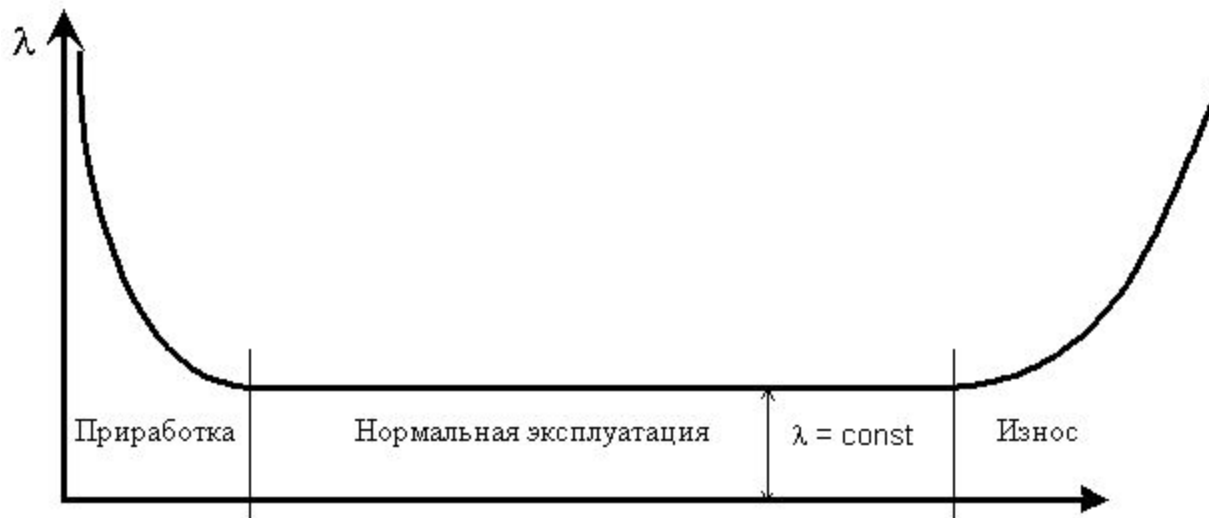


# ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В РАСЧЕТАХ НАДЕЖНОСТИ

## 1. Распределение Вейбулла

Опыт эксплуатации очень многих электронных приборов и значительного количества электромеханической аппаратуры показывает, что для них характерны три вида зависимостей интенсивности отказов от времени, соответствующих трем периодам жизни этих устройств.



Зависимость интенсивности отказов от времени

Указанные три вида зависимостей интенсивности отказов от времени можно получить, используя для вероятностного описания случайной наработки до отказа двухпараметрическое распределение Вейбулла. Согласно этому распределению плотность вероятности момента отказа

$$f(t) = \lambda \delta t^{\delta-1} \cdot e^{-(\lambda t^{\delta})}$$

где  $\delta$  - параметр формы (определяется подбором в результате обработки экспериментальных данных,  $\delta > 0$ );  $\lambda$  - параметр масштаба

$$\lambda = \frac{1}{\hat{T}_1}$$

Интенсивность отказов определяется по выражению

$$\lambda(t) = \lambda \cdot \delta \cdot t^{\delta-1}.$$

## Вероятность безотказной работы

$$P(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t)^{\delta}} dt = e^{-\lambda t^{\delta}}$$

средняя наработка до отказа

$$T_1 = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^{\delta}} dt$$

Отметим, что при параметре  $\delta = 1$  распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное, а при  $\delta = 2$  - в распределение Рэлея. При  $\delta < 1$  интенсивность отказов монотонно убывает (период приработки), а при  $\delta > 1$  монотонно возрастает (период износа), Распределение Вейбулла может быть использовано при ускоренных испытаниях объектов в форсированном режиме.

## 2. Экспоненциальное распределение

Как было отмечено выше экспоненциальное распределение вероятности безотказной работы является частным случаем распределения Вейбулла, когда параметр формы  $\delta = 1$ . Это распределение однопараметрическое, то есть для записи расчетного выражения достаточно одного параметра  $\lambda = \text{const}$ . Для этого закона верно и обратное утверждение: если интенсивность отказов постоянна, то вероятность безотказной работы как функция времени подчиняется экспоненциальному закону:

$$P(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

Среднее время безотказной работы при экспоненциальном законе распределения интервала безотказной работы выражается формулой:

$$T_1 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Заменив в выражении величину  $\lambda$  величиной  $1 / T_1$ , получим

$$P(t) = e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Таким образом, зная среднее время безотказной работы  $T_1$  (или постоянную интенсивность отказов  $\lambda$ ), можно в случае экспоненциального распределения найти вероятность безотказной работы для интервала времени от момента включения объекта до любого заданного момента  $t$ .

Вероятность безотказной работы на интервале, превышающем среднее время  $T_1$ , при экспоненциальном распределении будет менее 0,368:

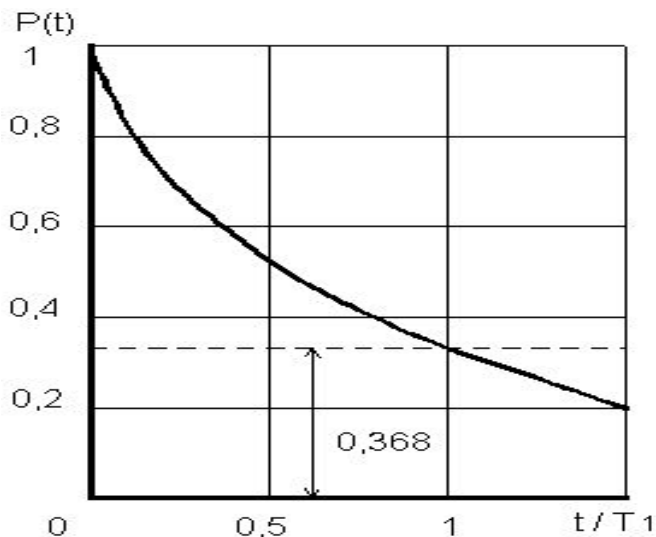


График экспоненциального распределения

Длительность периода нормальной эксплуатации до наступления старения может оказаться существенно меньше  $T_1$ , то есть интервал времени на котором допустимо пользование экспоненциальной моделью, часто бывает меньшим среднего времени безотказной работы, вычисленного для этой модели. Это легко обосновать, воспользовавшись дисперсией времени безотказной работы. Как известно, если для случайной величины  $t$  задана плотность вероятности  $f(t)$  и определено среднее значение (математическое ожидание)  $T_1$ , то дисперсия времени безотказной работы находится по выражению:

$$\sigma_{T_1}^2 = D[T_1] = \int_0^{\infty} (t - T_1)^2 \cdot f(t) dt$$

и для экспоненциального распределения соответственно равна:

$$D[T_1] = -\int_0^{\infty} (t - T_1)^2 \cdot P'(t) dt = -\int_0^{\infty} (t - T_1)^2 \lambda \cdot e^{(-\lambda t)} dt$$

После некоторых преобразований получим:

$$D[T_1] = \frac{1}{\lambda^2} = T_1^2$$

Таким образом, наиболее вероятные значения наработки, группирующиеся в окрестности  $T_1$ , лежат в диапазоне

$$T_1 \pm \sqrt{D[T_1]} = T_1 \pm T_1$$

Как видим, объект может отработать и малый отрезок времени и время  $t = 2T_1$ , сохранив  $\lambda = \text{const}$ . Но вероятность безотказной работы на интервале  $2T_1$  крайне низка:

$$P(2T_1) = e^{-\lambda \cdot 2T_1} = e^{\left(-\frac{1}{T_1} \cdot 2T_1\right)} = e^{-2} = 0.135$$

### 3. Распределение Рэля

Плотность вероятности в законе Рэля имеет следующий вид

$$f(t) = \frac{t}{\delta_*^2} e^{-\frac{t^2}{2\delta_*^2}}$$

где  $\delta^*$  - параметр распределения Рэля (равен моде этого распределения).

Его не нужно смешивать со среднеквадратическим отклонением:

$$\sigma_t = \sqrt{D[T_1]}$$

Интенсивность отказов равна:

$$\lambda(t) = \frac{1}{\delta_*^2} \cdot t$$

Характерным признаком распределения Рэля является прямая линия графика  $\lambda(t)$ , начинающаяся с начала координат.

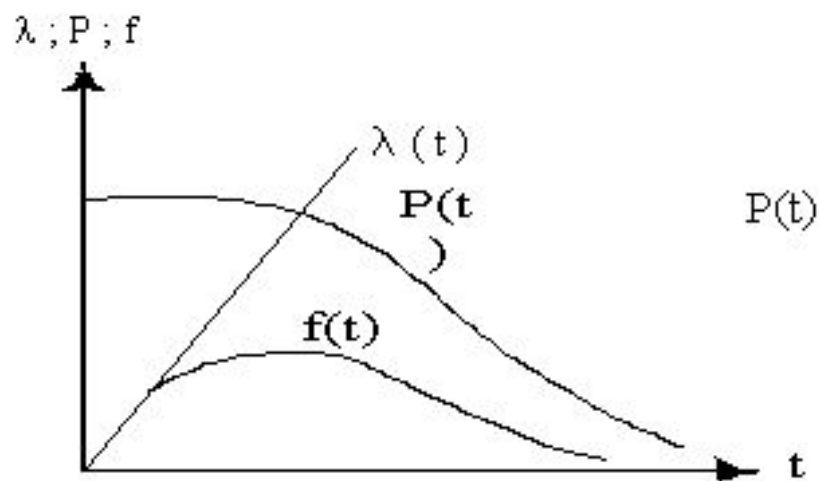


Вероятность безотказной работы объекта в этом случае определится по выражению

$$P(t) = e^{\left[ -\int_0^t \lambda(t) dt \right]} = e^{\left( \frac{-t^2}{2\delta_*^2} \right)}$$

Средняя наработка до отказа

$$T_1 = \int_0^{\infty} P(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \delta_*$$



Распределение Рэлея

## 4. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

где  $m_x$ ,  $\sigma_x$  - соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины  $x$ .

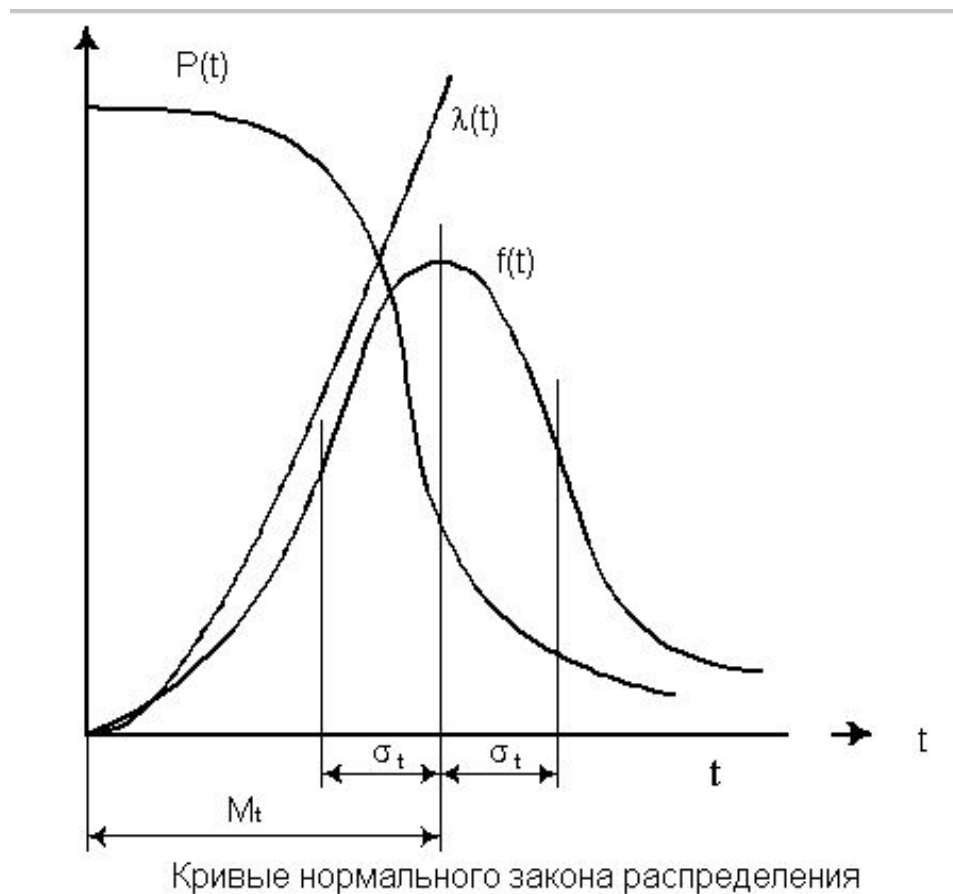
Вероятность безотказной работы определяется по формуле

$$P(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_t} \int_0^t e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}} dt$$

а интенсивность отказов - по формуле

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}$$

На рисунке изображены кривые  $\lambda(t)$ ,  $P(t)$  и  $f(t)$  для случая  $\sigma_t \ll m_t$ , характерного для элементов, используемых в системах автоматического управления



если неравенство  $\sigma_t \ll m_t$  не соблюдается, то следует использовать усеченное нормальное распределение

## 5. Треугольное распределение

Характеризует случайные величины, имеющие ограниченную область возможных значений ( $t_H$ ,  $t_K$ ).

Положение и форму треугольного распределения характеризует 3 параметра:  $t_H$ ,  $t_K$  – границы области возможных значений,  $t_M$  – мода.

Плотность распределения:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2(t - t_H)}{(t_K - t_H)(t_M - t_H)} \\ \frac{2(t_K - t)}{(t_K - t_H)(t_K - t_M)} \end{cases}$$

Функция надежности

$$P(t) = \begin{cases} 1 - \frac{(t - t_H)^2}{(t_K - t_H)(t_M - t_H)} \\ \frac{(t_K - t)^2}{(t_K - t_H)(t_K - t_M)} \end{cases}$$

Интенсивность отказа

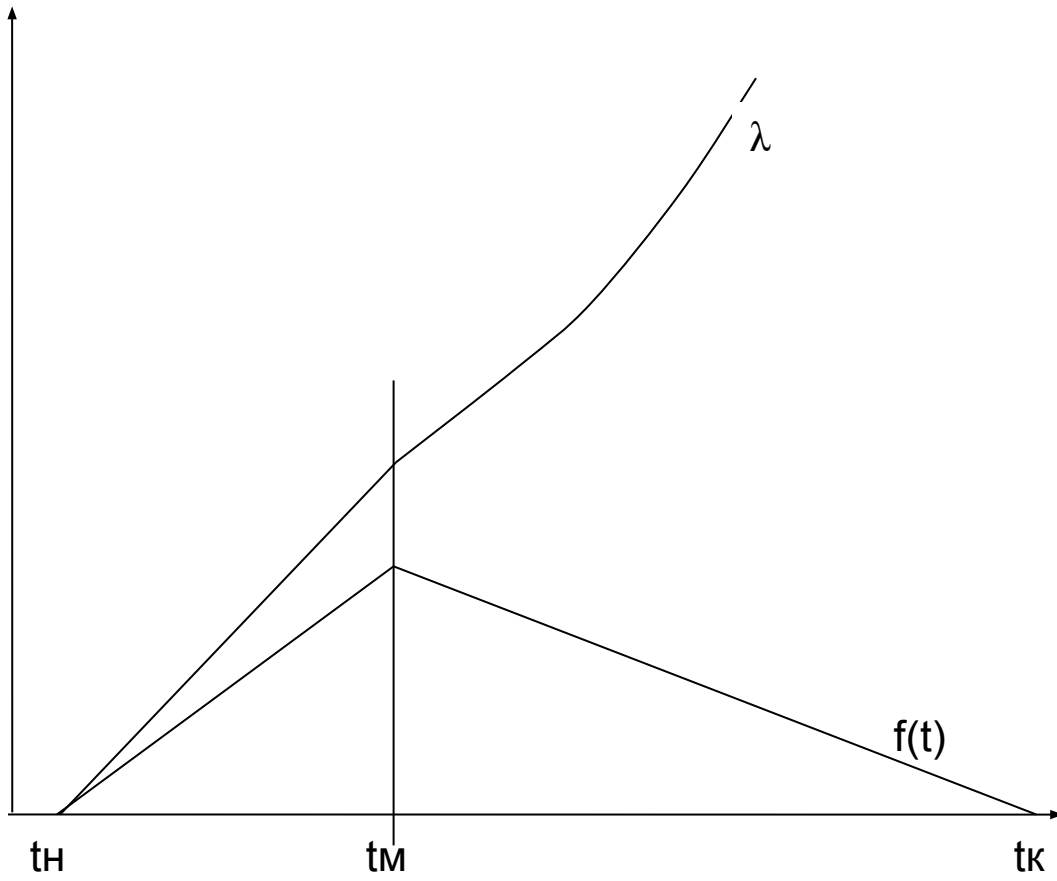
$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{2(t - t_H)}{(t_K - t_H)(t_M - t_H) - (t - t_H)^2} \\ \frac{2}{(t_K - t)} \end{cases}$$

Медиана

$$t_{MM} = t_K - \frac{1}{2} \sqrt{2(t_K - t_H)(t_K - t_M)}$$

Математическое ожидание

$$m_t = \frac{1}{3} (t_H + t_M + t_K)$$



## 6. Гамма-распределение

Гамма-распределение является двухпараметрическим распределением. Плотность распределения имеет ограничение с одной стороны ( $0 \leq x \leq \infty$ ). Если параметр  $\alpha$  формы кривой распределения принимает целое значение, то это свидетельствует о вероятности появления такого же числа событий (например, отказов) при условии, что они независимы и появляются с постоянной интенсивностью  $\lambda$ .

Гамма-распределение широко применяют при описании появления отказов стареющих элементов, времени восстановления, наработки на отказ резервированных систем. При различных параметрах гамма-распределение принимает разнообразные формы, что и объясняет его широкое применение.

Плотность вероятности гамма-распределения определяется равенствами

$$f(x) = [\lambda^\alpha / \Gamma(\alpha)] x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad \text{при } x \geq 0$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Функция распределения

$$F(x) = \lambda^\alpha / \Gamma(\alpha) \cdot \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

Математическое ожидание и дисперсия соответственно равны:

$$Mx = \alpha/\lambda; Dx = \alpha/\lambda^2 .$$

При  $\alpha < 1$  интенсивность отказов монотонно убывает (что соответствует периоду приработки изделия), при  $\alpha > 1$  — возрастает (что характерно для периода изнашивания и старения элементов).

При  $\alpha = 1$  гамма-распределение совпадает с экспоненциальным распределением, при  $\alpha > 10$  гамма-распределение приближается к нормальному закону. Если  $\alpha$  принимает значения произвольных целых положительных чисел, то такое гамма-распределение *называют распределением Эрланга*. Если  $\lambda = 1/2$ , а значение  $\alpha$  кратно  $1/2$ , то гамма-распределение совпадает с распределением  $\chi^2$  (хи-квадрат).



