Ортогональные функции
Ортогоналды функциялар

φ(t) , ψ(t) [a,b]

$$\int_a^b \varphi(t) \cdot \psi(t) dt = 0$$

Ортогональная система функций
Ортогоналды функциялар жүйесі

$$\int_a^b \varphi_n(t)\cdot\varphi_m(t)\,dt = 0,$$

$$n \neq m; \qquad n, m = 0,1,\ldots$$

$$\int_a^b [\varphi_n(t)]^2\,dt = \lambda_n > 0$$

Ортогональная система функций
Ортогоналды функциялар жүйесі

$$\lambda_n = 1$$

Нормальная система

$$\left\{\frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$$

Ортогональная система функций
Ортогоналды функциялар жүйесі

$\{1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt), \ldots\}$ –

система ортогональна на промежутке длиной 2π

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$$

- на промежутке длиной 2π нормальная система

На $[0, \pi]$ не будет ортогональной

Ортогональная система функций
Ортогоналды функциялар жүйесі

Проверить на ортогональность:

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)dt,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)\cdot\sin(t)dt$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)\cdot\cos(t)dt$$

$$\int_0^{\pi} \cos(t)dt,$$

$$\int_0^{\pi} \cos(t)\cdot\sin(t)dt = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos(t)\cdot\cos(t)dt$$

Ортогональная система функций
Ортогоналды функциялар жүйесі

Полиномы Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(t^2 - 1)^n$$, n=0,1,2,…

на интервале [-1,1].

$$P_0(t) = 1;\ P_1(t) = t;\ P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2};\ P_3(t) = \frac{5}{2}t^2 - \frac{3}{2}t,$$

Ортогональная система функций
Ортогоналды функциялар жүйесі

$$\int_{-1}^{1} [P_n(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1}$$

$$\sqrt{n + \frac{1}{2}}$$

Ортогональная система функций
Ортогоналды функциялар жүйесі

Полиномы Лагерра

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n \cdot e^{-t})$$

на интервале [-1,1].

$$L_0(t) = 1; \quad L_1(t) = -t + 1; \quad L_2(t) = \frac{1}{2} t^2 - 2t + 1$$

Ортогональная система функций
Ортогоналды функциялар жүйесі

Полиномы Лагерра

$$\int_{-1}^{1} P_m(t) P_n(t) dt = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & \text{ïðè} \quad m = n \\ 0 & \text{ïðè} \quad m \neq n \end{cases}$$

Ортогональная система функций
Ортогоналды функциялар жүйесі

Полиномы Чебышева

$$T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \cdot \arccos t), \quad n \geq 1.$$

на интервале [-1,1].

$$T_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}; \quad T_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}; \quad T_2(t) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}(t^2 - \frac{1}{2}); \quad T_3(t) = \sqrt{\frac{32}{\pi}}(t^3 - \frac{3}{4}t).$$

Периодические функции

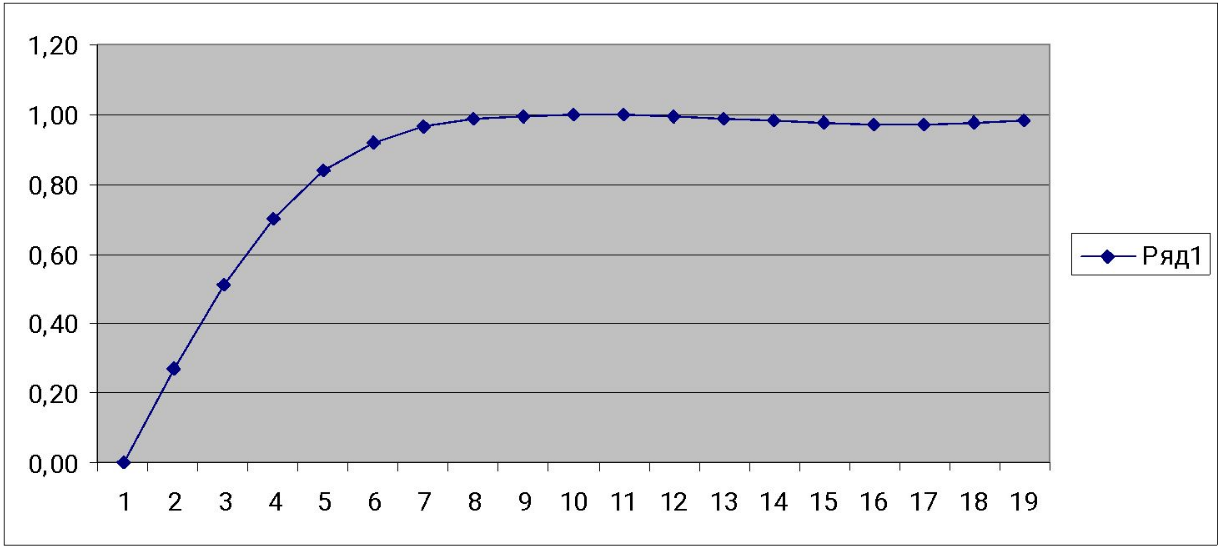
$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k)$$

Периодические функции

$$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 3t$$



Ряд Фурье

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kt+b_k\sin kt)$$

-ряд Фурье

Определение коэффициентов ряда Фурье

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \{ f(t) - [\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \}^2 \to \min$$

Обозначим скалярное произведение функций

$$(\varphi_m, \varphi_m) = \int_0^T \varphi_n(t) \cdot \varphi_m(t) dt;$$

$$(\varphi_m, f) = \int_0^T \varphi_n(t) \cdot f(t) dt$$

Система для определения коэффициентов ряда Фурье

$$\begin{cases} a_0 \cdot (\varphi_0, \varphi_0) + a_1 \cdot (\varphi_0, \varphi_1) + \ldots + a_N \cdot (\varphi_0, \varphi_N) = (\varphi_0, f); \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_0 \cdot (\varphi_0, \varphi_N) + a_1 \cdot (\varphi_1, \varphi_N) + \ldots + a_N \cdot (\varphi_N, \varphi_N) = (\varphi_N, f). \end{cases}$$

Ряд Фурье

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt,\ k=1,2,3,\dots$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt, k=1,2,3,\dots$$

Ряд Фурье

f(t) – четная на $[-\pi,\pi],\ \ b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos ktdt,\ k = 1,2,3,\ldots$$

f(t) – нечетная на $[-\pi,\pi],\ \ a_k = a_0 = 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin ktdt,\ k = 1,2,3,\ldots$$

Пример 1

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 \le t \le \pi \\ -a, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \; k = 1,2,3.....$$

Ряд Фурье

Пример 1

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin ktdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a\sin ktdt = \frac{2a}{\pi k}\,[-\cos kt]\Big|_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi k}\,[-\cos \pi k + 1] =$$

$$= \frac{2a}{\pi k}\,[1-(-1)^k] = \begin{cases} 0, k - chet \\ \dfrac{4a}{\pi k}, k - nechet \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{4a}{\pi}[\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \ldots]$$

$$A_1 = \frac{4a}{\pi} \qquad \Delta\omega = 1$$

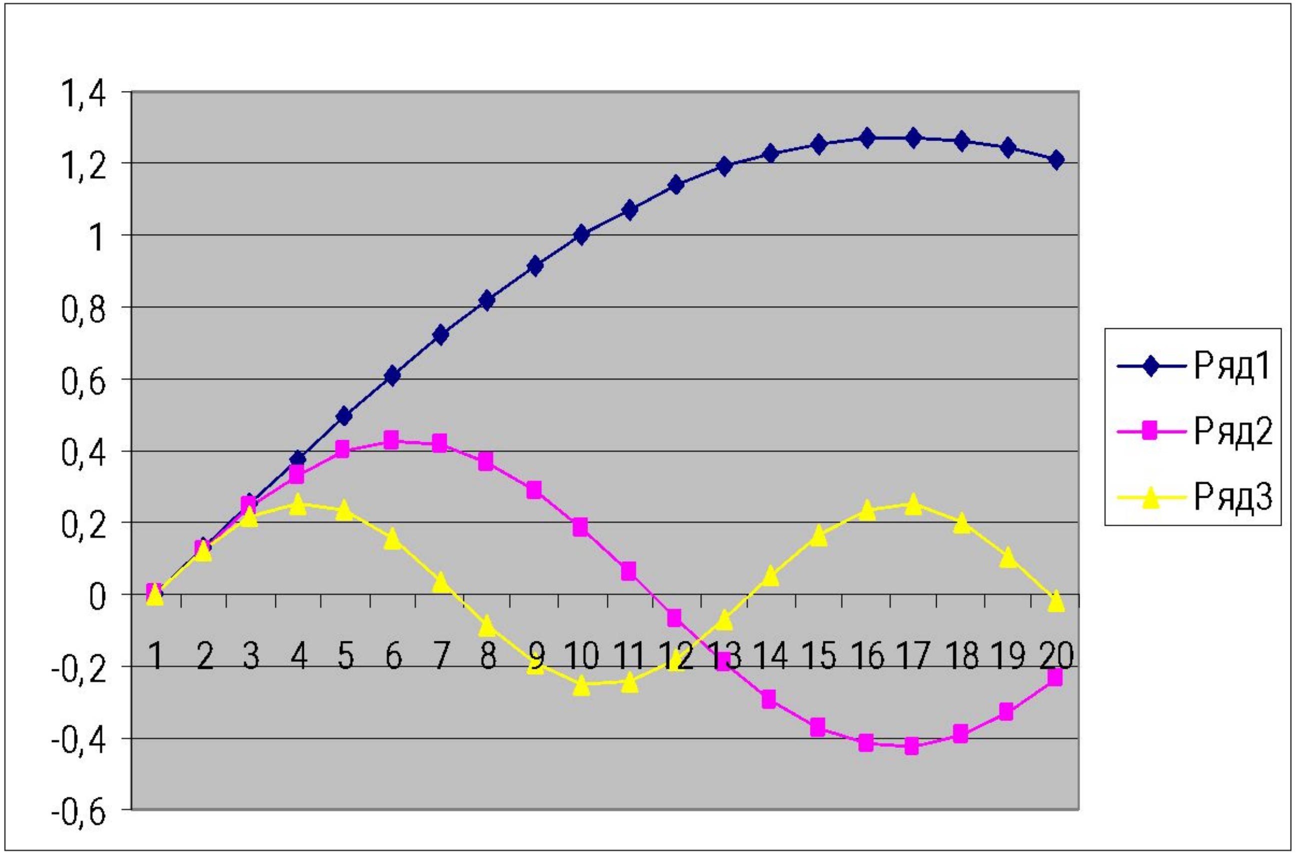
$$A_2 = 0 \qquad \varphi_k = \frac{\pi}{2}$$

$$A_3 = \frac{4a}{3\pi}$$

....

Ряд Фурье

Пример 1



Ряд Фурье
Непериодические функции

Пример 2

$$f(t) = |t|$$

$$[-\pi, \pi]$$

,

Ряд Фурье
Непериодические функции

Пример 2

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t dt = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos ktdt = \ldots = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0, \ k = chet \\ -\dfrac{4}{\pi k^2}, \ k - nechet \end{cases}$$

,

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \ldots\right)$$

Ряд Фурье
Непериодические функции

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \ldots\right)$$