
Элементы теории случайных процессов



Будак Владимир Павлович,
Национальный исследовательский
университет «МЭИ»
кафедра светотехники

☐: +7 (095) 763-5239

BudakVP@mpei.ru



Случайные сигналы в ОЭС

1. Световое поле любого реального источника есть статистический сигнал – частичная когерентность
2. Фоны имеют сложную структуру случайно изменяющуюся по пространству и времени:
 - Волнений водной поверхности
 - Изменение прозрачности атмосферы
 - Природные фоны: лес, поля, горы – изменяются от места к месту по вероятностному закону
3. Шумы приемной аппаратуры

Случайность появляется всегда для систем с бесконечным числом свободы – атомарное строение вещества

Задачи с равновероятными исходами

Основные понятия теории вероятности – анализ азартных игр – задачи с равновероятными исходами:

- Вероятность орел – решка: $P(o) = P(p) = 1/2$;
- Грань игральной кости: $P(\Gamma) = 1/6$;
- Карта из колоды: $P(k) = 1/32$;

В случае равновероятных исходов вероятность события A :

$$P(A) = \frac{1}{\text{общее число исходов}}$$

В такой системе возможны и более сложные ситуации – вероятность двух тузов в прикупе:

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{32!}{2!30!}} = \frac{3 \cdot 4}{31 \cdot 32} \approx 0.0125$$

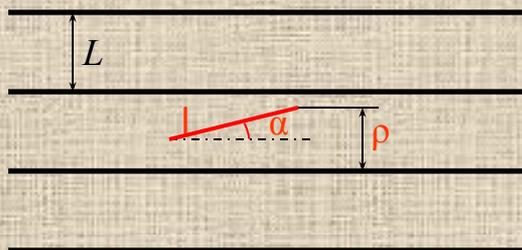
Общее определение вероятности по Laplace (Pierre-Simon, 1749–1827) для систем с равновероятными исходами:

$$P(A) = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

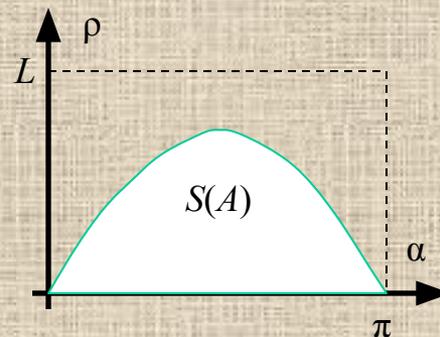
Системы с бесконечным числом исходов

Геометрическая вероятность

Hall A. On an experimental determination of π . – Messeng. Math., 1873, V2. P.113:



$$\rho \in [0, L], \alpha \in [0, \pi]$$
$$\rho \leq l \sin \alpha - \text{условие пересечения}$$



Определим некоторую меру события, которая пропорциональна площади:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S_0} = \frac{l}{\pi L} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha = \frac{2l}{\pi L}$$



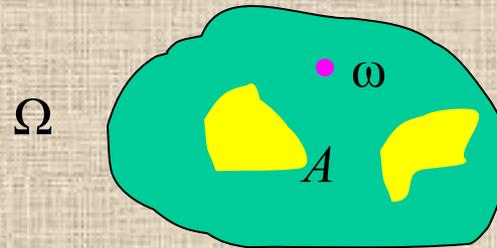
$$P(A) = \frac{n(A)}{N} \Rightarrow \pi \approx \frac{2l}{L} \frac{N}{n(A)}$$

Частотное определение вероятности Mises Richard (1883, Львов - 1953, Бостон):

$$\text{частота} = \frac{n(A)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P(A)$$

Что такое предел экспериментальной величины с точки зрения математической теории?

Вероятностное пространство



- I. Задано пространство Ω элементарных событий (исходов) ω : $\omega \in \Omega$;
- II. Событие A является множеством ω и подмножеством Ω – существует набор правил, по которым из элементов ω можно образовывать систему подмножеств – алгебра \square ;
- III. Введена мера множества события A , удовлетворяющая правилам:
 1. $1 \geq P(A) \geq 0$: $P(\Omega)=1$, $P(\square)=0$
 2. $(\forall A_i, i \in \overline{1, n}) (A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in \overline{1, n}, i \neq j) : \left(P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \right)$

Хорошо для математики, но неясна связь с физикой - частотой события

Случайная величина

- Случайная величина: функция $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ на заданном вероятностном пространстве (Ω, \square, P) ;
- Случайная величина сама является случайным событием на вероятностном пространстве (X, \square, P_ξ) – *непосредственно заданная случайная величина*;
- Алгебра \square есть система интервалов на некотором сегменте X ;
- $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$;
- Случайная величина может быть:

$$1. \text{ непрерывной : } P_\xi(dx) = p_\xi(x) dx \Rightarrow \int_{(X)} p_\xi(x) dx = 1$$

$$2. \text{ дискретной : } P_\xi(dx) = P_\xi(x) \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n P_\xi(x_i) = 1$$

что позволяет не разделять непрерывную и дискретную случайные величины

Моменты случайной величины

$$\mathbf{M}\xi = \int_{(\Omega)} \xi(\omega)P(d\omega) = \int_{(X)} xP_{\xi}(dx) = \int_{(X)} xp_{\xi}(x)dx \quad - \text{математическое ожидание (среднее)}$$

$$1. \mathbf{M}c = c;$$

$$3. \mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2;$$

$$2. \mathbf{M}c\xi = c\mathbf{M}\xi;$$

$$4. \mathbf{M}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \mathbf{M}\xi_1 \cdot \mathbf{M}\xi_2$$

$$\mathbf{M}\xi^n = \int_{(X)} x^n p_{\xi}(x)dx$$

Центральные моменты
случайной величины:

$$\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^n = \int_{(X)} (x - \mathbf{M}\xi)^n p_{\xi}(x)dx$$

Важнейшей из которых является дисперсия:

$$\mathbf{D}\xi = \int_{(X)} (x - \mathbf{M}\xi)^2 p_{\xi}(x)dx$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{M}(\xi^2 - 2\xi\mathbf{M}\xi + (\mathbf{M}\xi)^2) = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2;$$

$$1. \mathbf{D}c = 0;$$

$$2. \mathbf{D}c\xi = c^2\mathbf{D}\xi;$$

$$3. \mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2;$$

*Моменты позволяют оценить не саму величину, а ее
распределение*

Неравенство Чебышева

Чебышев Пафнутий Львович (1821–1894): $(\forall \varepsilon > 0) : \left(P\{|\xi - \mathbf{M}\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2} \right)$

$$\mathbf{D}\xi = \int_{(X)} (x - \mathbf{M}\xi)^2 P_\xi(dx) \geq \int_{|\xi - \mathbf{M}\xi| > \varepsilon} (x - \mathbf{M}\xi)^2 P_\xi(dx) \geq \varepsilon^2 \int_{|\xi - \mathbf{M}\xi| > \varepsilon} P_\xi(dx) = \varepsilon^2 P\{|\xi - \mathbf{M}\xi| > \varepsilon\}$$

Для дополнительного события: $(\forall \varepsilon > 0) : \left(P\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \leq \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2} \right)$

Специальная случайная величина:

$$\zeta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad (\forall \xi_i, i \in \overline{1, N}) : \left[(\mathbf{M}\xi_i = a) \wedge (\mathbf{D}\xi_i = \sigma^2) \right]$$

$$\mathbf{M}\zeta = \mathbf{M}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{M}\xi_i = a, \quad \mathbf{D}\zeta = \mathbf{D}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \mathbf{D}\xi_i = \frac{\sigma^2}{N}$$

$$P\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i - a\right| \leq \varepsilon\right\} > 1 - \frac{\sigma^2}{N\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} a$$

*Экспериментальное определение (измерение)
математического ожидания*

Закон больших чисел в форме Bernoulli

Bernoulli Jacob (1654 - 1705):

ξ_i – индикатор события A :

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если произошло } A, \\ 0, & \text{если не произошло } A. \end{cases}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i = \frac{n(A)}{N} \quad - \text{ частота события } A.$$

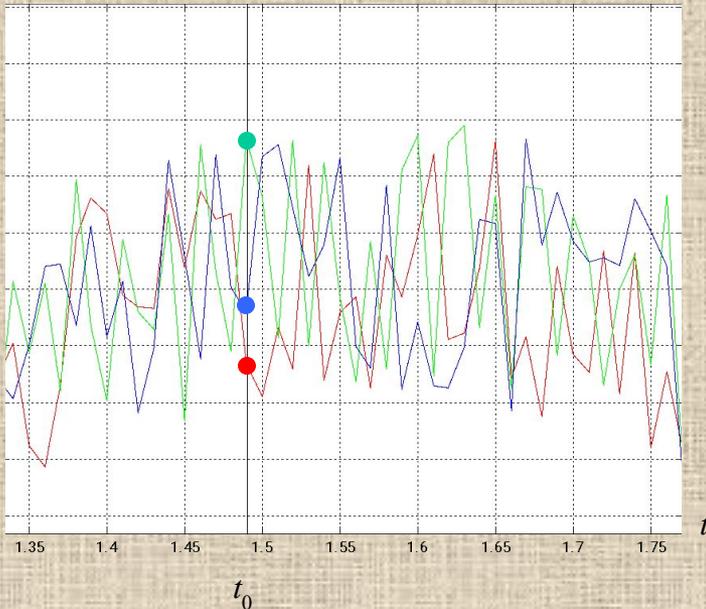
$$\mathbf{M}\xi_i = \int_{(\Omega)} \xi_i P_{\xi}(d\omega) = \int_{\substack{\text{по всем} \\ \omega \in A}} P_{\xi}(d\omega) = P(A)$$

$$P \left\{ \left| \frac{n(A)}{N} - P(A) \right| \leq \varepsilon \right\} > 1 - \frac{\sigma^2}{N\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{n(A)}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} P(A)$$

Закон больших чисел является мостиком, соединяющим математическую теорию с физическим содержанием

Случайные функции

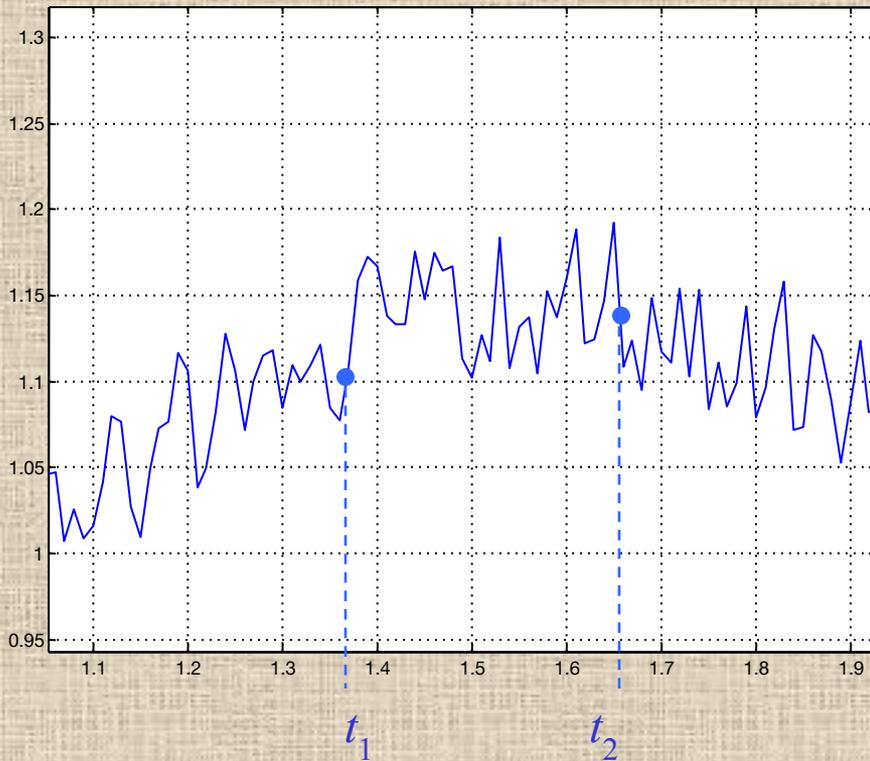
$\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$ на заданном вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , $t \in T$



- t – одномерная величина (время) – случайный процесс;
- t – многомерная величина (радиус-вектор \mathbf{r}) – случайное поле
- $\xi = \xi(t, \omega_0)$ – реализация случайного процесса – осциллограмма тока или напряжения
- $\xi = \xi(t_0, \omega)$ – случайная величина, для которой можно ввести $\mathbf{M}\xi(t)$, $\mathbf{D}\xi(t)$ – функции параметра t

Можно ввести и вероятность $P_\xi(t, \omega)$, но она не будет характеризовать процесс

Многомерные распределения



Для определения процесса необходимо знать вероятность того, что ξ в момент времени t_1 будет иметь значение x_1 , а в момент времени t_2 будет иметь значение x_2, \dots

$$P_n(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) = P_n(x_1 \leq \xi(t_1) \leq x_1 + \Delta x_1; \dots; x_n \leq \xi(t_n) \leq x_n + \Delta x_n)$$

Для полной характеристики ПРОЦЕССА нужно знать сколь угодно мерное распределение, что невозможно