Теория вероятностей в материалах ЕГЭ и ГИА.

1. Классическое определение вероятности.

Вероятностью события А **называется отношение числа благоприятных для него исходов испытания к числу всех равновозможных исходов.**

$$p(A) = m / n$$

где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события,

а n - число всех возможных исходов.

Свойства вероятности:

1. ***Вероятность достоверного события равна единице.***
2. ***Вероятность невозможного события равна нулю.***
3. ***Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.***

Определение 1.

Два события называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Определение 2.

Два события А и В называют независимыми, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет.

Определение 3.

Суммой или объединением событий А и В называется событие $A \cup B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих хотя бы одному событию А или В.

Определение 4.

Произведением или пересечением событий А и В называется событие $A \cap B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих одновременно и событию А, и событию В.

Определение 5.

***Разностью** событий А и В называется событие $A \setminus B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих событию А, но не принадлежащих событию В.*

№ 320209.

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но, не дойдя до отметки 1 час.

Решение:

На циферблате между десятью часами и одним часом три часовых деления. Всего на циферблате 12 часовых делений. Поэтому искомая вероятность равна 3/12=0,25.

Ответ: 0,25.

№ 320200.

На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.

Решение:

Пусть завод произвел n тарелок. В продажу поступят все качественные тарелки и 20% невыявленных дефектных тарелок: $0{,}9n + 0{,}2 \cdot 0{,}1n = 0{,}92n$

Поскольку качественных из них $0{,}9n$ **, вероятность купить качественную тарелку равна**

$$\frac{0{,}9n}{0{,}92n} = \frac{90}{92} \approx 0{,}978 \approx 0{,}98.$$

Ответ: 0,98.

№ 320195.

Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение:

Частота (относительная частота) события «гарантийный ремонт» равна 51/1000 = 0,051. Она отличается от предсказанной вероятности на 0,006.

Ответ: 0,006.

№ 320192.

В классе 26 человек, среди них два близнеца – Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение:

1 способ: Вероятность того, что Андрей попадет в первую группу равна 13/26, тогда вероятность того, что Сергей окажется в этой же группе равна 12/25. Вероятность того, что они оба попадут в первую группу равна (13/26)·(12/25) = 0,24.

Всего групп две. Значит вероятность того, что они оба попадут в одну группу равна 0,24 + 0,24 = 0,48 **Ответ: 0,48.**

2 способ: Пусть один из близнецов находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников. Вероятность того, что второй близнец окажется среди этих 12 человек, равна 12/25 = 0,48.

Ответ: 0,48.

№ 285925.

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

Решение:

В первом туре Руслан Орлов может сыграть с $26 - 1 = 25$ бадминтонистами, из которых $10 - 1 = 9$ из России. Значит, вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России, равна $9/25 = 0{,}36$.

Ответ: 0,36.

№ 320191.

На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Решение:

Всего в запасную аудиторию направили 250 − 120 − 120 = 10 человек. Поэтому вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории, равна 10/250 = 0,04.

Ответ: 0,04.

№ 320183.

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Решение:

Обозначим «1» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Физиком», другую сторону монеты обозначим «0». Тогда благоприятных комбинаций три: 110, 101, 011, а всего комбинаций 8: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Тем самым, искомая вероятность равна 3/8 = 0,375.

Ответ: 0,375.

№ 285923.

Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений - по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение:

На третий день запланировано $(80 - 8) : 4 = 18$ выступлений. Значит, вероятность того, что выступление представителя из России окажется запланированным на третий день конкурса, равна $18/80 = 0{,}225$.

Ответ: 0,225.

№ 282857.

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение:

По условию на каждые 100 + 8 = 108 сумок приходится 100 качественных сумок. Значит, вероятность того, что купленная сумка окажется качественной, равна 100/108 = 0,925925…..

Ответ: 0,93.

№ 282856.

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение:

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 1000 − 5 = 995 не подтекают. Значит, вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает, равна 995/1000 = 0,995.

Ответ: 0,995.

№ 282856.

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение:

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 1000 − 5 = 995 не подтекают. Значит, вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает, равна 995/1000 = 0,995.

Ответ: 0,995.

2. Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

№ 320203.

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

№ 320198.

Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

№ 320171.

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

3. Произведение событий. Теорема умножения вероятностей.

Вероятность **произведения** двух **зависимых** событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \setminus A).$$

№ 320206.

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение:

Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х – хорошая, О – отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

Р(ХХО) = 0,8·0,8·0,2 = 0,128;

Р(ХОО) = 0,8·0,2·0,8 = 0,128;

Р(ОХО) = 0,2·0,2·0,2 = 0,008;

Р(ООО) = 0,2·0,8·0,8 = 0,128.

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

Р(ХХО) + Р(ХОО) + Р(ОХО) + Р(ООО) = 0,128 + 0,128 + +0,008 + 0,128 = 0,392

Ответ: 0,392.

№ 320180.

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение:

Джон промахнется, если схватит пристрелянный револьвер и промахнется из него, или если схватит непристрелянный револьвер и промахнется из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot(1 - 0{,}9) = 0{,}04$ и $0{,}6\cdot(1 - 0{,}2) = 0{,}48$. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $0{,}04 + 0{,}48 = 0{,}52$.

Ответ: 0,52.

№ 320211.

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована.

Решение:

Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий: А – батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или В – батарейка исправна, но по ошибке забракована. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей эти событий. Имеем:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}01 = 0{,}0296.$$

Ответ: 0,0296.

4. Произведение событий. Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей этих событий:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

№ 320210.

Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение:

Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: $0,94 \cdot 0,94 = 0,8836$.

Ответ: 0,8836.

№ 320205.

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

Решение:

1 способ: Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Статор» начинает первую игру, не начинает вторую игру, начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: 0,5 ·0,5·0,5 = 0,125.

Ответ: 0,125

Решение:

2 способ: Можно решить эту же задачу через классическое определение вероятности. Составим таблицу всех исходов: «+» – Статор начинает игру, «-» – Статор не начинает игру.

1игра	2игра	3игра
+	+	+
+	+	-
+	-	+
+	-	-
-	+	+
-	-	+
-	+	-
-	-	-

Число всех исходов равно 8, а благоприятных исходов (Статор начинает первую и последнюю игры) – 1. Таким образом, искомая вероятность равна 1/8 = 0,125

№ 320202.

По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение:

Вероятность того, что первый магазин не доставит товар, равна 1 − 0,9 = 0,1. Вероятность того, что второй магазин не доставит товар, равна 1 − 0,8 = 0,2. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: 0,1 · 0,2 = 0,02.

Ответ: 0,02.

№ 320201.

В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение:

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027$

Ответ: 0,027.

№ 320175.

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение:

Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равно произведению вероятностей этих событий:
$0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.
Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

Ответ: 0,91.

№ 320173.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение:

Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью 1 − 0,8 = 0,2. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна

$$0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}02048 \approx 0{,}02.$$

Ответ: 0,02.

№ 319355.

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение:

Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:

$0,52 \cdot 0,3 = 0,156.$

Ответ: 0,156.

№ 320188.

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение:

Команда может получить не меньше 4 очков в двух играх тремя способами: 3+1, 1+3, 3+3. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Каждое из этих событий представляет собой произведение двух независимых событий – результата в первой и во второй игре. Отсюда имеем:

$$p(n \geq 4) = p(3+1) + p(1+3) + p(3+3) =$$

$$= p(3) \cdot p(1) + p(1) \cdot p(3) + p(3) \cdot p(3) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}16 = 0{,}32.$$

Ответ: 0,32.

5. Сложение вероятностей совместных событий.

Вероятность суммы двух совместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

№ 320199.

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку – 0,8, по иностранному языку – 0,7 и по обществознанию – 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение:

1 способ: ***Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, З. нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A, B, C и D – это события, в которых З. сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов.***

Для вероятности поступления имеем:

$$p(A \cap B \cap (C \cup D)) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C \cup D) =$$

$$= p(A) \cdot p(B) \cdot (p(C) + p(D) - p(C \cap D)) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}7 + 0{,}5 - 0{,}7 \cdot 0{,}5) = 0{,}408.$$

Ответ: 0,408.

2 способ:

Вычислим вероятности поступления в институт.

Вероятность поступления на «Лингвистику»:

$$p_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5.$$

Вероятность поступления на «Коммерцию»:

$$p_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5.$$

Вероятность поступления на обе специальности:

$$p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5.$$

Тогда вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей вычисляется по теореме сложения вероятностей независимых событий:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}7 + 0{,}15) = 0{,}48 \cdot 0{,}85 = 0{,}408.$$

Ответ: 0,408.

№ 320172.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение:

1 способ: **Рассмотрим события А = «кофе закончится в первом автомате»,**

В = «кофе закончится во втором автомате».

Тогда $A \cap B$ **=«кофе закончится в обоих автоматах»,**

$A \cup B$ **= «кофе закончится хотя бы в одном автомате».**

По условию Р(А) = Р(В) = 0,3; $p(A \cap B) = 0{,}12.$

События А и В совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48.$$

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что хотя бы кофе останется в обоих автоматах, равна 1 − 0,48 = 0,52.

Ответ: 0,52.

Решение:

2 способ:

Вероятность, что кофе не будет только в 1 автомате, равна $0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}18$.

Вероятность, что кофе не будет только во 2 автомате, равна $0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}18$.

Вероятность, что кофе не будет в обоих автоматах, равна по условию 0,12.

Тогда вероятность того, что кофе не будет хотя бы в одном автомате, равна $0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}48$. Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

Ответ: 0,52.

6. Формула полной вероятности. .

Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместных событий B_1, B_2,…,B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$p(A) = p(B_1)\cdot p(A \setminus B_1) + p(B_2)\cdot P(A \setminus B_2) + \ldots + p(B_n)\cdot p(A \setminus B_n)$$

№ 320177.

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение:

Пусть событие А состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события B_1 и B_2 состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события $A \backslash B_1$ и $A \backslash B_2$ — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна:

$$p = p(A \setminus B_1) \cdot p(B_1) + p(A \setminus B_2) \cdot p(B_2) =$$

$$= 0{,}4 \cdot p(B_1) + 0{,}2 \cdot (1 - p(B_1)) = 0{,}2 \cdot p(B_1) + 0{,}2$$

Поскольку по условию эта вероятность равна 0,35, имеем:

$$p(B_1) = (0{,}35 - 0{,}2) : 0{,}2 = 0{,}75$$

Ответ: 0,75.

Спасибо

за

внимание!