Световое поле, обобщение и выводы

E-mail: SmirnovPA@mpei.ru

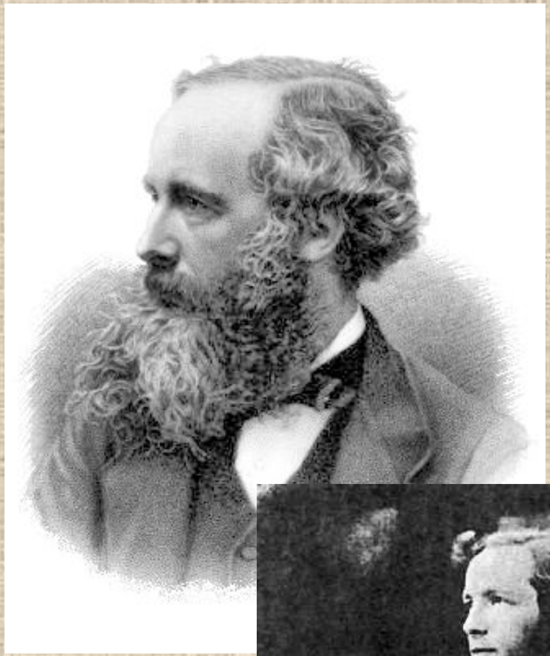
сот: 8-910-443-75-52

Подготовил: Смирнов П.А.

Джеймс Клерк Ма́ксвелл

(3 июня 1831, Эдинбург, Шотландия – 5 ноября 1879, Кембридж, Англия)

- Работы по фотоупругости (пропускание поляризованного излучения через деформированные материалы)
- Теория цветов (развитие идеи о трёх основных цветах, цветовой треугольник)
- Уравнения Максвелла для электромагнетизма
- Работа по устойчивости колец Сатурна
- Кинетическая теория газов (распределение по скоростям)
- Первая цветная фотография



Уравнения Максвелла

Гауссова система единиц

$$\begin{cases} \left[\nabla, \mathbf{H}\right] - \dfrac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \left[\nabla, \mathbf{E}\right] - \dfrac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = 0 \\ \left(\nabla, \mathbf{D}\right) = 4\pi\rho \\ \left(\nabla, \mathbf{B}\right) = 0 \end{cases}$$

Система СИ

$$\begin{cases} \left[\nabla, \mathbf{H}\right] - \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{j} \\ \left[\nabla, \mathbf{E}\right] - \dot{\mathbf{B}} = 0 \\ \left(\nabla, \mathbf{D}\right) = \rho \\ \left(\nabla, \mathbf{B}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$\mathbf{H}$ – вектор напряжённости магнитного поля

$\mathbf{D}$ – вектор электрического смещения

$\mathbf{j}$ – вектор плотности тока

$\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции

$\mathbf{E}$ – вектор напряжённости электрического поля

ρ – плотность электрического заряда

c – скорость света

Основные соотношения теории поля

Оператор Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{cases} \nabla f = \operatorname{grad} f \\ (\nabla, \mathbf{f}) = \operatorname{div} \mathbf{f} \\ [\nabla, \mathbf{f}] = \operatorname{rot} \mathbf{f} \\ \nabla^2 = \Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\nabla, \nabla f) = \Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ [\nabla, \nabla f] = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \\ \nabla(\nabla, \mathbf{f}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{f}) \\ (\nabla, [\nabla, \mathbf{f}]) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = 0 \\ [\nabla, [\nabla, \mathbf{f}]] = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) \\ (\nabla, (\nabla, \mathbf{f})) = \Delta \mathbf{f} + [\nabla, [\nabla, \mathbf{f}]] \end{cases}$$

Материальные уравнения

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$$

σ – удельная проводимость

ε – диэлектрическая проницаемость

μ – магнитная проницаемость

Следствия из уравнений Максвелла

Дивергенция первого уравнения:

$$(\nabla, \mathbf{j}) = -\frac{1}{4\pi}(\nabla, \dot{\mathbf{D}})$$

и далее:

$$(\nabla, \mathbf{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Закон сохранения энергиии

$$(\mathbf{E}, [\nabla, \mathbf{H}]) - (\mathbf{H}, [\nabla, \mathbf{E}]) = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}, \mathbf{E}) + \frac{1}{c}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{D}}) + \frac{1}{c}(\mathbf{H}, \dot{\mathbf{B}})$$

$$\frac{1}{c}\left(4\pi(\mathbf{j}, \mathbf{E}) + (\mathbf{E}, \dot{\mathbf{D}}) + (\mathbf{H}, \dot{\mathbf{B}})\right) + (\nabla, [\mathbf{E}, \mathbf{H}]) = 0$$

Закон сохранения энергии

$$\left(\mathbf{E},\left[\nabla,\mathbf{H}\right]\right)-\left(\mathbf{H},\left[\nabla,\mathbf{E}\right]\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j},\mathbf{E}\right)+\frac{1}{c}\left(\mathbf{E},\dot{\mathbf{D}}\right)+\frac{1}{c}\left(\mathbf{H},\dot{\mathbf{B}}\right)$$

$$\frac{1}{c}\left(4\pi\left(\mathbf{j},\mathbf{E}\right)+\left(\mathbf{E},\dot{\mathbf{D}}\right)+\left(\mathbf{H},\dot{\mathbf{B}}\right)\right)+\left(\nabla,\left[\mathbf{E},\mathbf{H}\right]\right)=0$$

Сила Лоренца

$$\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v},\mathbf{B}\right]\right)$$

e – электрический заряд

$\mathbf{v}$ – вектор скорости заряда

Умножаем на c/4π и интегрируем с применением теоремы Гаусса:

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(\mathbf{E},\dot{\mathbf{D}}\right)+\left(\mathbf{H},\dot{\mathbf{B}}\right)dV+\int\left(\mathbf{j},\mathbf{E}\right)dV+\frac{c}{4\pi}\int\left(\left[\mathbf{E},\mathbf{H}\right],\mathbf{n}\right)dS=0$$

$\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали

Можно положить:

$$w_e=\frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E},\mathbf{D}\right),\,w_m=\frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{H},\mathbf{B}\right)$$

Полная энергия внутри объёма:

$$W=\int\left(w_e+w_m\right)dV$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{dW}{dt} + \int (\mathbf{j}, \mathbf{E})\, dV + \frac{c}{4\pi} \int \left([\mathbf{E}, \mathbf{H}], \mathbf{n} \right) dS = 0$$

Введём соотношения для вектора плотности тока:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_v$$

$\mathbf{j}_e = \sigma \mathbf{E}$ – плотность тока проводимости

$\mathbf{j}_v = \rho \mathbf{v}$ – плотность конвекционного тока

Тогда выражение для работы можно представить:

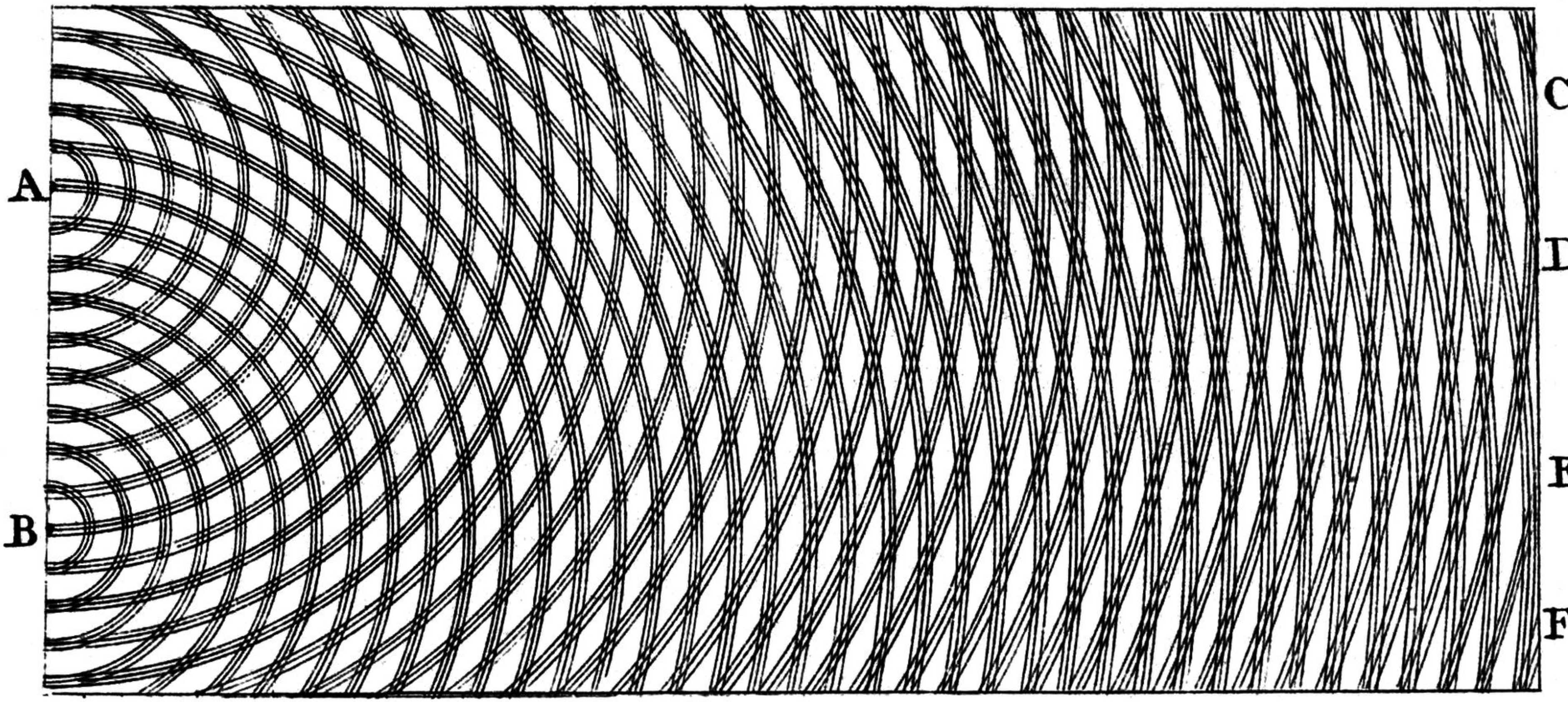
$$\delta A = \sum_k (\mathbf{F}_k, \delta \mathbf{x}_k) = \sum_k (e_k \mathbf{E}_k, \delta \mathbf{x}_k) = \sum_k (e_k \mathbf{E}_k, \mathbf{v}_k) \delta t = \delta t \int (\mathbf{j}_v, \mathbf{E})\, dV$$

Дополнительно введём: $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ *и* $Q = \int (\mathbf{j}_e, \mathbf{E})\, dV$

Тогда закон сохранения энергии перепишется в виде:

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\delta A}{\delta t} + Q + \int (\mathbf{S}, \mathbf{n})\, dS = 0$$

Луч и волновое уравнение



$$\begin{cases} \left[\nabla, \mathbf{H}\right] - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \left[\nabla, \mathbf{E}\right] - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = 0 \\ \left(\nabla, \mathbf{D}\right) = 4\pi\rho \\ \left(\nabla, \mathbf{B}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \end{cases}$$

$$\mathbf{j} = 0, \sigma = 0$$

$$\left[\nabla\left[\nabla, \frac{\mathbf{E}}{\mu}\right]\right] - \left[\nabla, \frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}}\right] = 0$$

$$\left[\nabla, \frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}}\right] = \left[\nabla\left[\nabla, \frac{\mathbf{E}}{\mu}\right]\right]$$

Разделим первое уравнение на μc и продифференцируем по времени, получим волновое уравнение для электрического поля:

$$\boxed{\left[\nabla, \left[\nabla, \frac{\mathbf{E}}{\mu}\right]\right] - \frac{\varepsilon}{c^2}\ddot{\mathbf{E}} = 0}$$

Спасибо за внимание!