Игры с природой

Природа - совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений .

m возможных управленческих решений.

n вариантов развития событий.

Если будет принято *i*-е решение, при этом события будут развиваться по j-му варианту, то фирма, получит доход a_{ij}

$$A = (a_{ij}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

матрица последствий или матрица доходов.

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Ситуация полной неопределенности характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации.
В этой ситуации возможны различные стратегии игрока, отличающиеся друг от друга склонностью игрока к риску.

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило максимакса (правило "розового оптимизма").

игрок надеется на самый благоприятный вариант развития событий при любом выборе управленческого решения (стратегии).

для каждой стратегии $i=\overline{1,m}$ игрок определяет максимально

возможный доход $\max\limits_{j=\overline{1,n}} a_{ij}$

После этого игрок выбирает стратегию (строку), дающую максимально возможный максимальный доход.

$$a_{i^* j^*} = \max_{i=\overline{1,n}} \max_{j=\overline{1,n}} a_{ij}$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма).

игрок рассчитывает только на самый плохой вариант развития событий, т.е. вариант, приносящий минимальный доход

для каждой стратегии $i = \overline{1,m}$ игрок определяет минимально

возможный доход $\min\limits_{j=\underline{1,n}} a_{ij}$

После этого игрок выбирает стратегию (строку), дающую максимально возможный минимальный доход.

$$a_{i^* j^*} = \max_{i=\underline{1,n}} \min_{j=\underline{1,n}} a_{ij}$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило Гурвица Является промежуточным между правилом максимакса и правилом Вальда.

взвешиваются пессимистический и оптимистический подходы к ситуации

для каждой стратегии $i = \overline{1, m}$ игрок определяет линейную

комбинацию минимального и максимального дохода

$$S_i = \lambda \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij} + (1-\lambda) \max_{j=\overline{1,n}} a_{ij} \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

После этого игрок выбирает стратегию (строку), дающую максимально возможное значение S.

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0.5$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило Сэвиджа (правило минимального риска).

Предположим, что произойдет j-й вариант развития событий. Если бы игрок это знал, то он получил бы доход

$$a_j = \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij}$$

принятие i-го решения несет риск недобрать

$$r_{ij} = a_j - a_{ij}$$

$R = (a_{ij}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ матрица риска

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило Сэвиджа (правило минимального риска).

для каждой стратегии $i=\overline{1,m}$ игрок определяет максимально возможный риск $\max\limits_{j=\overline{1,n}} r_{ij}$

После этого игрок выбирает стратегию (строку), минимизирующую максимально возможный риск

$$r_{i^* j^*} = \min_{i=\overline{1,n}} \max_{j=\overline{1,n}} r_{ij}$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило Лапласа. игрок рассчитывает средний доход для каждой стратегии, предполагая, что все варианты развития событий равновероятны .

$$\overline{a}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad i = \overline{1,m}$$

После этого игрок выбирает стратегию, максимизирующую средний доход.

$$\overline{a}_{i^*} = \max_{i=\overline{1,n}} \overline{a}_i$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Принятие решений в условиях частичной неопределенности

p_j вероятность того, что реальная ситуация развивается по j-му варианту

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило максимальной вероятности.

игрок предполагает, что наступит наиболее вероятный исход развития событий.

Для этого варианта он выбирает стратегию, дающую максимальный доход.

Вариант	1	2	3	4
Вероятность	0,2	0,1	0,3	0,4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

a_i

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода.

Доход, получаемый фирмой при реализации i-й стратегии, является случайной величиной a_i с рядом распределения

a_{i1}	a_{i2}	$\cdots$	a_{in}
p_1	p_2	$\cdots$	p_n

a_i

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода.

Доход, получаемый фирмой при реализации i-й стратегии, является случайной величиной a_i с рядом распределения

a_{i1}	a_{i2}	...	a_{in}
p_1	p_2	...	p_n

$$Ma_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$$

$$\overline{a}_{i^*} = \max_{i=\overline{1,n}} Ma_i$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Вариант	1	2	3	4
Вероятность	0,2	0,1	0,3	0,4

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Вариант	1	2	3	4
Вероятность	0,2	0,1	0,3	0,4

$$\bar{a}_1 = 2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 = 4,9;$$

$$\bar{a}_2 = 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 12 \cdot 0,4 = 6,7;$$

$$\bar{a}_3 = 8 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,4 = 7.$$

a_i

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило минимизации среднего ожидаемого риска .

Риск фирмы при реализации i-й стратегии, является случайной величиной r_i с рядом распределения

r_{i1}	r_{i2}	...	r_{in}
p_1	p_2	...	p_n

$$Mr_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j$$ средний ожидаемый риск

$$\bar{r}_{i^*} = \min_{i=\overline{1,n}} Mr_i$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Вариант	1	2	3	4
Вероятность	0,2	0,1	0,3	0,4

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Вариант	1	2	3	4
Вероятность	0,2	0,1	0,3	0,4

$$\overline{r_1} = 6 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,4 = 4,4;$$

$$\overline{r_2} = 6 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,4 = 2,6;$$

$$\overline{r_3} = 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 2,3.$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Правило, учитывающее средний ожидаемый доход и стандартное отклонение.

правило максимизации ожидаемого дохода не учитывает риск, связанный с выбором стратегии, т.е. «разброс» возможных вариантов развития событий.

$D_i = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - Ma_i \right)^2 p_j$ дисперсия дохода для i-й стратегии

$\sigma_i = \sqrt{D_i}$ стандартное отклонение дохода для i-й стратегии (мера риска)

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Вариант	1	2	3	4
Вероятность	0,2	0,1	0,3	0,4

$$\bar{a}_1 = 2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 = 4,9;$$

$$\bar{a}_2 = 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 12 \cdot 0,4 = 6,7;$$

$$\bar{a}_3 = 8 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,4 = 7.$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Вариант	1	2	3	4
Вероятность	0,2	0,1	0,3	0,4

$$D_1 = (2-4{,}9)^2 \cdot 0{,}2 + (5-4{,}9)^2 \cdot 0{,}1 + (8-4{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (4-4{,}9)^2 \cdot 0{,}4 = 4{,}89;$$

$$D_2 = (2-6{,}7)^2 \cdot 0{,}2 + (3-6{,}7)^2 \cdot 0{,}1 + (4-6{,}7)^2 \cdot 0{,}3 + (12-6{,}7)^2 \cdot 0{,}4 = 19{,}21;$$

$$D_3 = (8-7)^2 \cdot 0{,}2 + (5-7)^2 \cdot 0{,}1 + (3-7)^2 \cdot 0{,}3 + (10-7)^2 \cdot 0{,}4 = 9.$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Вариант	1	2	3	4
Вероятность	0,2	0,1	0,3	0,4

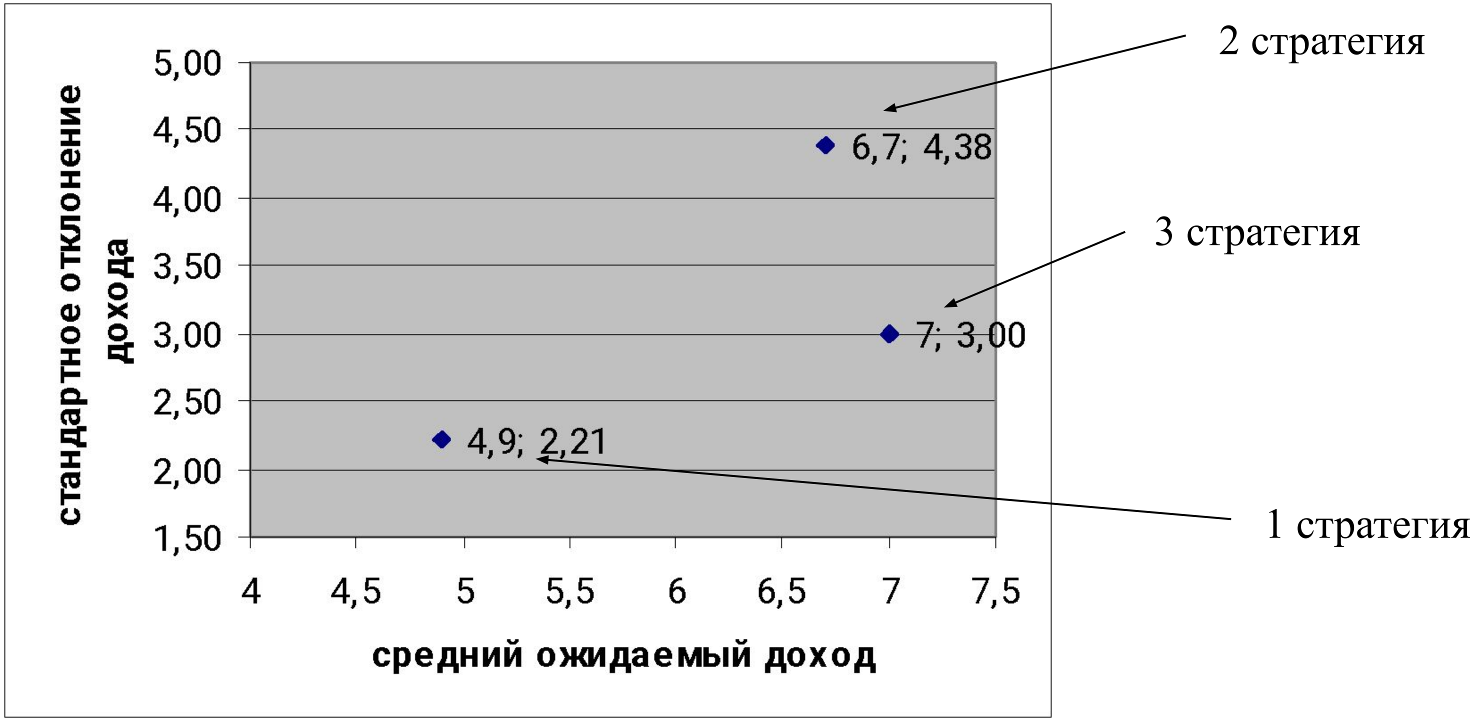
$$D_1 = (2-4{,}9)^2 \cdot 0{,}2 + (5-4{,}9)^2 \cdot 0{,}1 + (8-4{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (4-4{,}9)^2 \cdot 0{,}4 = 4{,}89;$$

$$D_2 = (2-6{,}7)^2 \cdot 0{,}2 + (3-6{,}7)^2 \cdot 0{,}1 + (4-6{,}7)^2 \cdot 0{,}3 + (12-6{,}7)^2 \cdot 0{,}4 = 19{,}21;$$

$$D_3 = (8-7)^2 \cdot 0{,}2 + (5-7)^2 \cdot 0{,}1 + (3-7)^2 \cdot 0{,}3 + (10-7)^2 \cdot 0{,}4 = 9.$$

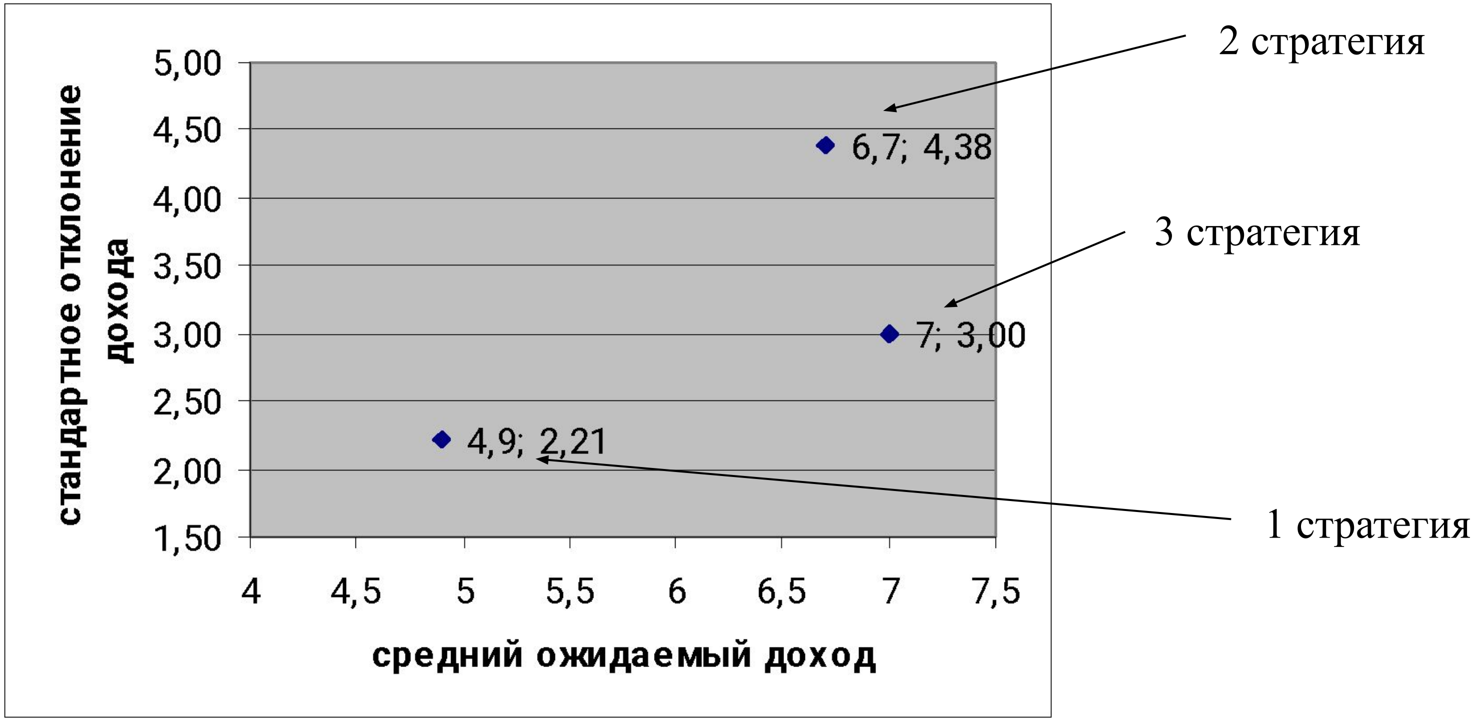
$$\sigma_1 = \sqrt{4{,}89} = 2{,}21; \quad \sigma_2 = \sqrt{19{,}21} = 4{,}38; \quad \sigma_3 = \sqrt{9} = 3.$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности



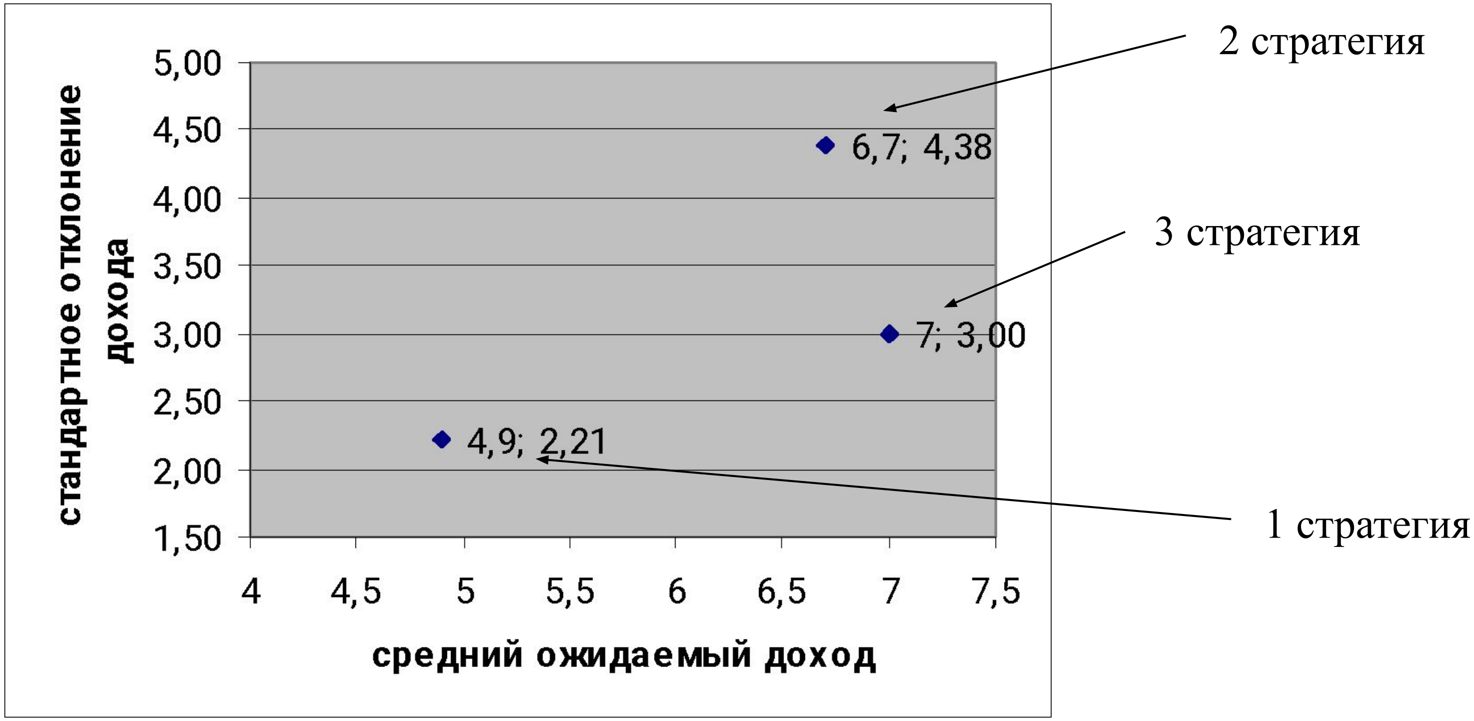
из двух стратегий игрок предпочтет ту, для которой средний ожидаемый доход больше, а риск (стандартное отклонение) меньше.

Принятие решений в условиях полной неопределенности



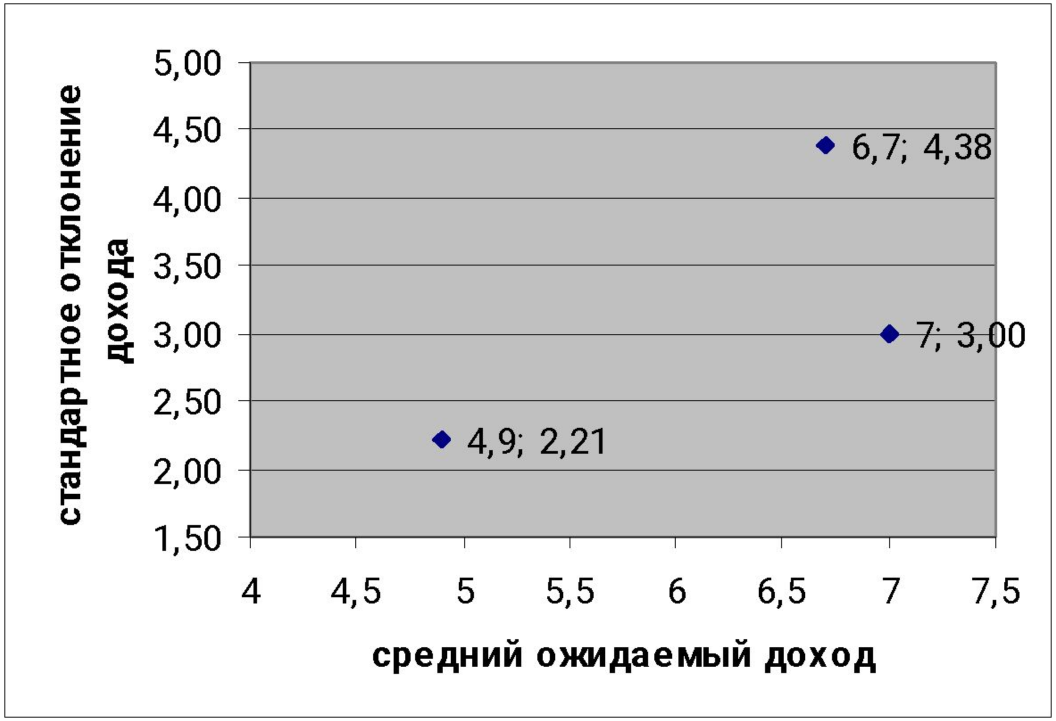
если среди всех точек на графике найдется точка, лежащая одновременно правее и ниже всех других точек, то именно эта точка и определяет наилучшую стратегию.

Принятие решений в условиях полной неопределенности



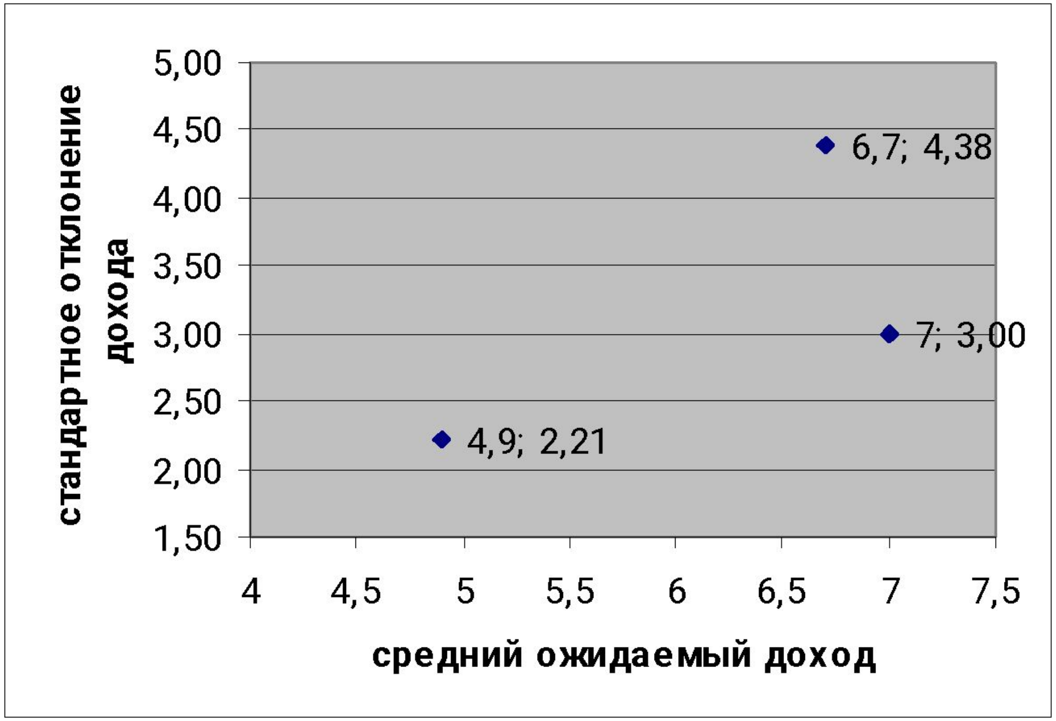
Если таких точек нет, то среднему ожидаемому доходу и среднему ожидаемому риску присваиваются определенные веса. В результате каждое решение будет характеризоваться одной величиной, по которой и определяется наилучшая стратегия.

Принятие решений в условиях полной неопределенности



$$f_i = \overline{a}_i - \sigma_i \qquad f_i = 2\overline{a}_i - \sigma_i$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности



$$f_i = \overline{a}_i - \sigma_i$$

$$f_1 = \overline{a}_1 - \sigma_1 = 4,9 - 2,21 = 2,69;$$

$$f_2 = \overline{a}_2 - \sigma_2 = 6,7 - 4,38 = 2,32;$$

$$f_3 = \overline{a}_3 - \sigma_3 = 7 - 3 = 4.$$

Себестоимость пирожка с яблоками, выпускаемого в кондитерской «1000 калорий», составляет 13 руб. Розничная цена свежего пирожка составляет 17 руб., а невостребованные за день пирожки передаются в организации помощи неимущим по оптовой цене 3 руб. за штуку. Сколько пирожков надо производить в день, если известно, что спрос на них составляет от 2 до 6 штук ежедневно?

1. Решите задачу при помощи методов, применяемых в условиях полной неопределенности:
   - правила максимакса,
   - правила Вальда,
   - правила Сэвиджа,
   - правила Лапласа,
   - критерия Гурвица при уровне пессимизма 0,3.

Себестоимость пирожка с яблоками, выпускаемого в кондитерской «1000 калорий», составляет 13 руб. Розничная цена свежего пирожка составляет 17 руб., а невостребованные за день пирожки передаются в организации помощи неимущим по оптовой цене 3 руб. за штуку. Сколько пирожков надо производить в день, если известно, что спрос на них составляет от 2 до 6 штук ежедневно?

2. Предположим, что известна статистика продаж за 50 дней:

Продано пирожков в день	2	3	4	5	6
Частота	15	15	11	7	2

Решите задачу при помощи методов, применяемых в условиях

- частичной неопределенности:
- правила максимальной вероятности,
- правила максимизации ожидаемого дохода,
- правила минимизации возможных потерь;
- правила, учитывающего средний ожидаемый доход и стандартное отклонение.

Себестоимость пирожка с яблоками, выпускаемого в кондитерской «1000 калорий», составляет 13 руб. Розничная цена свежего пирожка составляет 17 руб., а невостребованные за день пирожки передаются в организации помощи неимущим по оптовой цене 3 ру за штуку. Сколько пирожков надо производить в день, если известно, что спрос на них составляет от 2 до 6 штук ежедневно?

Решение с помощью MS Excel

1. Расчет матрицы последствий А.

прибыль кондитерской при продаже свежего пирожка 4 руб.

убыток от нереализации пирожка 10 руб.

если произведено i пирожков, а спрос составил j пирожков, то прибыль

$$a_{ij} = \begin{cases} 4 \cdot i, & i \le j; \\ 4 \cdot j - 10 \cdot (i - j), & i > j. \end{cases}$$

Решение с помощью MS Excel

1. Расчет матрицы последствий А.

$$a_{ij} = \begin{cases} 4 \cdot i, & i \le j; \\ 4 \cdot j - 10 \cdot (i - j), & i > j. \end{cases}$$

Объем	Возможные исходы: спрос на изделие в день				
производства	2	3	4	5	6
2	8	8	8	8	8
3	-2	12	12	12	12
4	-12	2	16	16	16
5	-22	-8	6	20	20
6	-32	-18	-4	10	24

Решение с помощью MS Excel

2. Расчет объема производства *по правилу максимакса* .

	A	B	C	D	E	F
1	Обьем	Возможные исходы: спрос на изделие в день				
2	производства	2	3	4	5	6
3	2	8	8	8	8	8
4	3	-2	12	12	12	12
5	4	-12	2	16	16	16
6	5	-22	-8	6	20	20
7	6	-32	-18	-4	10	24

$$a_{i^* j^*} = \max_{i=\overline{1,n}} \max_{j=\overline{1,n}} a_{ij}$$

Решение с помощью MS Excel

3. Расчет объема производства *по правилу Вальда* .

	A	B	C	D	E	F
1	Объем	Возможные исходы: спрос на изделие в день				
2	производства	2	3	4	5	6
3	2	8	8	8	8	8
4	3	-2	12	12	12	12
5	4	-12	2	16	16	16
6	5	-22	-8	6	20	20
7	6	-32	-18	-4	10	24

$$a_{i^* j^*} = \max_{i=\overline{1,n}} \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij}$$

Решение с помощью MS Excel

4. Расчет матрицы рисков *R*

Объем производства	Возможные исходы: спрос на изделие в день				
	2	3	4	5	6
2	0	4	8	12	16
3	10	0	4	8	12
4	20	10	0	4	8
5	30	20	10	0	4
6	40	30	20	10	0

$$a_j = \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij}$$

$$r_{ij} = a_j - a_{ij}$$

Решение с помощью MS Excel

5. Расчет объема производства *по правилу Сэвиджа*

Объем производства	Возможные исходы: спрос на изделие в день				
	2	3	4	5	6
2	0	4	8	12	16
3	10	0	4	8	12
4	20	10	0	4	8
5	30	20	10	0	4
6	40	30	20	10	0

$$r_{i^* j^*} = \min_{i=\overline{1,n}} \max_{j=\overline{1,n}} r_{ij}$$

Решение с помощью MS Excel

6. Расчет средней прибыли для каждого объема производства

Объем производства	Возможные исходы: спрос на изделие в день					Средняя прибыль
	2	3	4	5	6	
2	8	8	8	8	8	8
3	-2	12	12	12	12	**9,2**
4	-12	2	16	16	16	7,6
5	-22	-8	6	20	20	3,2
6	-32	-18	-4	10	24	-4

$$\overline{a}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Решение с помощью MS Excel

6. Расчет средней прибыли для каждого объема производства и применение правила Лапласа

Объем производства	Возможные исходы: спрос на изделие в день					Средняя прибыль
	2	3	4	5	6	
2	8	8	8	8	8	8
3	-2	12	12	12	12	**9,2**
4	-12	2	16	16	16	7,6
5	-22	-8	6	20	20	3,2
6	-32	-18	-4	10	24	-4

$$\bar{a}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$\bar{a}_{i^*} = \max_{i=\overline{1,n}} \bar{a}_i$$

Решение с помощью MS Excel

7. Расчет объема производства *по правилу Гурвица*

Объем производства	Прибыль		Уровень оптимизма	Уровень пессимизма	Комбинация
	Наибольшая	Наименьшая			
2	8	8	0,7	0,3	8
3	12	-2	0,7	0,3	7,8
4	16	-12	0,7	0,3	7,6
5	20	-22	0,7	0,3	7,4
6	24	-32	0,7	0,3	7,2

$$S_i = \lambda \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij} + (1-\lambda) \max_{j=\overline{1,n}} a_{ij}$$

Решение с помощью MS Excel

8. Расчет вероятностей для различных значений спроса

Продано пирожков в день	2	3	4	5	6
Частота	15	15	11	7	2
Относительная частота (вероятность)	0,3	0,3	0,22	0,14	0,04

Решение с помощью MS Excel

9. Расчет объема производства *по правилу максимальной вероятности*

Продано пирожков в день	2	3	4	5	6
Частота	15	15	11	7	2
Относительная частота (вероятность)	0,3	0,3	0,22	0,14	0,04

Решение с помощью MS Excel

10. *Расчет ожидаемых прибылей для каждого объема производства*

$$Ma_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$$

Объем производства	Возможные исходы: спрос пирожков в день					Ожидаемая прибыль
	2	3	4	5	6	
2	2,4	2,4	1,76	1,12	0,32	**8**
3	-0,6	3,6	2,64	1,68	0,48	7,8
4	-3,6	0,6	3,52	2,24	0,64	3,4
5	-6,6	-2,4	1,32	2,8	0,8	-4,08
6	-9,6	-5,4	-0,88	1,4	0,96	-13,52

$a_{ij} p_j$

Решение с помощью MS Excel

11Расчет объема производства *по правилу максимизации ожидаемого дохода*

Объем производства	Возможные исходы: спрос пирожков в день					Ожидаемая прибыль
	2	3	4	5	6	
2	2,4	2,4	1,76	1,12	0,32	**8**
3	-0,6	3,6	2,64	1,68	0,48	7,8
4	-3,6	0,6	3,52	2,24	0,64	3,4
5	-6,6	-2,4	1,32	2,8	0,8	-4,08
6	-9,6	-5,4	-0,88	1,4	0,96	-13,52

Решение с помощью MS Excel

12 Расчет ожидаемых рисков для каждого объема производства

$$Mr_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j$$

Обьем производства	Возможные исходы: спрос пирожков в день					Ожидаемый риск
	2	3	4	5	6	
2	0	2,4	3,52	3,36	1,28	10,56
3	2,7	0	1,76	2,24	0,96	**7,66**
4	5,4	2,7	0	1,12	0,64	9,86
5	8,1	5,4	1,98	0	0,32	15,8
6	10,8	8,1	3,96	1,26	0	24,12

$r_{ij} p_j$

Решение с помощью MS Excel

13 Расчет объема производства *по правилу минимизации ожидаемого риска*

Объем производства	Возможные исходы: спрос пирожков в день					Ожидаемый риск
	2	3	4	5	6	
2	0	2,4	3,52	3,36	1,28	10,56
3	2,7	0	1,76	2,24	0,96	**7,66**
4	5,4	2,7	0	1,12	0,64	9,86
5	8,1	5,4	1,98	0	0,32	15,8
6	10,8	8,1	3,96	1,26	0	24,12

Решение с помощью MS Excel

14 Расчет дисперсий и стандартных отклонений для каждого объема производства

Объем производства	Возможные исходы: спрос пирожков в день					Дисперсия	Стандартное отклонение
	2	3	4	5	6		
	0	0	0	0	0	0	0
3	28,81	5,29	3,88	2,47	0,71	41,16	6,42
4	71,15	0,59	34,93	22,23	6,35	135,24	11,63
5	96,34	4,61	22,35	81,18	23,19	227,67	15,09
6	102,45	6,02	19,94	77,45	56,31	262,17	16,19

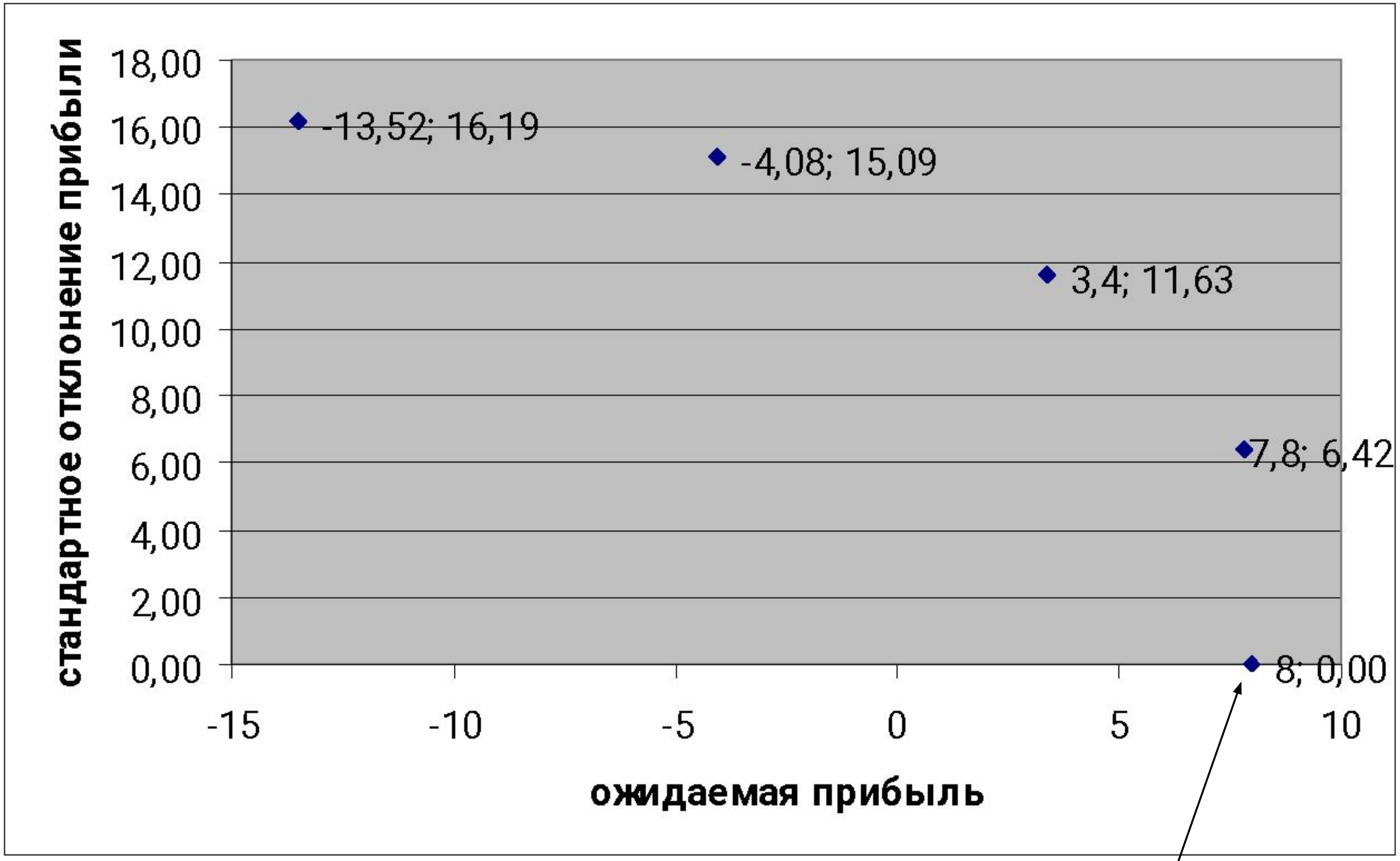
$$D_i = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - \overline{a}_i\right)^2 p_j$$

$$\sigma_i = \sqrt{D_i}$$

$$\left(a_{ij} - \overline{a}_i\right)^2 p_j$$

Решение с помощью MS Excel

15 Построение точечной диаграммы.



Лучший вариант