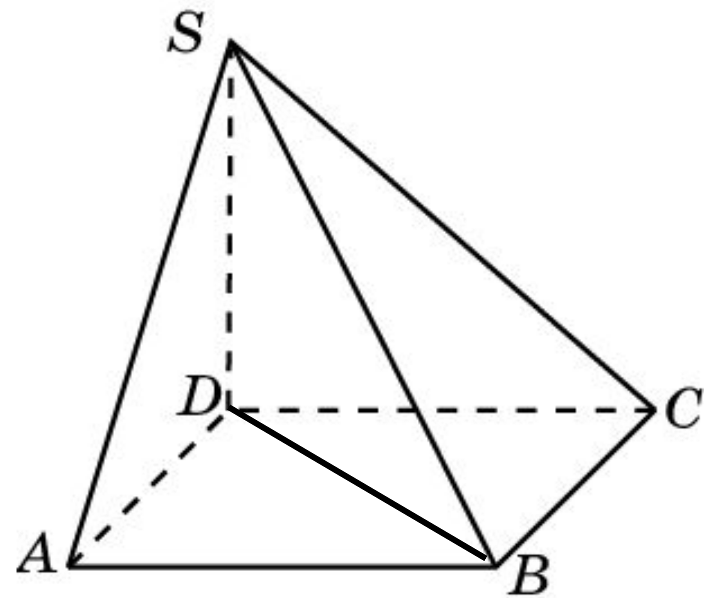
Д - ть : AS = BS = CS = DS

Ответ: Да.

№45.13

Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ – прямоугольник, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Среди отрезков SA, SB, SC и SD укажите наименьший и наибольший.

Укажите все прямые углы.



Ответ: SD – наименьший; SB – наибольший.

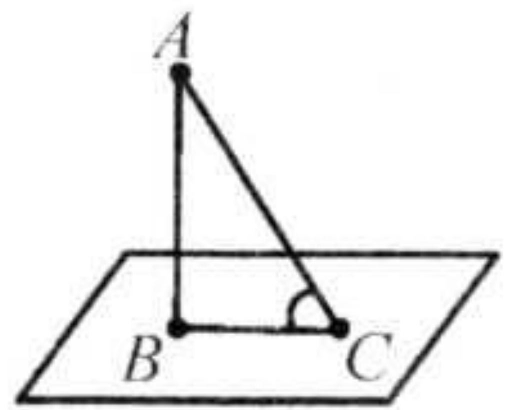
$\angle SDC, \angle SDA, \angle ADC, \angle SDB,$

$\angle DAB, \angle SAB,$

$\angle DCB, \angle SCB, \angle ABC$

Упражнение 3

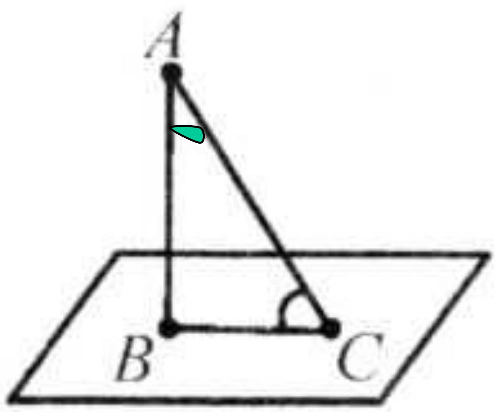
Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите проекцию отрезка AC, если $AC = 37$ см, $AB = 35$ см.



Ответ: 12 см.

№45.15 – из д/з

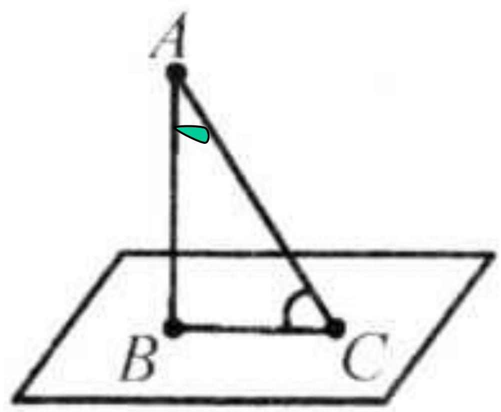
Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AC, если $AB = 6$ см, $\angle BAC = 60°$.



Ответ: 12 см.

№45.16 –д/з

Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AB, если $AC = 2\sqrt{10}$ см, $BC = 3AB$.



Комментарий:

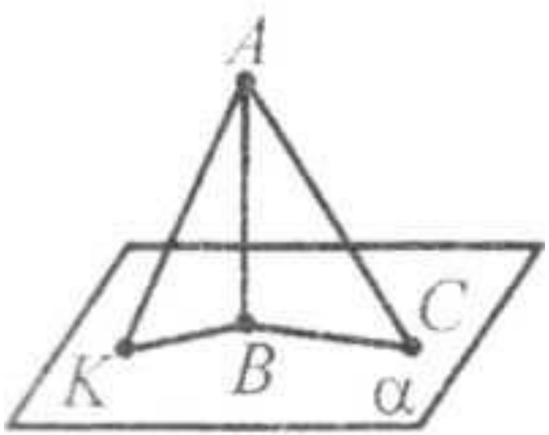
$$AB^2 = AC^2 - BC^2,$$

$$AB^2 = (2\sqrt{10})^2 - (3AB)^2.$$

Ответ: 2 см.

№45.17

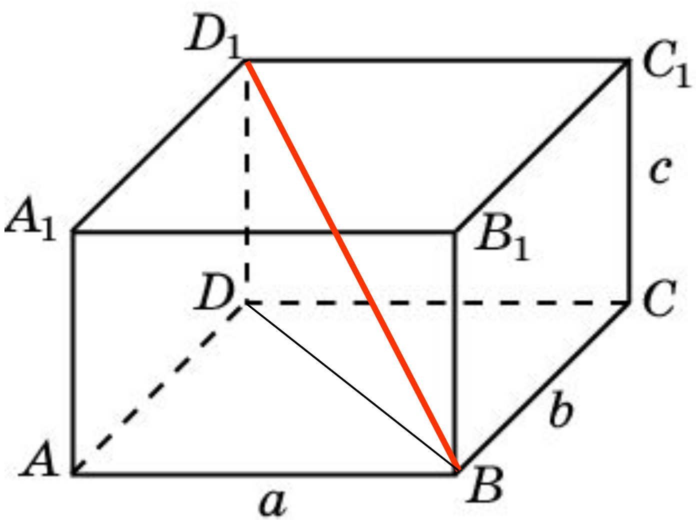
Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите проекцию другого отрезка.



Ответ: 9 см.

Упражнение 5

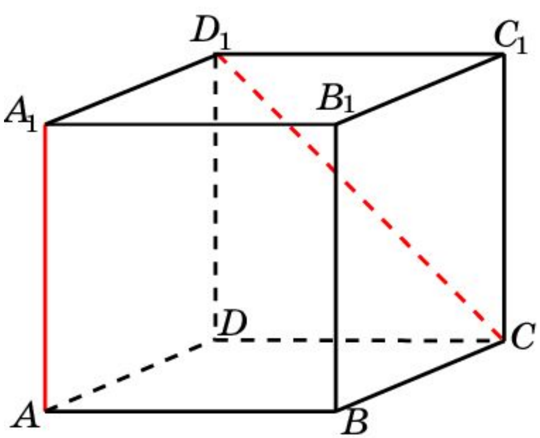
Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны a, b, c.



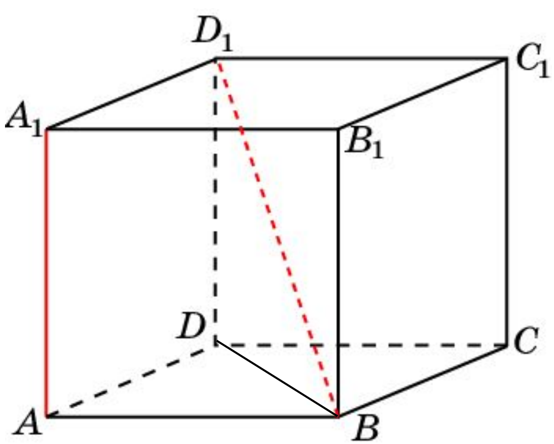
Ответ: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Упражнение 6

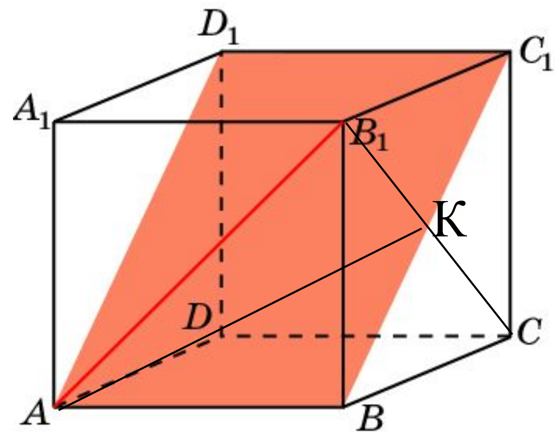
В кубе найдите угол между: а) диагональю боковой грани и плоскостью основания; б) диагональю куба и плоскостью основания; в) диагональю боковой грани и диагональным сечением.



а)



б)

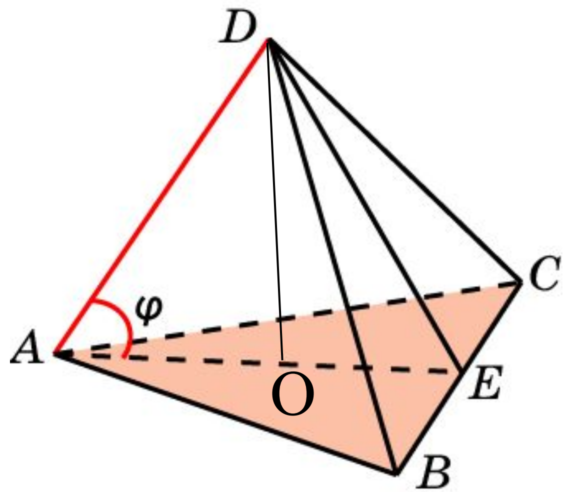


в)

Ответ: а) 45°; б) $\sin \phi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; в) 30°.

Упражнение 4 (Пример 2. с. 362)

В правильном тетраэдре *ABCD* найдите угол между прямой *AD* и плоскостью *ABC*.



Решение. Пусть *E* – середина ребра *BC*. Искомый угол φ равен углу *DAE*. В треугольнике *DAE* имеем: $AD = a$, $AE = DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

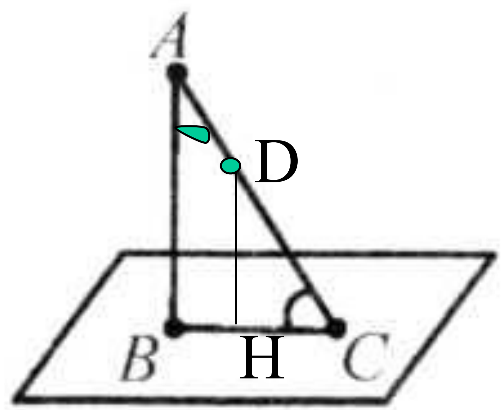
Используя теорему косинусов, получим $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2способ $DO \perp ABC, AO = \dfrac{2}{3}AE, \cos\varphi = \dfrac{AO}{AD} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2\cdot 3a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Упражнение 7 (Пример 3. с. 362)

Отрезок BC длиной 12 см является проекцией отрезка AC на плоскость α. Точка D принадлежит отрезку AC и $AD:DC = 2:3$. Найдите отрезок AD и его проекцию на плоскость α, если известно, что $AB = 9$ см.



Ответ: 6 см; 4,8 см.

Упражнение 8

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро b. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Ответ: $\cos \phi = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$.

Упражнение 9

Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол 30°. Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

Ответ: 45°.

№45.18

Дан прямоугольный треугольник ABC, катеты которого AC и BC равны соответственно 20 и 15 см. Через вершину A проведена плоскость α, параллельная прямой BC. Проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы.

Ответ: $3\sqrt{41}$ см.

№45.19

Сторона ромба равна a, острый угол $60°$. Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Проекция другой стороны на эту плоскость равна b. Найдите проекции диагоналей ромба.

Ответ: b и $\sqrt{2a^2 + b^2}$.