

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР

Методи чисельного розв'язування СЛАР діляться на дві групи: *прямі та ітераційні*.

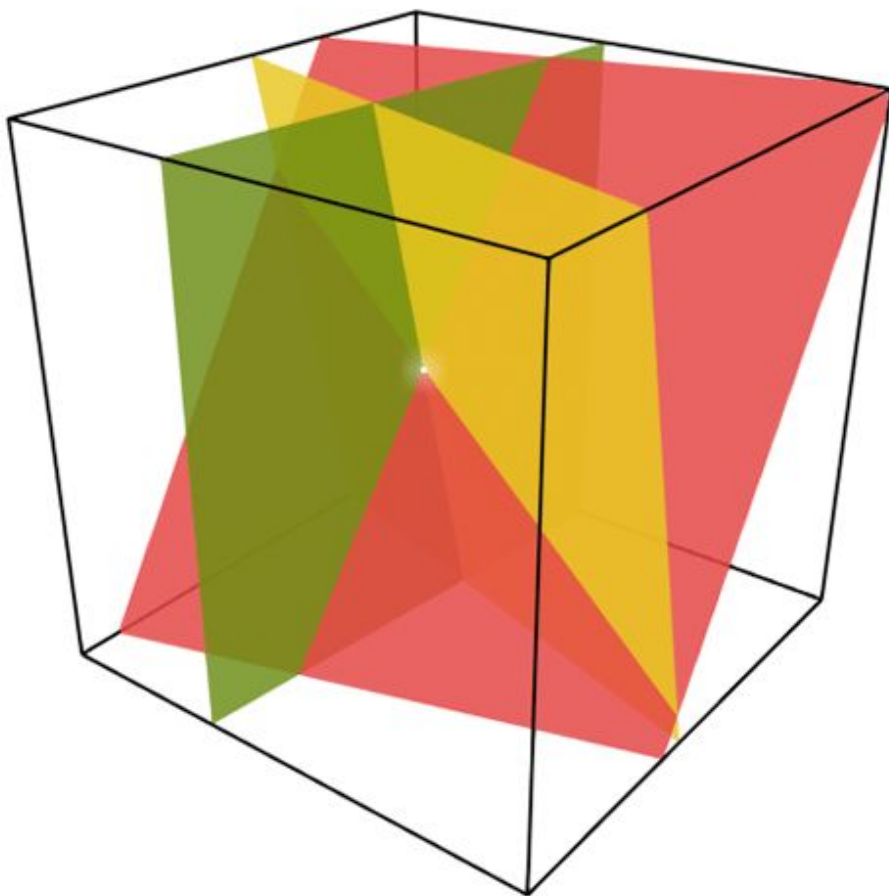
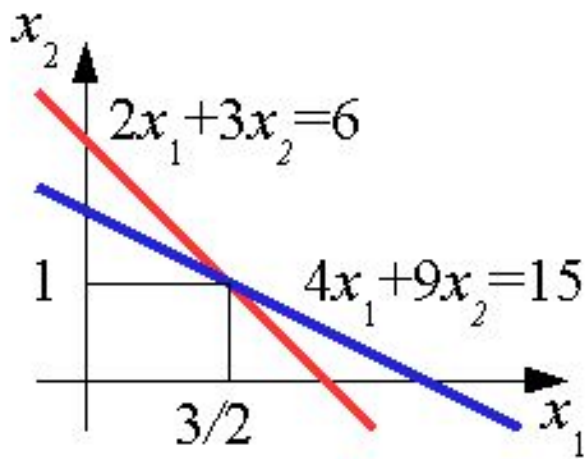
В *прямих* (або точних) методах розв'язок \mathbf{x} системи знаходиться за скінчену кількість арифметичних дій (методи Гаусса, LU-розкладання, прогонки, Халецького и т.д). Якщо матриця неособлива, тобто

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, де \mathbf{A}^{-1} – обернена матриця.

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Ітераційні методи полягають в тому, що розв'язок \mathbf{x} системи знаходиться як границя послідовних наближень $\mathbf{x}^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$, де k – номер ітерації (Якобі, Зейделя, варіаційного типу).



ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР МЕТОД ГАУССА

Прямий хід методу Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих x_1, x_2, \dots, x_n з системи. Якщо $a_{11} \neq 0$, то поділивши перше рівняння системи на a_{11} , отримаємо:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = y_1,$$

де

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Помножимо це рівняння на a_{i1} і відніматимемо отримане рівняння від i -го рівняння системи. Після виключення x_1 з решти рівнянь отримаємо:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1j}x_j + \dots + c_{1n}x_n = y_1,$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2j}^{(1)}x_j + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)},$$

... ..

$$a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nj}^{(1)}x_j + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}.$$

МЕТОД ГАУССА

Коефіцієнти системи обчислюються за формулами:

$$a_{kj}^{(0)} = a_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$c_{ki} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j = k+1, k+2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}, \quad i, j = k+1, k+2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Обчислення правих частин системи здійснюється за формулами:

$$b_k^{(0)} = b_k, \quad y_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} y_k, \quad i = k+1, k+2, \dots, n.$$

МЕТОД ГАУССА

Виключаючи послідовно невідомі із початкової системи отримуємо систему рівнянь $Cx = y$:

$$\begin{aligned}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n &= y_1, \\x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n &= y_2, \\&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n &= y_{n-1}, \\x_n &= y_n.\end{aligned}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Зворотній хід полягає в знаходженні невідомих :

$$x_n = y_n, \quad x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j,$$

$$i = n - 1, n - 2, \dots, 1.$$

Матрицею перестановок \mathbf{P} називається квадратна матриця, у якій в кожному рядку і в кожному стовпці наявний лише один відмінний від нуля і рівний одиниці елемент.

Елементарною матрицею перестановок \mathbf{P}_{ki} називається матриця, отримана з одиничної матриці перестановкою k -го і i -го рядків. Наприклад, елементарними матрицями перестановок третього порядку є матриці:

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Добуток двох (а отже, і будь-якої кількості) елементарних матриць перестановок є матрицею перестановок (не обов'язково елементарною).
2. Матрицю $\mathbf{P}_{ki}\mathbf{A}$ отримують із матриці \mathbf{A} перестановкою k -го і i -го рядків.
3. Матрицю $\mathbf{A}\mathbf{P}_{ki}$ отримують із матриці \mathbf{A} перестановкою k -го і i -го стовпців.

Метод Гаусса з вибором головного елемента по стовпцю еквівалентний звичайному методу Гаусса, який застосовують до системи

$$\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$$

З системи $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ маємо $\mathbf{Cx} = \mathbf{y}$

Можна показати \mathbf{b} та \mathbf{y} пов'язані між собою як $\mathbf{Dy} = \mathbf{b}$, де матриця \mathbf{D} має вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(2)} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(2)} & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

3 $\mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

Маємо $\mathbf{Cx} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{DCx} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{DC}$

Метод Гаусса відповідає розкладанню матриці A на добуток двох трикутних матриць:

$$A = LU \quad (L = D, U = C)$$

тобто

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

Якщо $\det A \neq 0$, то існує матриця перестановок P така, що справедливе розкладання

$$PA = LU$$

LU-розкладання матриці A

$$l_{i1} = a_{i1}, i = 1, n, \quad u_{1j} = a_{1j} / a_{11}, j = 1, n,$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj}, \quad i, j = 1, n$$

Для матриці L

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} u_{kj}, \quad i \geq j,$$

$$a_{ij} = l_{ij} u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \quad l \text{ u}$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}.$$

Для матриці U

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik} u_{kj}, \quad i < j,$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{ij}}.$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}.$$

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 10 & 22 & 34 \\ 4 & 13 & 28 & 50 \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_{LU} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix};$$

Схема Холецкого

Метод Холецкого використовується для розв'язування СЛАР з симетричними матрицями ($a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, n$).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Самостійно: розглянути метод Холецкого.

Обчислення $\det(\mathbf{A})$ та розв'язування СЛАР

- I. Обчислення $\det(\mathbf{A})$ на основі LU-розкладу матриці

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L}) \det(\mathbf{U}) = l_{11}l_{22}\dots l_{n,n}.$$

- II. Розв'язування СЛАР на основі LU-розкладу матриці

1. Розкладання матриці $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$
2. Розв'язування системи $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$
3. Розв'язування системи $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

Обернена матриця – це матриця, для якої

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boxtimes & a_{3n} \\ \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxtimes & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdot & z_{1,n-1} & z_{1,n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdot & z_{2,n-1} & z_{2,n} \\ z_{31} & z_{32} & \cdot & z_{3,n-1} & z_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \boxtimes & \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdot & z_{n,n-1} & z_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxtimes & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для обчислення оберненої матриці необхідно розв'язати n систем лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\mathbf{A} \mathbf{Z}^{(j)} = \boldsymbol{\delta}^{(j)}, j=1, n$$

де

$\mathbf{Z}^{(j)}$ – j -й стовпчик оберненої матриці,

$\boldsymbol{\delta}^{(j)}$ – j -й стовпчик одиничної матриці.

Обчислення A^{-1}

Знаючи розклад $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, обернену матрицю легко обчислити як

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}.$$

$$l_{ij}^{(\mathbf{L}^{-1})} = \frac{\delta_{ij} - \sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} k_{kj}}{l_{ii}}, \quad i = j, \dots, n,$$

$$u_{ij}^{(\mathbf{U}^{-1})} = \frac{\delta_{ij} - \sum_{k=i+1}^j u_{ik} k_{kj}}{u_{ii}}, \quad i = j, \dots, 1.$$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЕРЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Припустимо, що система

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

має матрицю \mathbf{A} розмірністю $m \times n$ ($m > n$).

Така система має безліч розв'язків, але можна вибрати серед них таке, що мінімізує нев'язку розв'язку $\varepsilon = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$.

Початкова перевизначена система зводиться до так званої нормальної форми

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{Cx} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Звідки

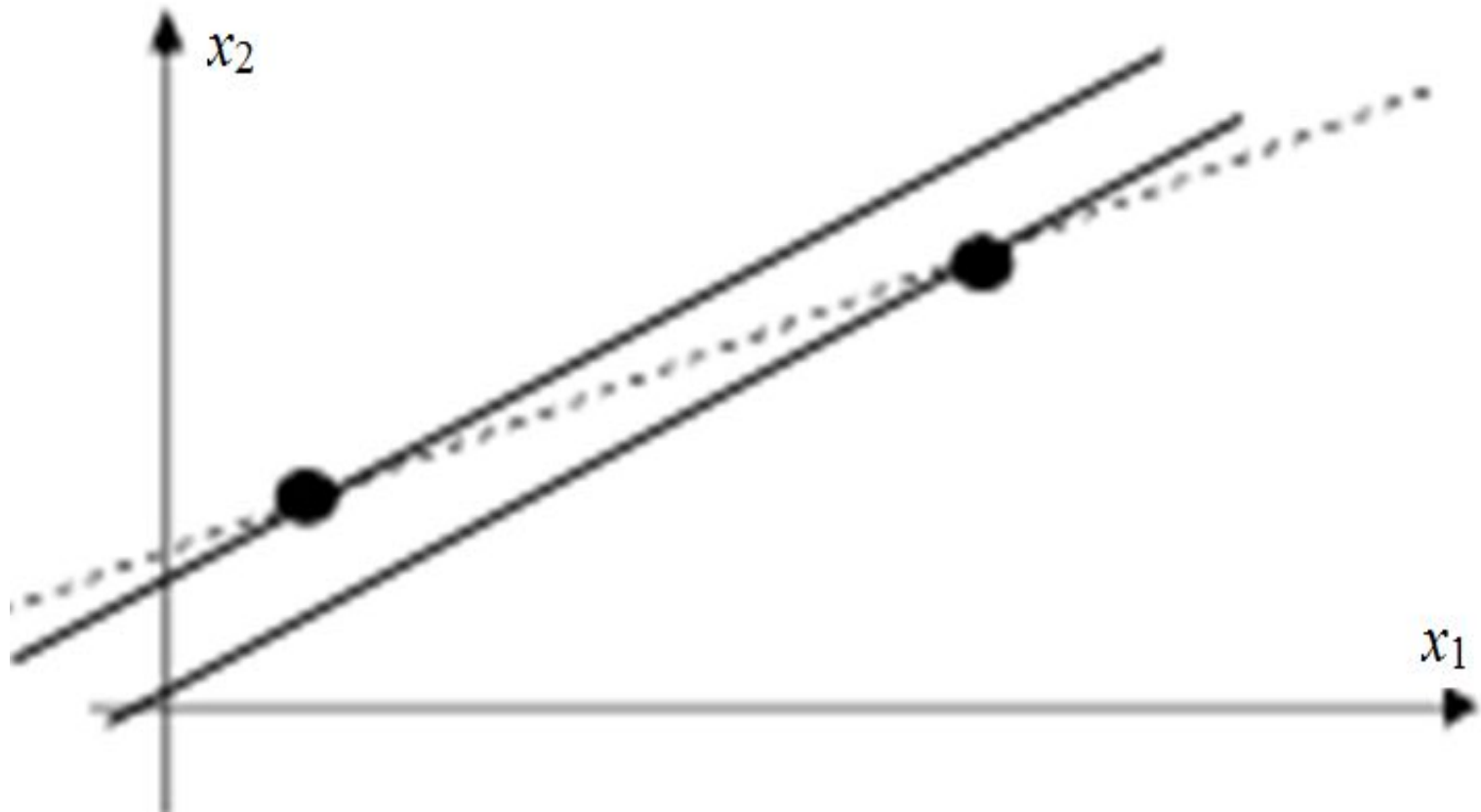
$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Матриця $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ розмірністю $(n \times n)$ неособлива, якщо стовпці матриці \mathbf{A} незалежні.

ТОЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СЛАР

- $6,1 x_1 + 3,4 x_2 = 6,1$
 $14,7 x_1 + 8,2 x_2 = 14,7$
 $x_1 = 1; x_2 = 0.$
- $6,1 x_1 + 3,4 x_2 = 6,101$
 $14,7 x_1 + 8,2 x_2 = 14,7$
 $x_1 = 1,205; x_2 = -0,3675.$
- $6,101 x_1 + 3,4 x_2 = 6,1$
 $14,7 x_1 + 8,2 x_2 = 14,7$
 $x_1 = 0,829875; x_2 = 0,304979.$

Графічна ілюстрація для систем рівнянь
з погано обумовленою матрицею



Норми векторів

- Норма l_p

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

- Евклидова норма

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$$

- Норма l_1

$$\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)$$

- Норма l_∞

$$\|x\|_\infty = \max_i \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Норми матриць

- Норма l_p
$$\| \mathbf{A} \|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p}$$

- Евклидова норма
$$\| \mathbf{A} \|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

- Норма l_1
$$\| \mathbf{A} \|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right), j = 1, n$$

- Норма l_∞
$$\| \mathbf{A} \|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right), i = 1, n$$

ВЛАСТИВОСТІ НОРМ

векторів:

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \text{ лише для } \mathbf{x} = 0$$

$$\|c \mathbf{x}\| = |c| \|\mathbf{x}\| \text{ для всіх комплексних чисел } c$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

матриць:

$$\|\mathbf{A}\| \geq 0$$

$$\|\mathbf{A}\| = 0 \text{ лише для } \mathbf{A} = 0$$

$$\|c \mathbf{A}\| = |c| \|\mathbf{A}\| \text{ для всіх комплексних чисел } c$$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$$

ЧИСЛО ОБУМОВЛЕНОСТІ

Нехай \mathbf{x}^* – точний розв'язок,

\mathbf{x}_H – обчислене (наближене) значення розв'язку,

$\delta\mathbf{x} = (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_H)$ – похибка розв'язку.

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_H$ – нев'язка розв'язку системи $\mathbf{A} \mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

Розглянемо випадок, коли

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b},$$

звідки

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}.$$

Користуючись нормами, запишемо:

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\|,$$

$$\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}^*\|$$

$$\|\delta\mathbf{x}\| \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\| \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}^*\|.$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

ЧИСЛО ОБУМОВЛЕНОСТІ

Припустимо, що $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Маємо

$$\mathbf{A} \delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = 0$$

$$-\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}), \quad \|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{A}\| \|(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x})\|.$$

Звідки

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

$$\text{Число обумовленості } \text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

ОЦІНКА ПОХИБОК

Похибка обчислення оберненої матриці

$$\frac{\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})^{-1}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} \leq \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1 - \text{cond}(\mathbf{A}) (\|\delta\mathbf{A}\| / \|\mathbf{A}\|)} \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

якщо $\|\delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| < 1$.

Похибка розв'язку системи

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \leq \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1 - \text{cond}(\mathbf{A}) (\|\delta\mathbf{A}\| / \|\mathbf{A}\|)} \left(\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\delta\mathbf{b}\|} \right)$$

якщо $\|\delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| < 1$.

ТОЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СЛАР

- $$\begin{aligned} 6,1 x_1 + 3,4 x_2 &= 6,1 \\ 14,7 x_1 + 8,2 x_2 &= 14,7 \\ x_1 &= 1; x_2 = 0. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 6,1 x_1 + 3,4 x_2 &= 6,101 \\ 14,7 x_1 + 8,2 x_2 &= 14,7 \\ x_1 &= 1,205; x_2 = -0,3675. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 6,101 x_1 + 3,4 x_2 &= 6,1 \\ 14,7 x_1 + 8,2 x_2 &= 14,7 \\ x_1 &= 0,829875; x_2 = 0,304979. \end{aligned}$$
- $\text{cond}(\mathbf{A}) = 1.1908 \cdot 10^4 \quad |\mathbf{A}| = 0.04$