Применение производной к исследованию функции

«Кто смолоду делает и думает сам, тот становиться потом, надежнее, крепче, умнее»

В. Шукшин.

Монотонность функции

- Если производная функции y=f(x) ***положительна*** на некотором интервале, то функция на этом интервале ***монотонно возрастает***

- Если производная функции y=f(x) ***отрицательна*** на некотором интервале, то функция на этом интервале ***монотонно убывает***.

Экстремумы функции

Определение 1. Точку $x=x_0$ называют точкой минимума функции f(x), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$

Определение 2. Точку $x=x_0$ называют точкой максимума функции f(x), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$

Точки максимума и минимума объединяют общим термином – точки экстремума

Точки экстремума

Если функция y=f(x) имеет экстремум в точке $x=x_0$,
то в этой точке **производная** функции
или **равна нулю**, или **не существует**

Стационарные точки

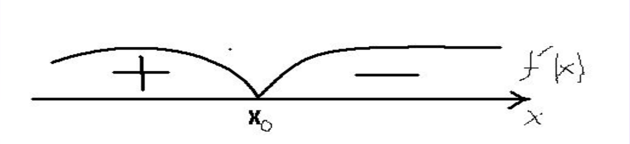
Критические точки

Касательная в таких точках графика параллельна оси OX

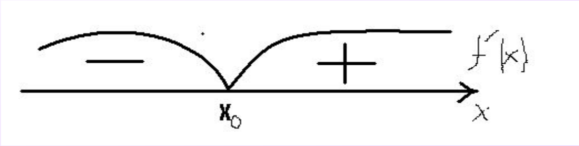
Касательная в таких точках графика не существует

Достаточное условие существования экстремума функции:

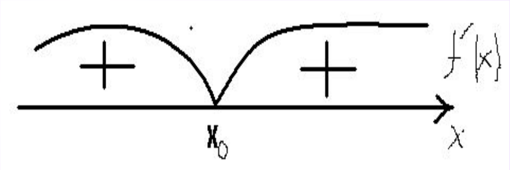
- Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка максимума функции f(x).

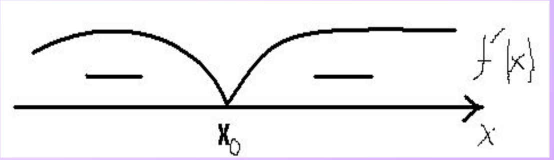


- Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума функции f(x).



- Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.





Исследование функции на монотонность

- Найти производную f ′.
- Решить уравнение f ′(x)=0.
- Отметить найденные точки на числовой прямой. Проверить знак производной на каждом интервале.
- Записать вывод.

Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$

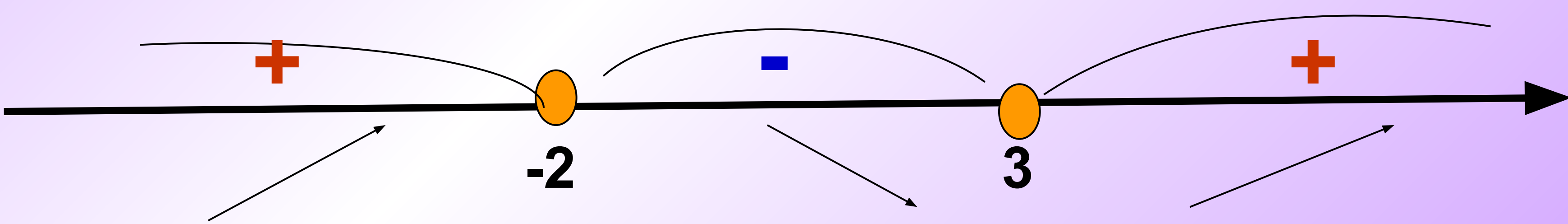
1. **Вычисляем производную :** $y'=6x^2-6x-36$.
2. **Находим критические точки:** $y'=0$.

$$x^2-x-6=0$$

$$Д=1-4*(-6)*1=1+24=25$$

$$x_1=\frac{1-5}{2}=-2 \qquad x_2=\frac{1+5}{2}=3$$

4. **Отмечаем точки на числовой прямой и проверяем знак производной:**



5. **Функция возрастает на промежутках x∊ *(-∞;-2)∪(3;+∞)*, *функция на промежутке x∊ (-2; 3)*.**

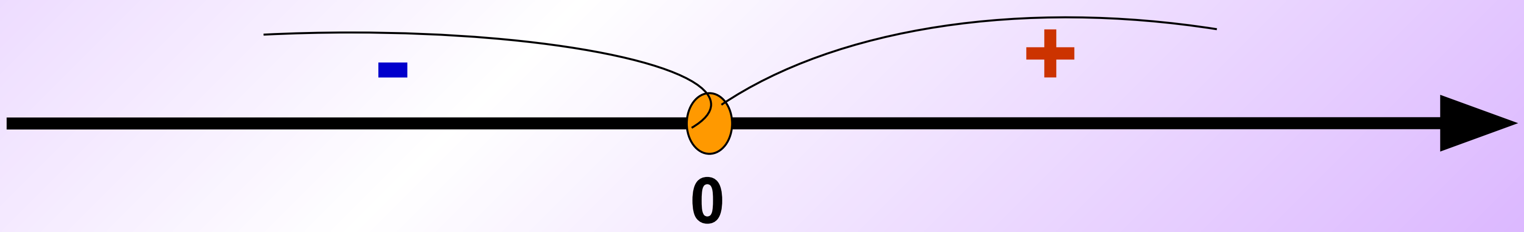
Алгоритм исследования функции f(x) на экстремум с помощью производной :

- Найти производную f ´
- Решить уравнение f ´(x)=0.
- Отметить найденные точки на числовой прямой. Проверить знак производной на каждом интервале.
- Записать вывод (вычислить значение функции в точках максимума и минимума).

Исследовать на экстремум функцию $y=x^2+2$.

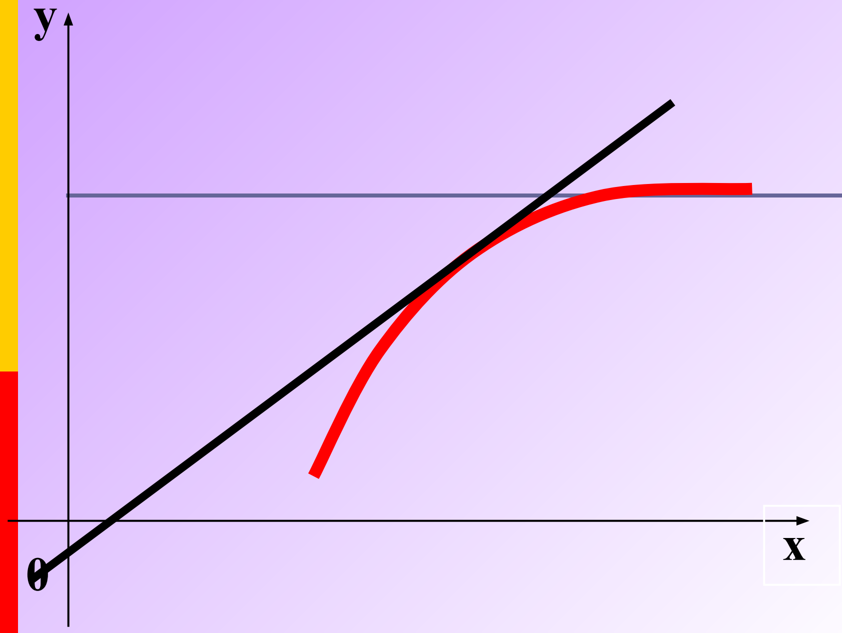
Решение:

1. Находим производную: $y'=(x^2+2)'=2x$.
2. Приравниваем её к нулю: $2x=0$, откуда $x = 0$.
3. Отмечаем точки на числовой прямой и определяем знак производной на каждом интервале:



5. $y_{min}=y(0)=2$.

Если функция $f(x)$ имеет на интервале (a,b) вторую производную и $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ во всех точках (a,b), то график функции $f(x)$ имеет на (a,b) выпуклость, направленную вниз (вверх).



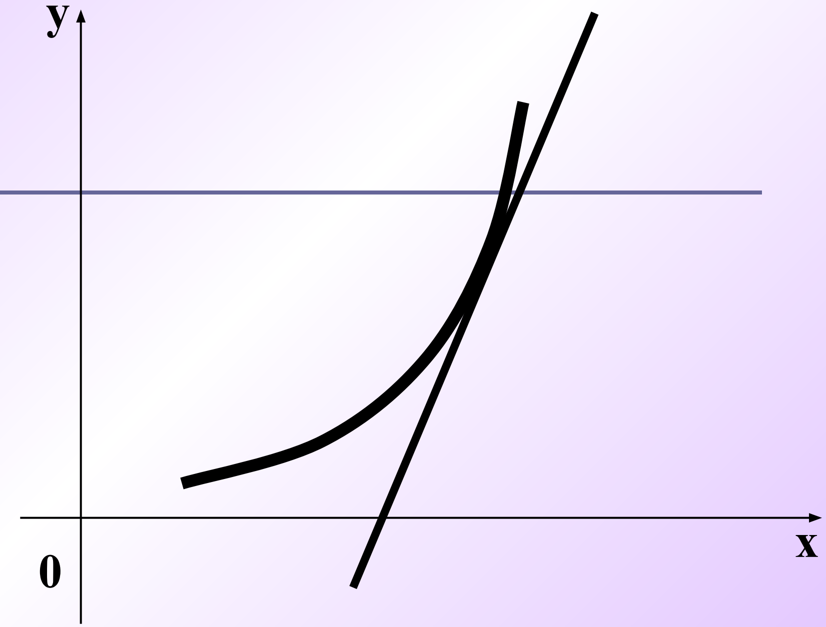


График выпуклый вверх

$$f^{//}(x) < 0$$

График вогнутый вниз

$$f^{//}(x) > 0$$

Асимптоты графика функции

вертикальные

x=a

существуют в точках разрыва функции

наклонные

y=kx+b

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$$