



**Подготовка к ЕГЭ-2014
по математике**

**«Применение производной и
первообразной»**

**прототипы В8 из открытого банка
заданий ЕГЭ**

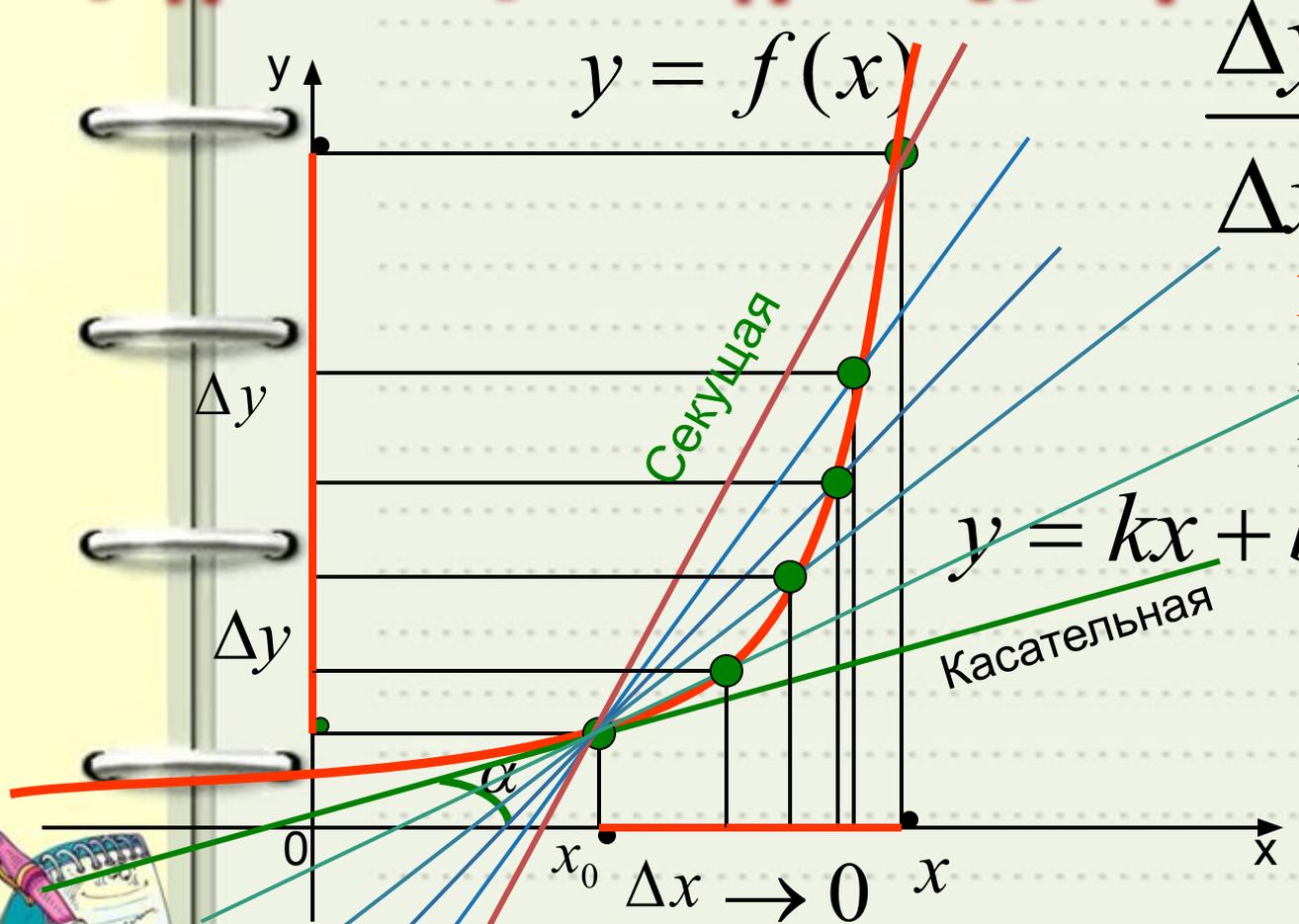
Немного теории.

**Производная
и её применение**

**для
исследования
функции**



Определение производной функции в данной точке.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой (секущей)

$$y = kx + b$$

Обозначение:

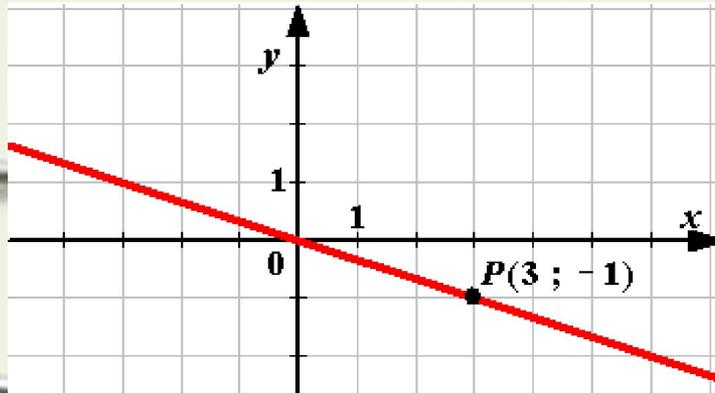
$$f'(x)$$



Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Угловой коэффициент прямой.



Прямая проходит через начало координат и точку $P(3; -1)$.
Чему равен ее угловой коэффициент?

$$y = kx + b$$

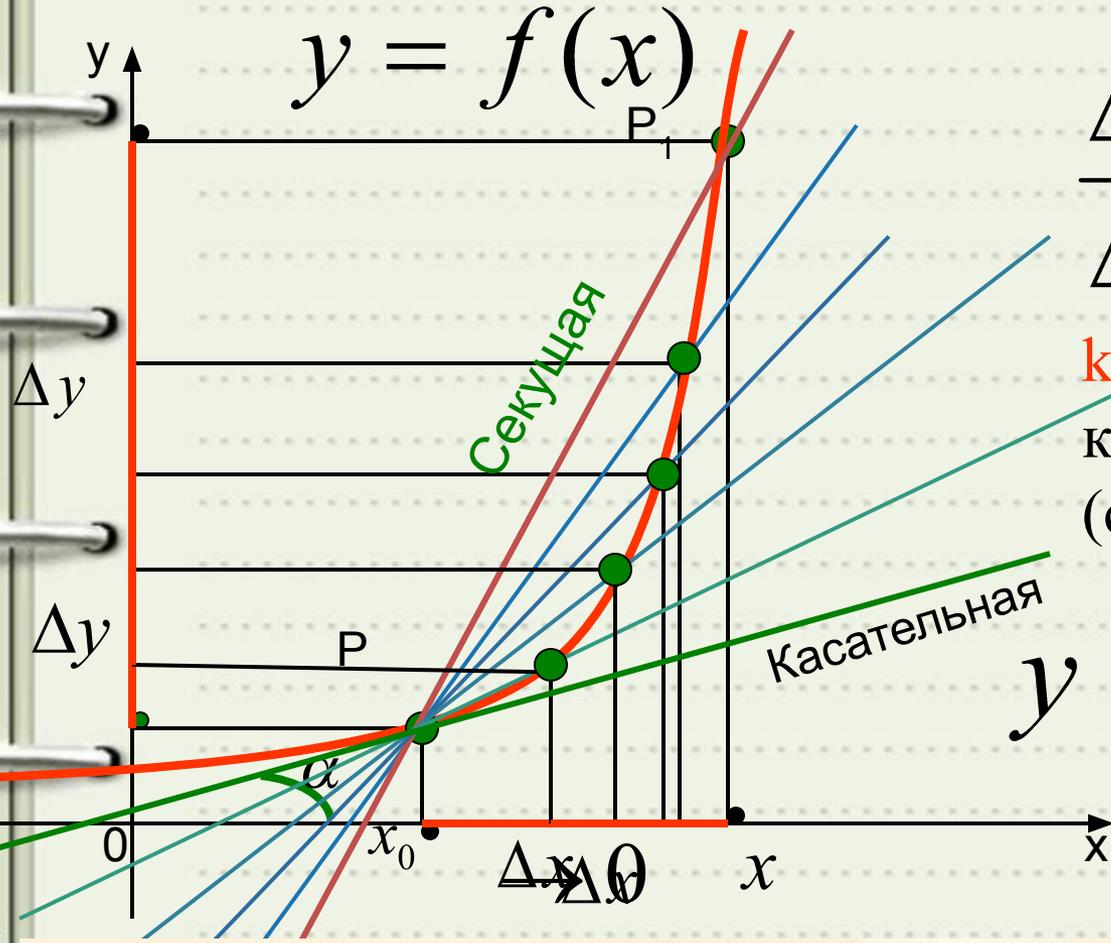
$$y = kx$$

$$-1 = 3k \longrightarrow k = -\frac{1}{3}$$



При $\Delta x \rightarrow 0$ угловой коэффициент секущей $\rightarrow k$ угловому коэффициенту касательной.

1. Геометрический смысл производной.



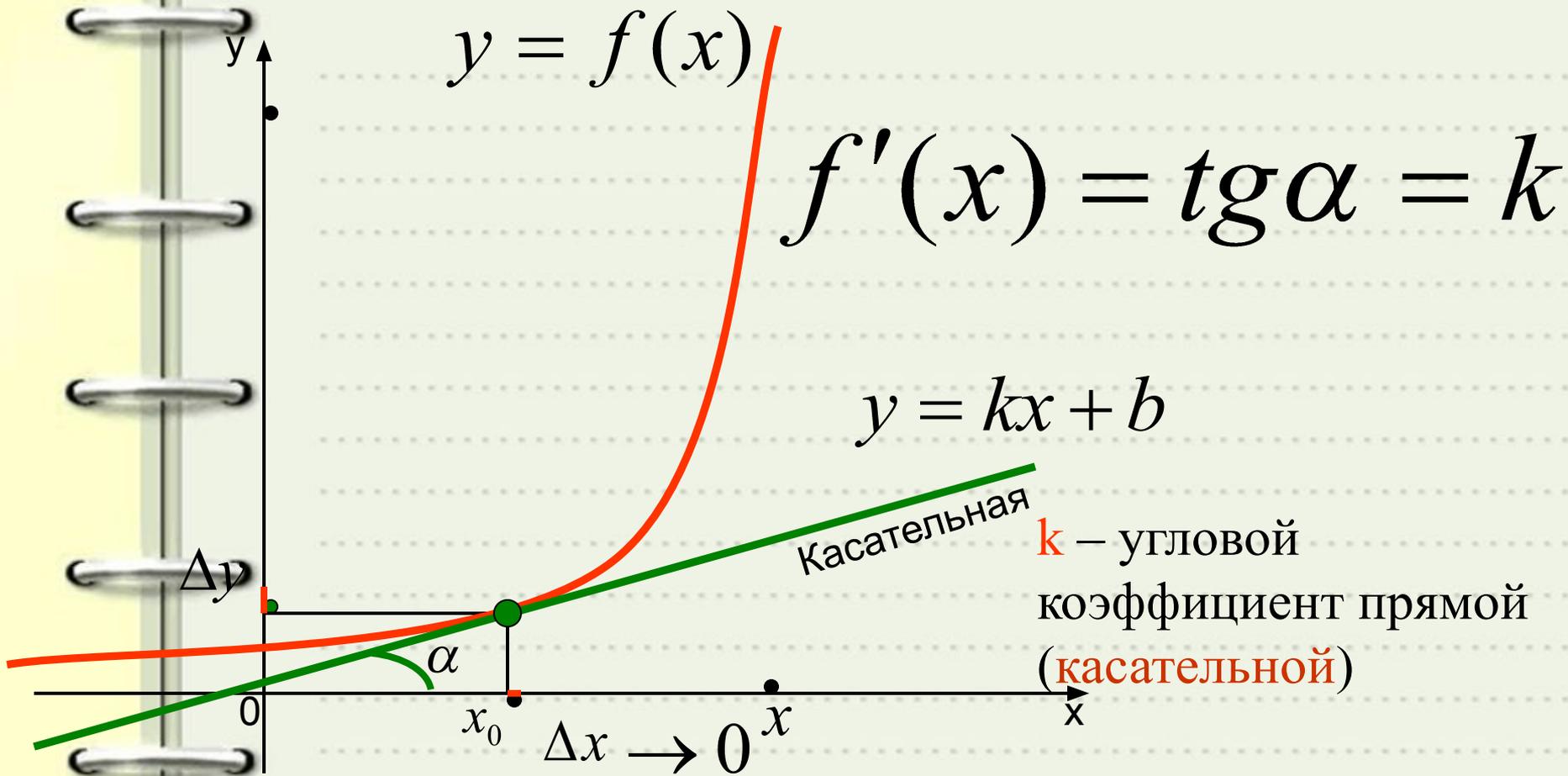
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой (секущей)

$$y = kx + b$$



Секущая стремится занять положение касательной. То есть, касательная есть предельное положение секущей.



Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

2. Механический смысл производной.

Используя слово «предел», можно сказать, что мгновенная скорость в точке t – это предел средней скорости при стягивании отрезка, на котором она изменяется, в точку t или в символической записи

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{S(t_1) - S(t)}{t_1 - t}$$

Производная - это скорость



2. Механический смысл производной.

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Δx – перемещение тела

Δt – промежуток времени

в течение которого выполнялось движение

При $\Delta t \rightarrow 0$ $v_{\text{ср.}} \rightarrow$ к мгновенной скорости $v(t)$, следовательно, $v(t) = S'(t)$.

$$S'(t) = v(t) \quad \text{или} \quad x'(t) = v(t)$$

$$f'(x) = v(x)$$



Прототип В8 № 27485

Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = 7$:

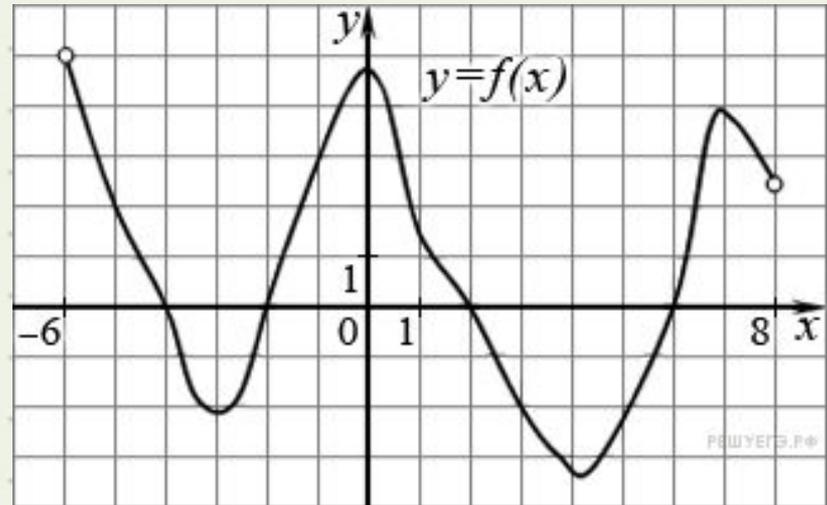
$$(x^2+6x-8)' = 7; 2x+6=7; x=0,5$$

Ответ: 0,5.



Прототип В8 № 27487

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Решение:

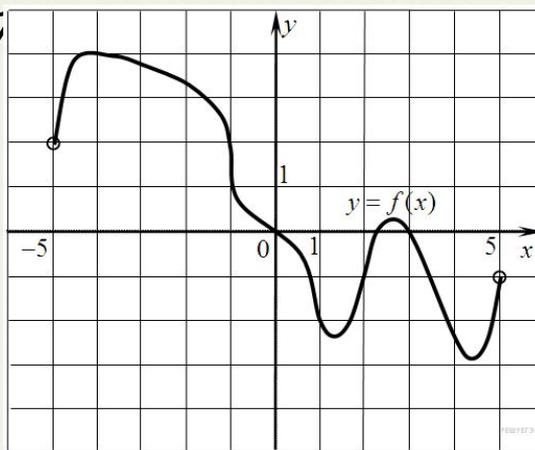
Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах $(-3; 0)$ и $(4; 6; 7)$. В них содержатся целые точки $-2, -1, 5$ и 6 , всего их 4.

Ответ: 4.



Прототип В8 № 27489

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней



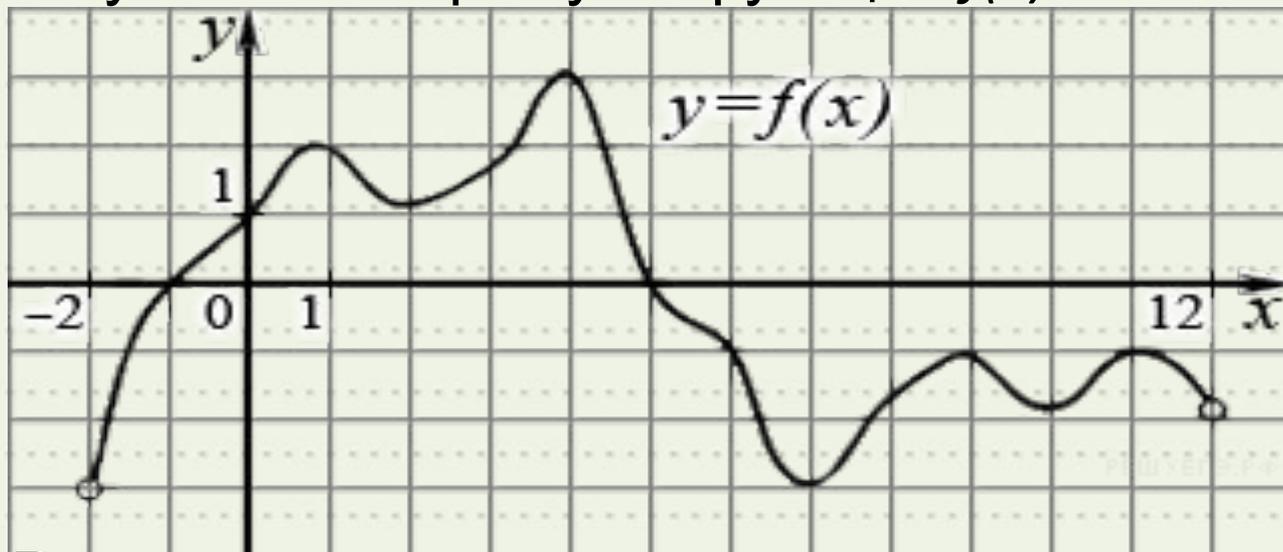
Решение:

Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловым коэффициентом касательной равен значению производной в точке касания. Производная равна нулю в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней в 4 точках.



Прототип В8 № 27490

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Решение:

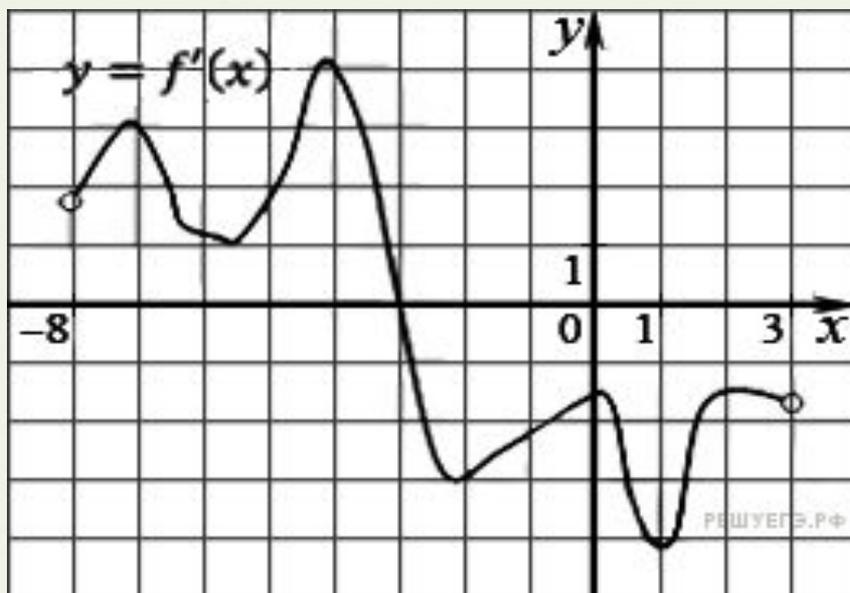
Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна $1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44$.

Ответ: 44.



Прототип В8 № 27491

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Решение:

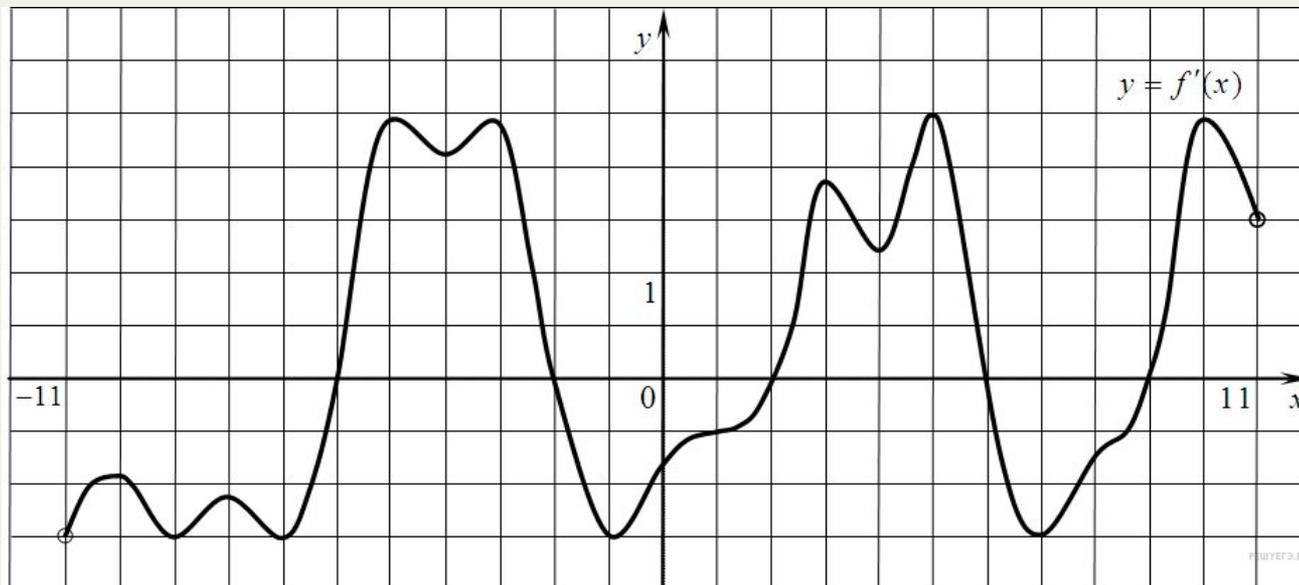
На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -3 .

Ответ: -3 .



Прототип В8 № 27496

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-10; 10]$.



Решение:

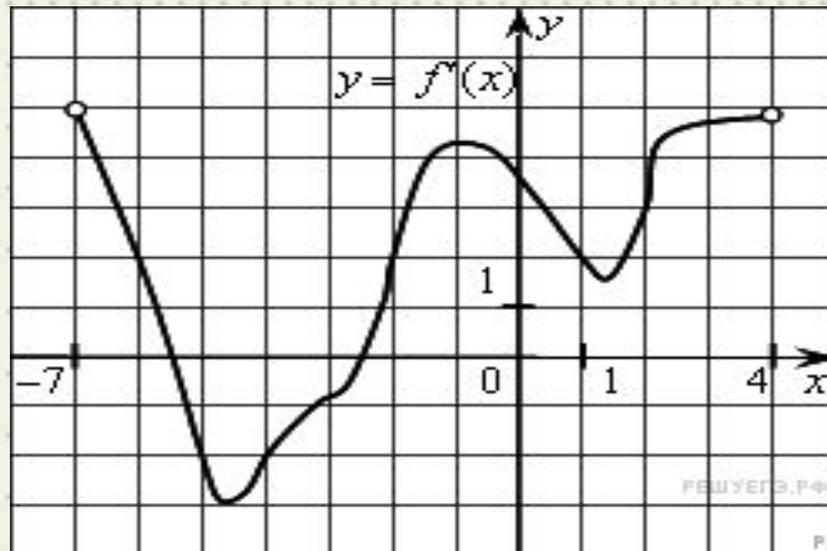
Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной — изображенным на графике нулем производной. Производная обращается в нуль в точках -6 , -2 , 2 , 6 , 9 . На отрезке $[-10; 10]$ функция имеет 5 точек экстремума.

Ответ: 5.



Прототип В8 № 27497

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 4)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Решение:

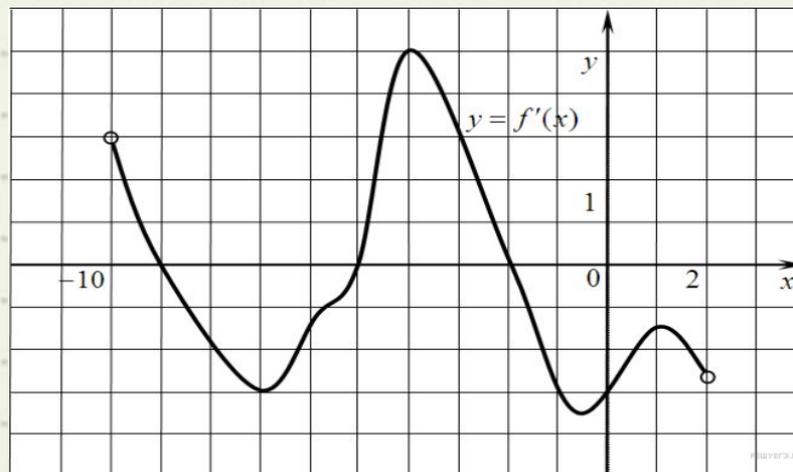
Промежутки возрастания данной функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых ее производная положительна, то есть интервалам $(-7; -5,5)$, $(-2,5; 4)$. Данные интервалы содержат целые точки $-6, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Их сумма равна -3 .

Ответ: -3 .



Прототип В8 № 27501

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны -2 . Найдем количество точек, в которых $y'(x_0) = -2$, геометрически это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y = -2$. На данном интервале таких точек 5.

Ответ: 5.



Прототип В8 № 27503

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .

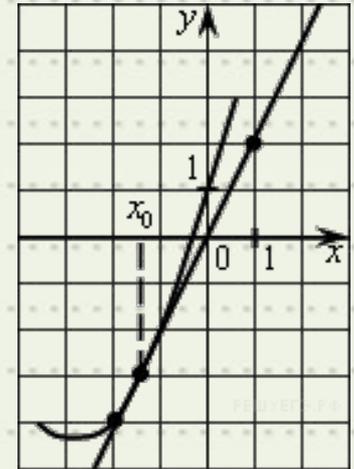
Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(1; 2)$, $B(1; -4)$, $C(-2; -4)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB

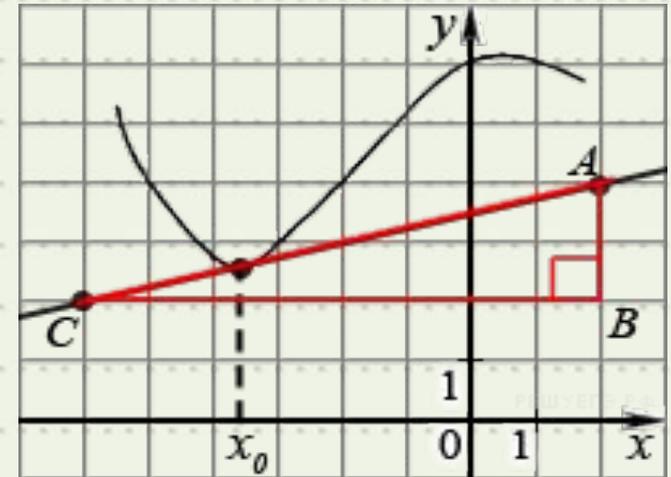
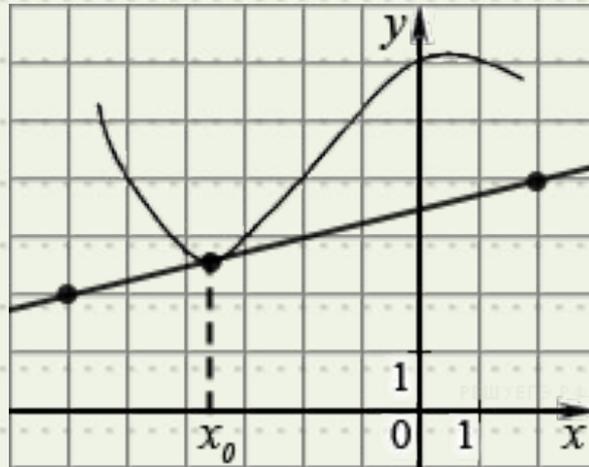
$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.



Прототип В8 № 27504

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс.

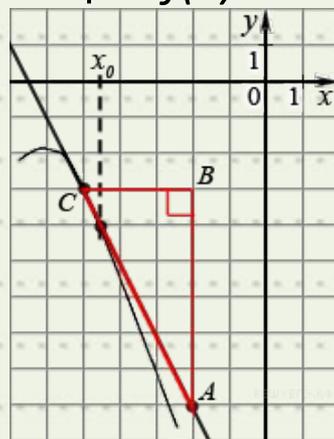
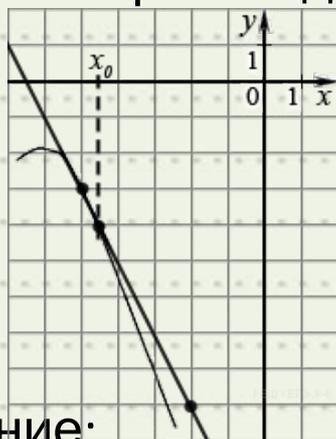
Построим треугольник с вершинами в точках $A(2; 4)$, $B(2; 2)$, $C(-6; 2)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB . Поэтому

Ответ: 0,25.



Прототип В8 № 27505

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(-2; -9)$, $B(-2; -3)$, $C(-5; -3)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB . Поэтому

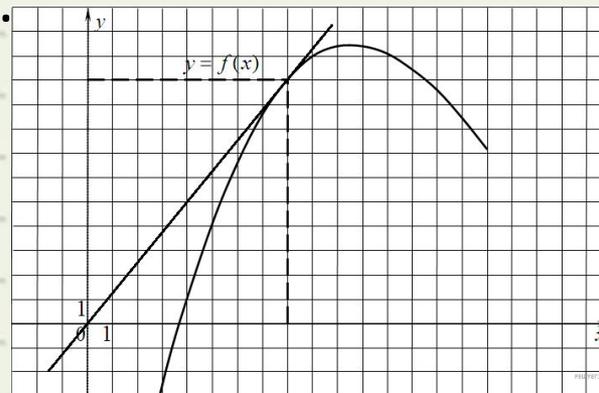
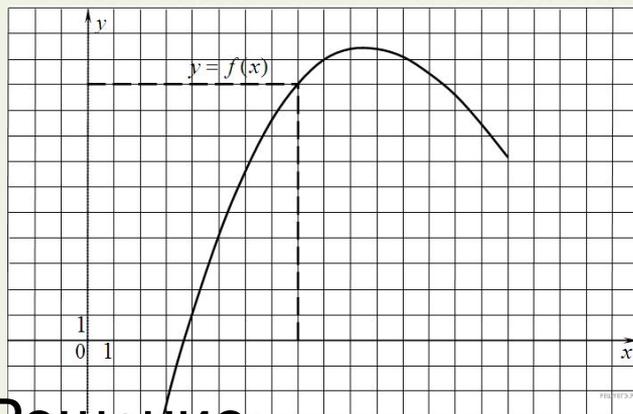
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2$$

Ответ: -2.



Прототип В8 № 40129

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$.
Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



Решение:

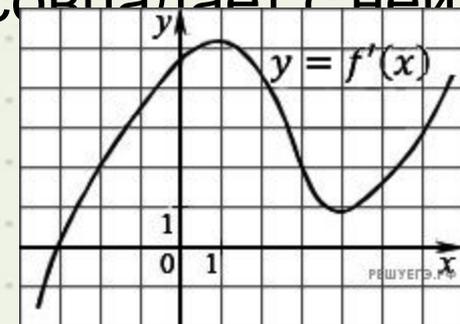
Поскольку касательная проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку $(8; 10)$, поэтому $k = 1,25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: $f'(8) = 1,25$.

Ответ: 1,25.



Прототип В8 № 40131

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y=f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



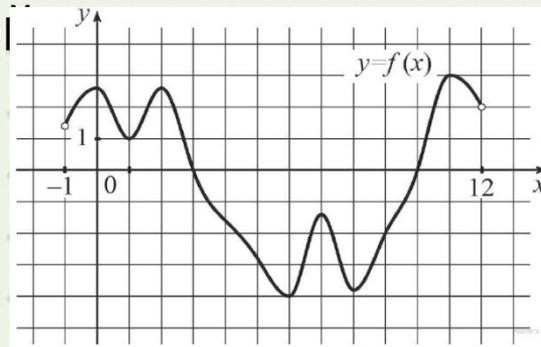
Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, она имеет вид $y=b$, и её угловой коэффициент равен 0. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент, равен нулю, а значит, и производная равна нулю. Производная равна нулю в той точке, в которой её график пересекает ось абсцисс. Поэтому искомая точка $x=-3$
ответ: -3.



Прототип В8 № 501541

На рисунке изображен график функции , определенной на интервале $(-1;12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=-12$.



Решение:

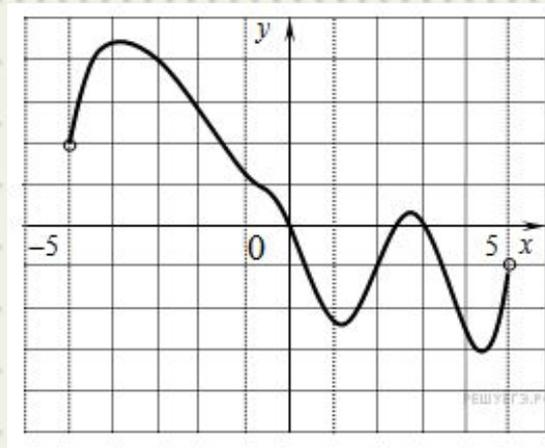
Поскольку касательная параллельна прямой $y=-12$, её угловой коэффициент равен 0. Следовательно, необходимо найти точки, в которых угловой коэффициент касательной, равен нулю. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поэтому необходимо найти точки, в которых производная равна нулю. Это точки экстремума, их 7.

Ответ: 7.



Прототип В8 № 119971

На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Решение:

Производная изображенной на рисунке функции $f(x)$ равна нулю в точках экстремумов: $-4,7$; $1,4$; $2,6$ и $4,2$.

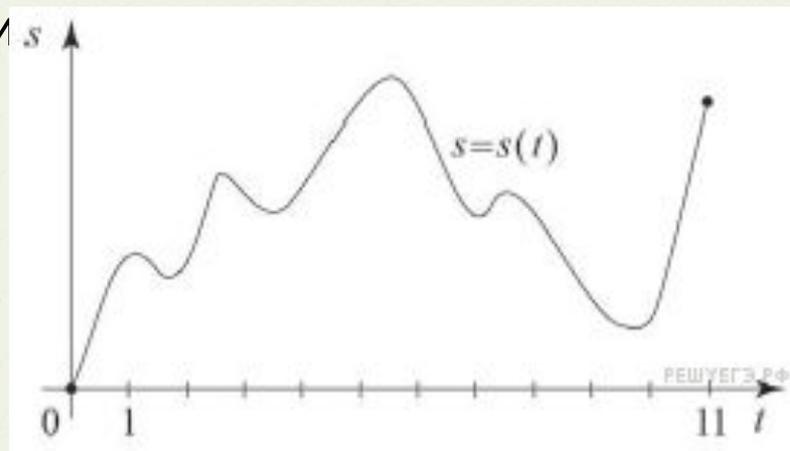
Производная равна нулю в 4 точках.

Ответ: 4.



Прототип В8 № 500954

Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 11 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз точка M меняла направление



Решение:

В момент времени, когда точка меняет направление движения, ее мгновенная скорость равна нулю. Мгновенная скорость равна производной перемещения по времени. Значение производной равно нулю в точках экстремума функции $s(t)$. Точек экстремума на графике 8.

Ответ: 8.



Прототип В8 № 119975

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

Решение:

Найдем закон изменения скорости:

$$V(t)=x'(t)=12t-48$$

При $t = 9$ с имеем:

$$V(9)=12*9-48=60 \text{ м/с.}$$

Ответ: 60.



Прототип В8 № 119978

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-13t+23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

Решение:

Найдем закон изменения скорости: $v(t)=x'(t)=2t-13$ м/с. Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 3 м/с, решим уравнение: $2t-13=3$;
 $2t=16$; $t=8$ с.

Ответ: 8.



Прототип В8 № 317539

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1; x_2; x_3; \dots; x_8$. В скольких из этих точек производная функции положительна?



Решение:

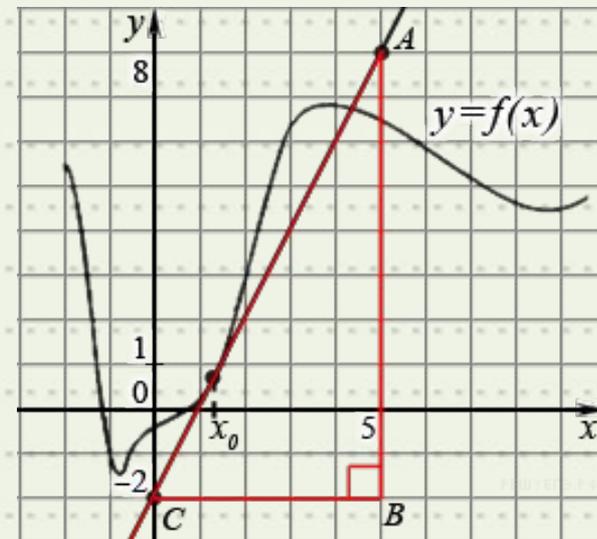
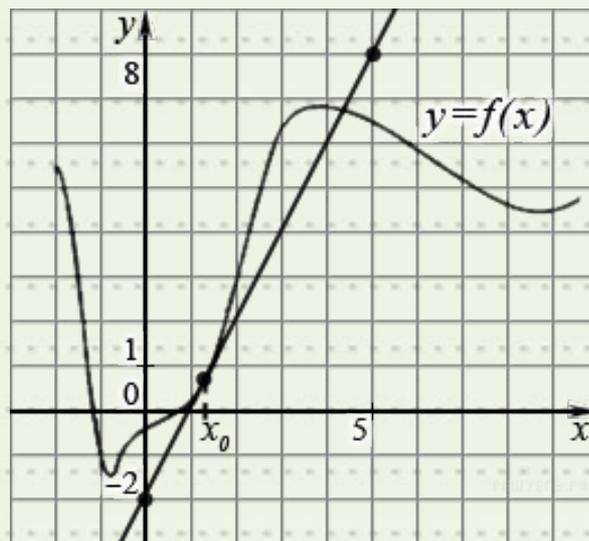
Положительным значениям производной соответствует интервалы, на которых функция $y=f(x)$ возрастает. На них лежат точки $x_1; x_2; x_5; x_6; x_7$. Таких точек 5.

Ответ: 5.



Прототип В8 № 500035

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 .



Решение:

Значение производной в точке касания равно тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(5;8)$, $B(5;-2)$ и $C(0;-2)$. Угол ACB равен углу наклона касательной. Его тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему:

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{5} = 2.$$

Ответ: 2.



Прототип В8 № 317540

На рисунке изображён график функции и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции отрицательна?



Решение:

Отрицательным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция $f(x)$ убывает. В этих интервалах лежат точки $x_4; x_5; x_6; x_7; x_8; x_{11}; x_{12}$. Таких точек 7.

Ответ: 7.



Прототип В8 № 317543

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -2 , -1 , 1 , 2 . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Решение:

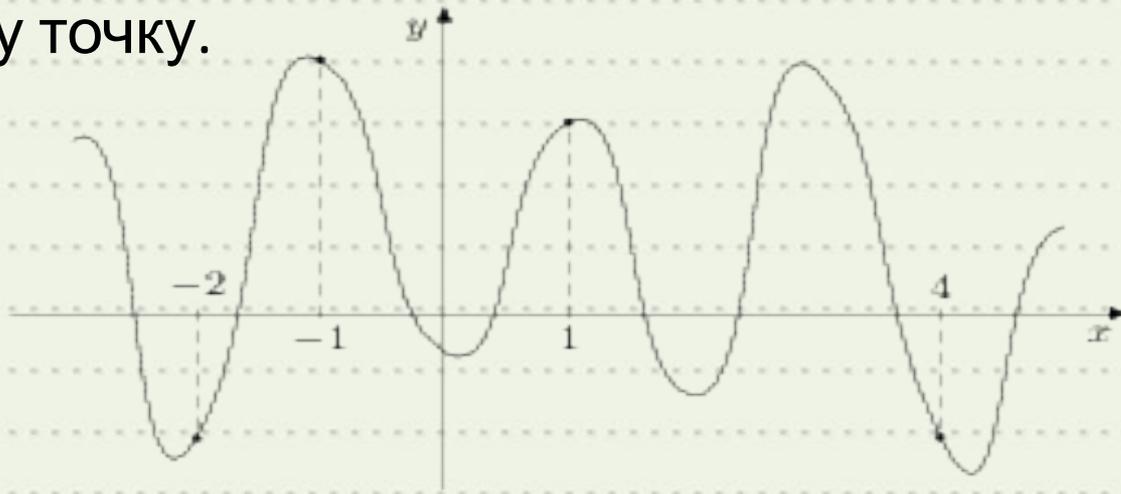
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная положительна в точках -2 и 2 . Угол наклона (и его тангенс) явно больше в точке -2 .

Ответ: -2



Прототип В8 № 317544

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -2 , -1 , 1 , 4 . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Решение:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная отрицательна в точках -1 и 4 . Модуль тангенса угла наклона касательной явно больше в точке 4 , поэтому тангенс в этой точке наименьший.



Немного теории.
**Первообразная,
интеграл
и их применение**



ПЕРВООБРАЗНАЯ

• Обозначения: $f(x)$ – *идієсâіäіà* y

$F(x)$ – *іäđâîáđàç* $іày$

□ Функция F называется первообразной для функции f , если выполняется условие

$$F'(x) = f(x)$$



НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

- Совокупность всех первообразных $F(x)+c$ для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

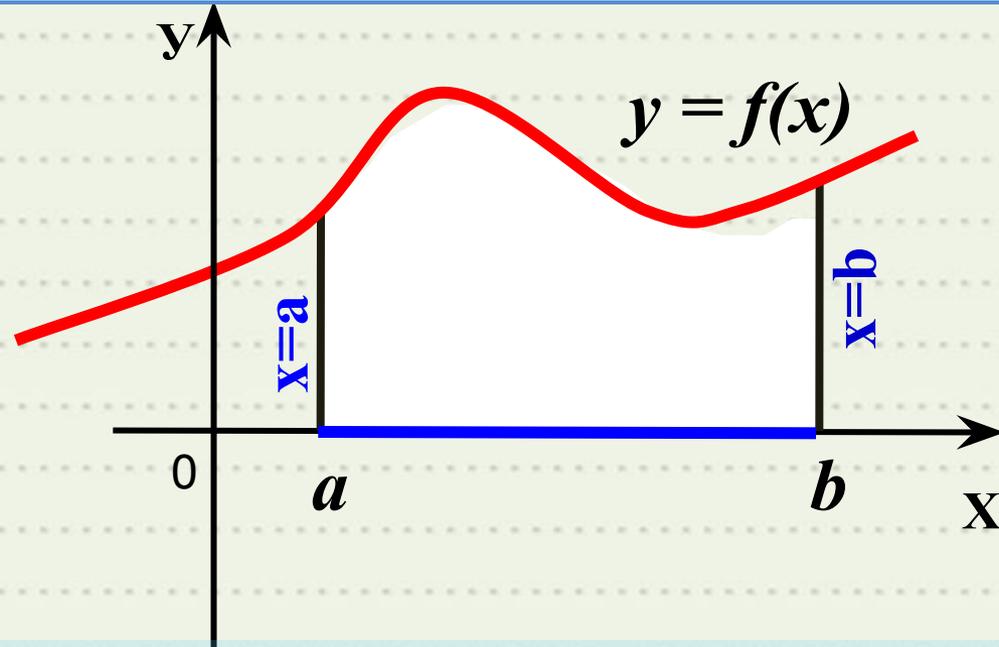
- где $f(x)$ – подинтегральная функция,
- $f(x)dx$ – подинтегральное выражение (дифференциал),
- c – постоянная интегрирования.



Криволинейная

трапеция

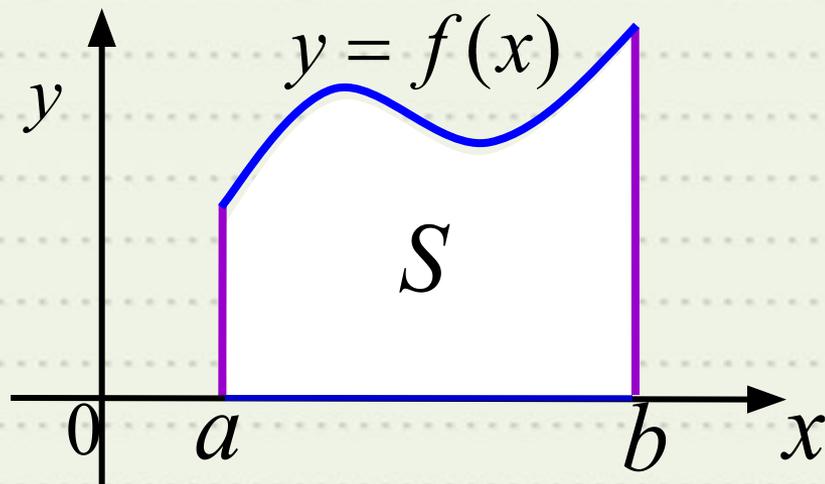
Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;b]$ знака функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$.



Отрезок $[a;b]$ называют **основанием** этой криволинейной трапеции



Площадь криволинейной трапеции.

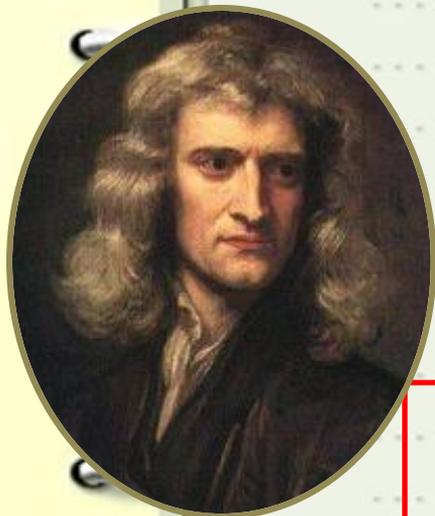


$$S = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$.



Формула Ньютона-Лейбница



1643—1727

$$S = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

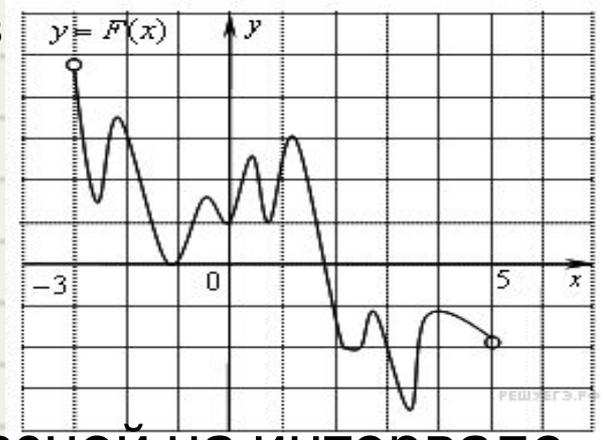


1646—1716



Прототип В8 № 323077

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке



Решение:

По определению первообразной на интервале $(-3; 5)$ справедливо равенство: $f(x)=F'(x)$

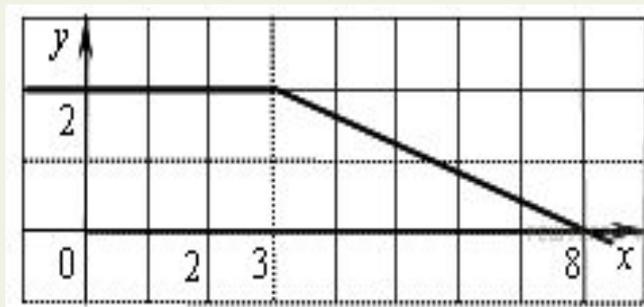
Следовательно, решениями уравнения $f(x)=0$ являются точки экстремумов изображенной на рисунке функции $F(x)$. Это точки $-2,6; -2,2; -1,2; -0,5; 0; 0,4; 0,8; 1,2; 2,2; 2,8; 3,4; 3,8$. Из них на отрезке $[-2; 4]$ лежат 10 точек. Таким образом, на отрезке $[-2; 4]$ уравнение $f(x)=0$ имеет 10 решений.

Ответ:10.



Прототип В8 № 323078

На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8)-F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



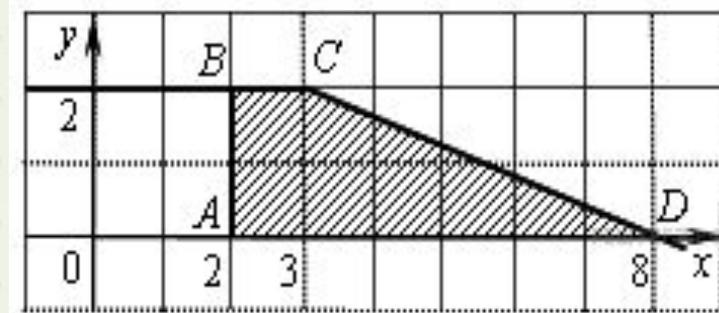
Решение:

Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади

выделенной на рисунке трапеции ABCD. Поэтому

$$F(b)-F(a)=\frac{(1+6)}{2} \cdot 2=7$$

Ответ: 7.

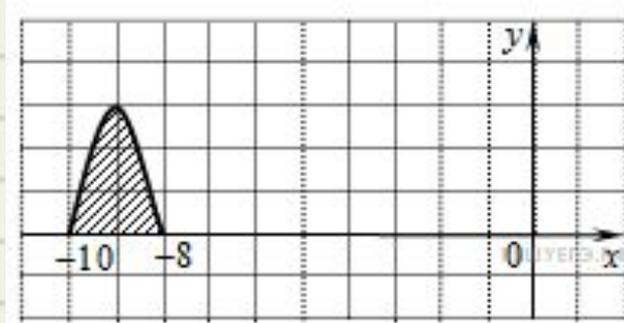


Прототип В8 № 323080

На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=-3x^3-27x^2-240x-8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Решение:

Найдем формулу, задающую функцию $f(x)$, график которой изображён на рисунке.



$$f(x) = F'(x) = -3x^2 - 54x - 240 = -3(x^2 + 18x) - 240 = 3 - 3(x+9)^2.$$

Следовательно, график функции $f(x)$ получен сдвигом графика функции $y=3-3x^2$ на 9 единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y=3-3x^2$ и отрезком оси абсцисс. Имеем:

$$S = \int_{-1}^1 (3 - 3x^2) dx = 2 \int_0^1 (3 - 3x^2) dx = 2(3x - x^3) \Big|_0^1 = 2(3 - 1) - 0 = 4.$$

Ответ: 4.



УДАЧИ

НА ВСЕ

100%

