Лекция 9

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Вынужденные колебания. Резонанс.
2. Колебательный контур. Свободные затухающие и вынужденные электрические колебания в контуре.

Вынужденные колебания.

Интерес для техники представляет возможность поддерживать колебания незатухающими.

Для этого необходимо восполнять потери реальной колебательной системы с помощью периодически действующего фактора.

Пусть таким фактором в механической колебательной системе будет действие вынуждающей силы, меняющейся по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \omega t$$

где F_0 и ω соответственно амплитуда и собственная частота вынуждающей силы.

Рассмотрим пружинный маятник. Уравнение движения маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Введем фактор диссипации энергии, например, силу трения.

Вынужденные колебания.

Сила трения пропорциональна скорости:

$$F_{тр} = -rv = -r\frac{dx}{dt},$$ где r - коэффициент трения.

Закон движения маятника с учетом сил трения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$$

Это уравнение свободных затухающих колебаний пружинного маятника.

Пусть потери, возникающие в колебательной системе за счет действия сил трения, компенсируются действием вынуждающей силы F.

Тогда уравнение движение маятника можно представить в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$$

Вынужденные колебания.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \cos\omega t$$

Преобразуем выражение. Разделим на m, введем обозначения:

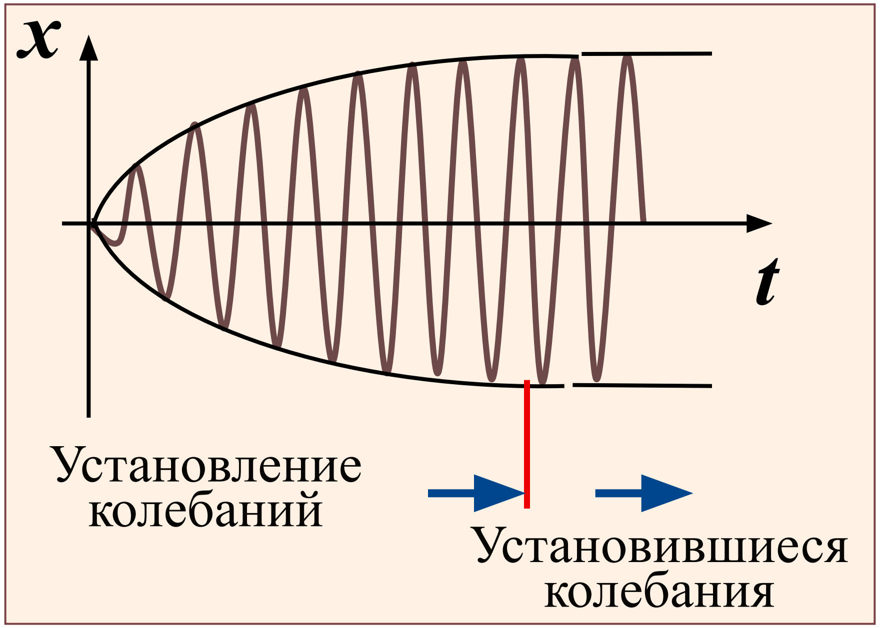
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\frac{r}{2m} = \beta$ - коэффициент затухания пружинного маятника.

Итог: $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta\frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$ или

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

Это линейное неоднородное ***дифференциальное уравнение вынужденных колебаний пружинного маятника***.

Вынужденные колебания.



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

<u>График вынужденных колебаний</u>.

Решение уравнения для установившихся колебаний:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

Выражения для амплитуды A вынужденных колебаний и величины φ- разности фаз между вынуждающей силой и вынужденными колебаниями:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad \varphi = arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Установившиеся вынужденные колебания это *гармонические колебания* с частотой, равной частоте вынуждающей силы.

Вынужденные колебания.

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы. Это приводит к тому, что при некоторой определенной для системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения.

Это явление – *резонанс.* Частота – *резонансная частота.*

Для определения резонансной частоты нужно найти минимум выражения, стоящего в знаменателе соотношения для амплитуды вынужденных колебаний.

Если продифференцировать знаменатель $\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2$

$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

и приравнять его к нулю, получим выражение для резонансной частоты в виде:

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

Вынужденные колебания.

Выражение для амплитуды при резонансе:

$$A = \frac{F_0 / m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

При отсутствии сопротивления среды ($\beta = 0$) амплитуда при резонансе обращается в бесконечность.

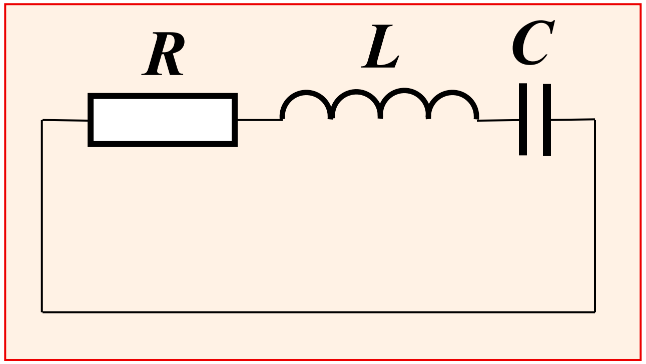
Польза: акустика, радиотехника.

Вред: опасные вибрации корпуса корабля или крыльев самолета при совпадении собственной частоты колебаний с частотой колебаний, возбуждаемых вращением гребного винта или пропеллера.

Электромагнитные колебания.

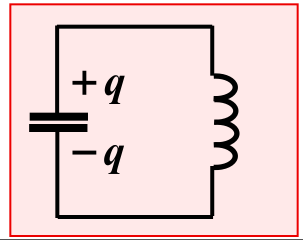
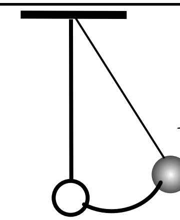
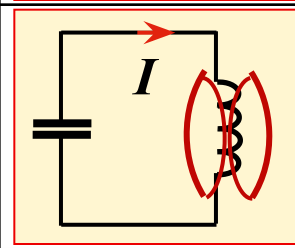
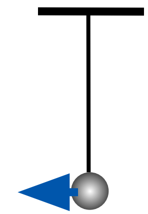
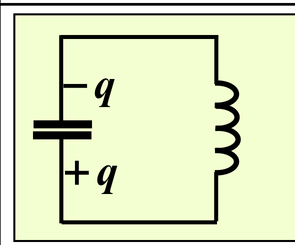
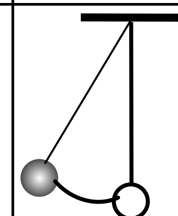
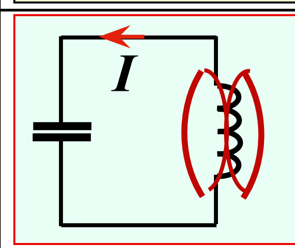
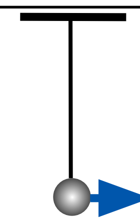
<u>Колебательный контур.</u>

<u>Колебательный контур</u> – это электромагнитная система, в которой электрические величины (токи, заряды) периодически изменяются.



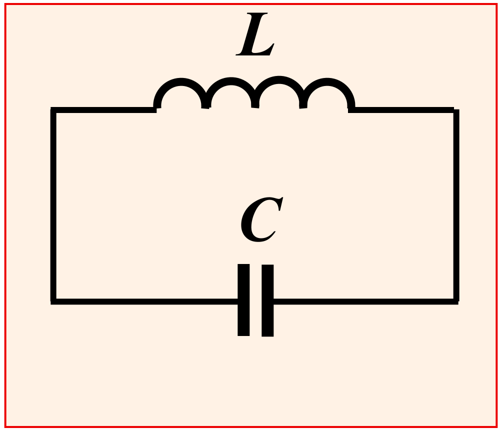
Состав: последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушка индуктивностью L, и с конденсатор емкостью C.

Идеализированный контур, это контур, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \approx 0$).

t	Стадии колебательного процесса		Аналогия между электромагнитными колебаниями в контуре и механическими колебаниями			
	В конденсаторе	В катушке				
$t = 0$	Начало разрядки конденсатора	Начинает течь ток		$W = \frac{q^2}{2C}$		$E = П_{max}$
$t = \frac{1}{4}T$	Конденсатор разряжен	Ток максимален		$W = \frac{LI^2}{2}$		$E = К_{max}$
$t = \frac{1}{2}T$	Конденсатор перезаряжается	Ток равен нулю		$W = \frac{q^2}{2C}$		$E = П_{max}$
$t = \frac{3}{4}T$	Конденсатор вновь разряжен	Ток максимален и направлен противопол.		$W = \frac{LI^2}{2}$		$E = К_{max}$

Электромагнитные колебания.

Колебательный контур. Свободные гармонические колебания.



Дифференциальное *уравнение гармонических колебаний в контуре.*

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

Подобно уравнению механических колебаний.

Решение: $q = q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - *собственная частота* контура.

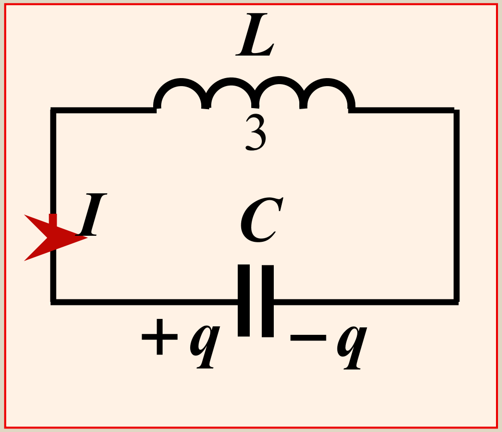
$T = 2\pi\sqrt{LC}$ - период колебаний (*формула Томсона)*.

Формула для напряжения на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{max}}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Электромагнитные колебания.

Колебательный контур. Свободные гармонические колебания.



$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2 q=0$$

$$q=q_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$U=\frac{q_{max}}{C}\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

Продифференцировав соотношение для заряда, получим выражение для тока в контуре :

$$I=\frac{dq}{dt}$$

$$I=-q_{max}\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$I=I_{max}\cos\left(\omega_0 t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

Видно, что сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

В момент, когда ток достигает наибольшего значения, заряд и напряжение обращаются в нуль и наоборот.

Электромагнитные колебания.

Свободные затухающие колебания в контуре.

Реальный контур обладает активным сопротивлением.

Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется на этом сопротивлении на нагревание, свободные колебания затухают.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний в контуре:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\,\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

Подобно уравнению механических колебаний.

$$\beta = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Электромагнитные колебания.

Свободные затухающие колебания в контуре.

При условии, что $\beta^2 \ll \omega_0^2$, т.е. при $\dfrac{R^2}{4L^2} \ll \dfrac{1}{LC}$ решение уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$\boxed{q = q_{max\,0}\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Если в это выражение подставить соответствующие выражения для β и ω_0, получим следующее соотношение для частоты затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

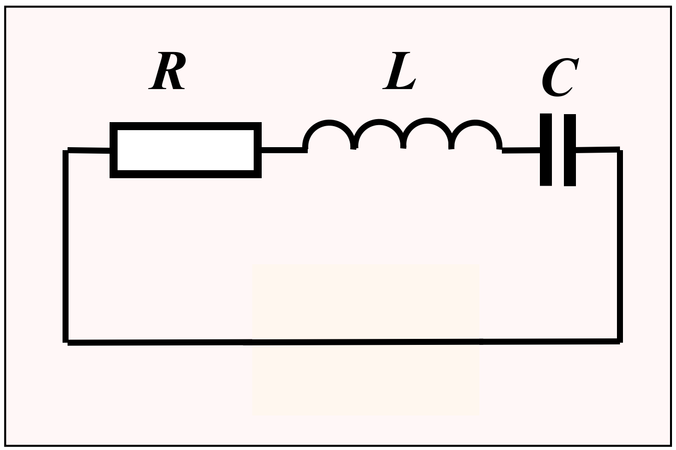
При $R = 0$ получится выражение для собственной частоты незатухающих свободных колебаний в контуре.

Электромагнитные колебания.

Вынужденные колебания в контуре.

Для компенсации потерь в колебательном контуре нужно оказывать на контур периодически изменяющееся воздействие.

Это можно осуществить, например, включив последовательно с элементами контура переменное напряжение.



$$U = U_{max} \cos \omega t$$

Уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_{max}}{L} \cos \omega t$$

Решение для установившихся колебаний:

$$q = q_{max} \cos(\omega t + \psi)$$

$$q_{max} = \frac{U_{max}/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\psi = arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$