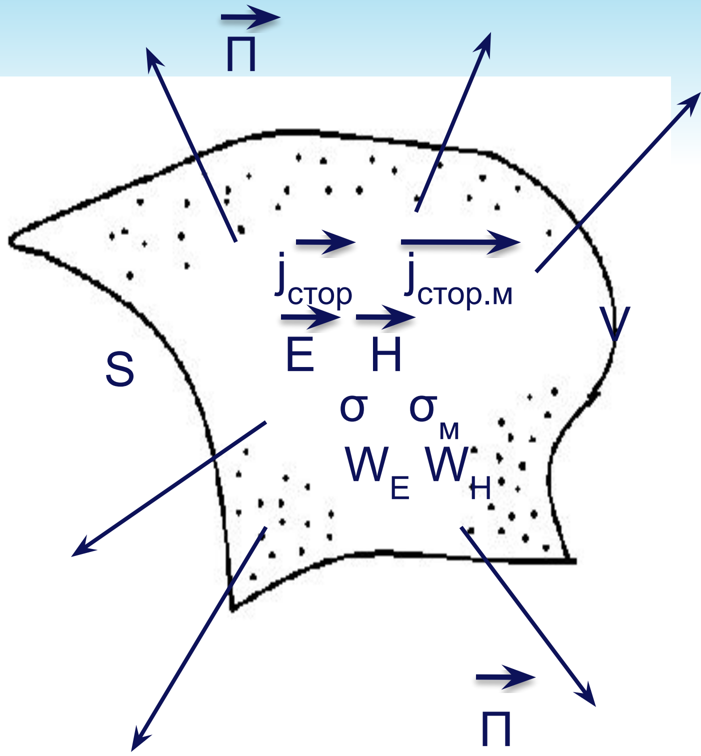
Розділ 5

ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Зміст

5.1.Теорема Пойнтінга для миттєвих значень векторів поля

Нехай у будь-якому обмеженому об’ємі *V* з урахуванням втрат, які обумовлені електричною σ та умовною магнітною $\sigma_м$ питомими провідностями, *є стороннє джерело електромагнітного поля*, визначене векторами густини електричного $\vec{j}_{стор}$ та умовного магнітного $\vec{j}_{стор.м}$ струмів. З’ясуємо, яким чином здійснюється розподіл енергії цього джерела в цьому об’ємі та за його межами. Тобто, визначимо вектор Пойнтінга.



- Стратегія розвитку полягатиме у застосуванні першого та другого рівняння Максвелла у диференціальній формі у повному складі, тобто з урахуванням сторонніх струмів (електричного $j_{стор}$ та умовного магнітного $j_{стор.м}$), електричних та магнітних втрат.

$$rot\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_{стор} \quad (5.1) \quad rot\vec{E} = -\sigma_{м}\vec{H} - \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \vec{J}_{стор.м.} \quad (5.2)$$

- Домножимо скалярно ці рівняння: перше рівняння на $\vec{E}$, а друге на $\vec{H}$ та віднімемо перше від другого:

$$\vec{H}rot\vec{E} - \vec{E}rot\vec{H}, \quad -\sigma_{м}H^2 - \mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \vec{J}_{стор.м}\cdot\vec{H} - \sigma E^2 - \varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \vec{J}_{стор}\cdot\vec{E}$$

На підставі тотожності векторного аналізу:

$$\vec{B}rot\vec{A} - \vec{A}rot\vec{B} = div[\vec{A}\times\vec{B}]$$

В результаті отримаємо:

- ***теорему Пойнтінга у диференціальній формі*** (для миттєвих значень векторів). Всі складники характеризують густину потужності.

$$div[\vec{E}\times\vec{H}]+\sigma_{м}H^{2}+\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\vec{J}_{стор.м}\cdot\vec{H}+\sigma E^{2}+\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{J}_{стор}\cdot\vec{E}=0$$

перший доданок лівої частини під знаком дивергенції – маємо векторний добуток, який має назву *вектор Пойнтінга* та визначає густину потужності $\vec{\Pi}=\vec{E}\times\vec{H}$

- ***теорему Пойнтінга в інтегральній формі .***

$$\int_V \vec{J}_{стор}\vec{E}dV+\int_V \vec{J}_{стор.м}\vec{H}dV+\int_V \sigma E^{2}dV+\int_V \sigma_{м}H^{2}dV+$$

$$+\int_V \varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}dV+\int_V \mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}dV+\int_S [\vec{E}\times\vec{H}]\cdot d\vec{S}=0.$$

Визначимо фізичний зміст всіх складників.

I група - характеризує *потужність сторонніх джерел* електричного та магнітного, відповідно:

$$\int \vec{J}_{стор} \cdot \vec{E} dV , \quad \int \sigma_м H^2 dV$$

II група - характеризує *теплові втрати* потужності, які зосереджені в об'ємі, електричні та магнітні відповідно: $\int \sigma E^2 dV$, $\int \sigma_м H^2 dV$.

III група - характеризує *потужності електричного і магнітного полів*, які зосереджені в об'ємі , тобто потужності, що витрачені на утворення відповідних складників електромагнітного поля:

$$\int_V \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} dV \quad \int_V \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} dV$$

Останній доданок – *потужність електромагнітного поля крізь замкнуту поверхню* , яка охоплює об'єм , в якому зосереджені сторонні джерела поля. Це – *потужність випромінення електромагнітного поля – носія інформації:*

$$P = \oint_S \left(\vec{E} \times \vec{H} \right) \cdot d\vec{S} = \int_S \quad \cdot$$

Сума цих потужностей дорівнює нулю, що свідчить про баланс миттєвої потужності в просторі.

Теорема Пойнтінга – одне з найважливіших положень електродинаміки, на основі якої далі отримана формула *ідеального радіозв'язку*. Якщо відоме значення вектора Пойнтінга, можна визначити потужність, яку випромінюють та приймають антени, розрахувати потужність, яка поширюється в хвилеводах, тощо.

Визначимо складник електричної енергії електромагнітного поля в об'ємі. Для цього проінтегруємо за часом: $\int_V \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} dV$

$$W_E = \int_t P_E \, dt = \int_t \int_V \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \cdot dV dt$$

Після визначення $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt$ як повного диференціала $d\vec{E}$, запишемо даний вираз у формі:

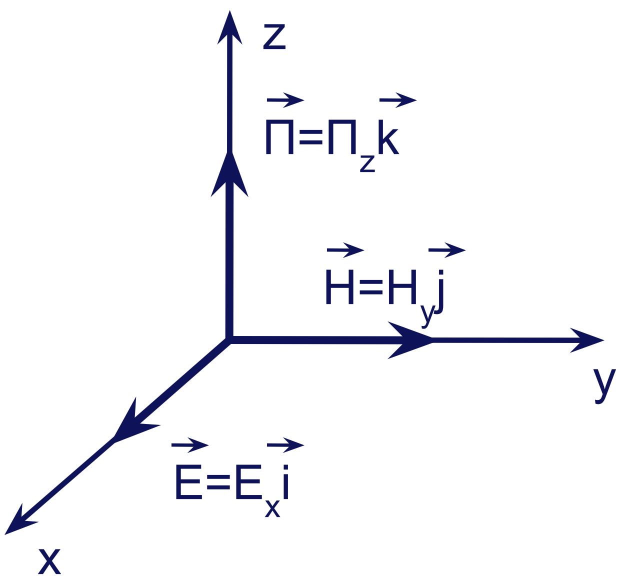
$$W_E = \int_V \int_E \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{E} dV \quad => \quad W_E = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV$$

Після виконання аналогічної процедури з $\int_V \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} dV$ отримаємо:

$$W_H = \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV$$

Під інтегралами є відповідно густина енергії електричного та магнітних полів:
$$w_E = \varepsilon \frac{E^2}{2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}, \qquad w_H = \mu \frac{H^2}{2} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$$

Енергію електромагнітного поля визначимо, як суму цих складників:
$$W = W_E + W_H = \int_V \left(\varepsilon \frac{E^2}{2} + \mu \frac{H^2}{2} \right) dV$$



Для практики електрозв'язку дуже важливим є визначення напрямку вектора Пойтинга. Площина, в якій розташовані $\vec{E}$ і $\vec{H}$ має назву *фронт електромагнітної хвилі.* Таким чином вектор Пойнтінга зорієнтовано перпендикулярно до фронту електромагнітної хвилі.

5.2. Вектор Пойнтінга для гармонічних процесів (у комплексній формі)

Якщо процеси можна описати гармонічною функцією, то зручно використати комплексні та комплексно-спряжені величини.

Для вектора напруженості електричного поля:

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left\{ \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} \right\} = \frac{\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} + \overset{*}{\vec{E}}_m e^{-j\omega t}}{2}$$

Для вектора напруженості магнітного поля: $\vec{H} = \mathrm{Re}\left\{ \dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t} \right\} = \dfrac{\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t} + \overset{*}{\vec{H}}_m e^{-j\omega t}}{2}$

Звідси вектор Пойнтінга:

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{4}\left(\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} + \overset{*}{\vec{E}}_m e^{-j\omega t} \right) \times \left(\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t} + \overset{*}{\vec{H}}_m e^{-j\omega t} \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\dot{\vec{E}}_m \times \overset{*}{\vec{H}}_m + \overset{*}{\vec{E}}_m \times \dot{\vec{H}}_m + \dot{\vec{E}}_m \times \dot{\vec{H}}_m e^{2j\omega t} + \overset{*}{\vec{E}}_m \times \overset{*}{\vec{H}}_m e^{-2j\omega t} \right).$$

Після перестановок отримаємо:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{E}}_m \times \overset{*}{\vec{H}}_m\right\} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{E}}_m \times \dot{\vec{H}}_m e^{j2\omega t}\right\}$$

Перший доданок незмінний у часі, другий – змінюється з подвійною частотою.

Перший доданок визначає середнє за період значення густини потужності, тобто вектор Пойнтинга:

$$\vec{\Pi}_{сер} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{\Pi} dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{E}}_m \times \overset{*}{\vec{H}}_m\right\}$$

Другий доданок – коливальна складова вектора Пойнтинга.

$$\vec{\Pi}_{кол} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{E}}_m \times \dot{\vec{H}}_m e^{j2\omega t}\right\}$$

За умов гармонічного поля використовують, так званий, *комплексний вектор Пойнтінга,* який має дійсний та уявний складники,відповідно:

$$\dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{E}} \times \overset{*}{\vec{H}}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}} \times \overset{*}{\vec{H}}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\dot{\vec{E}} \times \overset{*}{\vec{H}}\right)$$

Та має властивість:

$$\vec{\Pi}_{сер} = \mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{\Pi}}\right\}$$

Тобто, якщо комплексний вектор Пойнтінга є уявним, то це означає, що електромагнітний процес в середньому за період не переносить потужність. Тобто уявному значенню комплексного вектора Пойнтінга аналогією є реактивна потужність.

5.3. Уявлення процесу передавання енергії

Процес передавання енергії з використанням вектора Пойнтінга з’ясуємо на прикладі дводротової лінії, вздовж якої енергія від джерела ЕРС передається в резистивне навантажувальне коло. Орієнтовне зображення силових ліній складників векторів електромагнітного поля $\vec{E}$ та $\vec{H}$.

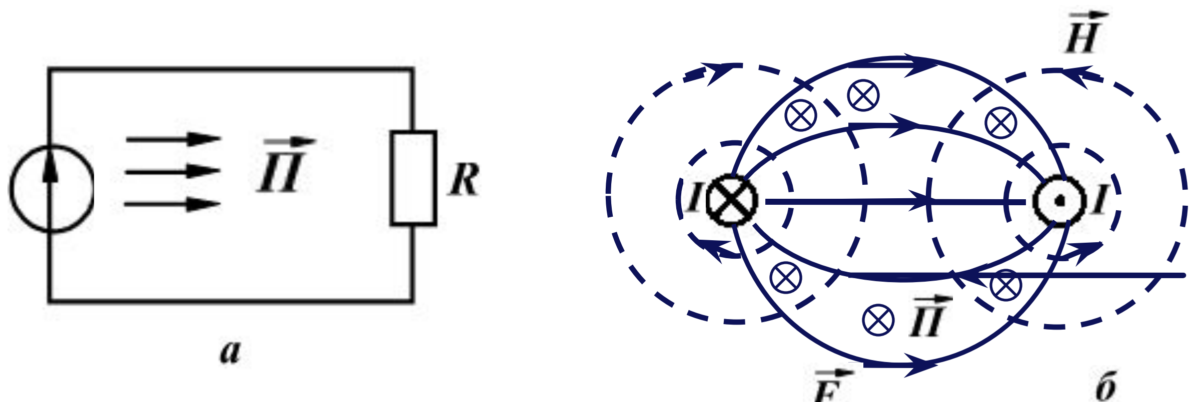


Рисунок 5.1 Поширення електромагнітної енергії :

а – еквівалентна електрична схема; *б* – уявлення формування електромагнітного поля двопровідної лінії

Ці складники “формують” вектор Пойнтінга, що орієнтований вздовж ліній від генератора до кола навантаження.

Потужність визначимо як

$$P = \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Тобто потужність передається електромагнітним полем, а провідники виконують функцію “рейок”, вздовж яких поле поширюється.

5.4. Лема Лоренца

Лема Лоренца встановлює зв'язок між сторонніми джерелами у двох різних точках *вільного простору* і електромагнітним полем, які створюють ці джерела.

Нехай деяка сукупність гармонічних сторонніх струмів утворює електромагнітне поле з комплексними амплітудами ($\dot{\vec{E}}_{m1}$, $\dot{\vec{H}}_{m1}$), які задовольняють системі рівнянь Максвелла:

$$rot\,\dot{\vec{H}}_{m1} = j\omega\dot{\varepsilon}\,\dot{\vec{E}}_{m1} + \dot{\vec{J}}_{m1\text{стор.}} \qquad rot\,\dot{\vec{E}}_{m1} = -j\omega\mu\,\dot{\vec{H}}_{m1} - \dot{\vec{J}}_{m1\text{стор.м}}$$

Існує також інша група сторонніх струмів, які створюють електромагнітне поле з напруженостями, $\dot{\vec{E}}_{m2}$, $\dot{\vec{H}}_{m2}$, які задовольняють системі рівнянь Максвелла:

$$rot\,\dot{\vec{H}}_{m2} = j\omega\dot{\varepsilon}\,\dot{\vec{E}}_{m2} + \dot{\vec{J}}_{m2\text{стор.}} \qquad rot\,\dot{\vec{E}}_{m2} = -j\omega\mu\,\dot{\vec{H}}_{m2} - \dot{\vec{J}}_{m2\text{стор.м}}$$

Помножимо скалярно $rot\,\dot{\vec{E}}_{m1}$ на $\vec{E}_{m2}$,та $rot\,\dot{\vec{E}}_{m2}$ на $\vec{H}_{m1}$ та віднімемо другу рівність від першої. В результаті отримаємо:

$$-div\left(\dot{\vec{E}}_{m2}\times\dot{\vec{H}}_{m1}\right)=j\omega\dot{\varepsilon}\,\dot{\vec{E}}_{m1}\,\dot{\vec{E}}_{m2}+j\omega\mu\,\dot{\vec{H}}_{m1}\,\dot{\vec{H}}_{m2}+\dot{\vec{J}}_{m1стор.}\,\dot{\vec{E}}_{m2}+\dot{\vec{J}}_{m2\text{стор.м}}\,\dot{\vec{H}}_{m1}$$

Тепер помножимо скалярно $rot\,\dot{\vec{E}}_{m1}$ на $\dot{\vec{H}}_{m2}$, та $rot\,\dot{\vec{H}}_{m2}$ на $\dot{\vec{E}}_{m1}$ та віднімемо друге рівняння від першого. В результаті отримаємо:

$$div\left(\dot{\vec{E}}_{m1}\times\dot{\vec{H}}_{m2}\right)=-j\omega\dot{\varepsilon}\,\dot{\vec{E}}_{m1}\,\dot{\vec{E}}_{m2}-j\omega\mu\,\dot{\vec{H}}_{m1}\,\dot{\vec{H}}_{m2}-\dot{\vec{J}}_{m2\text{стор.}}\,\dot{\vec{E}}_{m1}-\dot{\vec{J}}_{m1\text{стор.м}}\,\dot{\vec{H}}_{m2}$$

$$div\left(\dot{\vec{E}}_{m1}\times\dot{\vec{H}}_{m2}\right)-div\left(\dot{\vec{E}}_{m2}\times\dot{\vec{H}}_{m1}\right)=\dot{\vec{J}}_{m1стор.}\,\dot{\vec{E}}_{m2}+\dot{\vec{J}}_{m2\text{стор.м}}\,\dot{\vec{H}}_{m1}-\dot{\vec{J}}_{m2\text{стор.}}\,\dot{\vec{E}}_{m1}-\dot{\vec{J}}_{m1\text{стор.м}}\,\dot{\vec{H}}_{m2}$$

Отримане рівняння описує Лему Лоренца в диференціальній формі.

Векторні добутки $\dot{\vec{E}}_{m1}\times\dot{\vec{H}}_{m2}$ та $\dot{\vec{E}}_{m2}\times\dot{\vec{H}}_{m1}$ – взаємні вектори Пойнтінга двох незалежних електромагнітних процесів.

Також можлива інтегральна форма леми Лоренца. Щоб її отримати, припустимо що маємо об’єм V, обмежений поверхнею S. Після інтегрування Леми Лоренца в дифференціальній формі за об’ємом та застосування перетворення (теореми) Гаусса-Остроградського, отримаємо:

$$\oint_S\left[\dot{\vec{E}}_{m1}\times\dot{\vec{H}}_{m2}-\dot{\vec{E}}_{m2}\times\dot{\vec{H}}_{m1}\right]\cdot d\vec{S}=\int_V\left(\dot{\vec{J}}_{m1стор.}\dot{\vec{E}}_{m2}+\dot{\vec{J}}_{m2стор.м}\dot{\vec{H}}_{m1}-\dot{\vec{J}}_{m2стор.}\dot{\vec{E}}_{m1}-\dot{\vec{J}}_{m1стор.м}\dot{\vec{H}}_{m2}\right)dV$$

Таким чином отримано співвідношення визначають взаємний зв’язок потужностей електромагнітного поля, створеного двома незалежними джерелами.

5.5. Висновки

1. На основі першого та другого рівнянь Максвелла в диференціальній формі з врахуванням сторонніх джерел електромагнітного поля та втрат в обмеженому об'ємі отримано теорему Пойнтінга для миттєвих векторів поля в диференціальній формі.

2. Після інтегрування за об'ємом теореми Пойнтінга в диференціальній формі з використанням перетворення Гаусса-Остроградського отримано формулу теореми Пойнтінга в інтегральній формі – баланс потужностей.

3. Векторний добуток $\vec{E}\times\vec{H}$ – має назву *вектор Пойнтінга* $(\vec{\Pi})$ та характеризує густину потужності електромагнітного поля, яке поширюється назовні з обмеженого об'єму V.

4. Баланс потужностей електромагнітного поля складають:

– $\int \vec{J}_{стор}\cdot\vec{E}dV$; $\int \vec{J}_{стор\,м}\cdot\vec{H}dV$ – потужність сторонніх джерел поля;

–. $\int\limits_V \sigma E^2 dV$; $\int\limits_V \sigma_м H^2 dV$ – потужність втрат;

– $\int\limits_V \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{E}dV$; $\int\limits_V \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\cdot\vec{H}dV$ – потужність електричного та магнітного полів, що зосереджено в даному об'ємі;

– $P=\int\limits_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}$ – потужність електромагнітного поля, яке виходить за межі об'єму.

5. Площина, в якій розташовано вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$, має назву *фронт хвилі*; вектор Пойнтінга зорієнтовано *перпендикулярно* до фронту хвилі.

6. Енергія електромагнітного поля в об'ємі V є сумою енергій електричного та магнітного полів:

$$W_E = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV ; W_H = \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV .$$

7. Якщо електромагнітне поле можна описати гармонічним процесом, то вектор $\vec{\Pi}$ записують через комплексні амплітуди напруженості електричного і магнітного полів.

8. Вектор Пойнтінга гармонічного електромагнітного поля характеризують двома складниками: *середнім за період* $\vec{\Pi}_{\text{сер}}$ та *коливальним* $\vec{\Pi}_{\text{кол}}$.

9. Вектор Пойнтінга надає уявлення процесу перенесення енергії провідниками із струмом – які формують електричне і магнітне поля, тобто електромагнітне поле та вказують шлях перенесення електромагнітної енергії.

10. Лема Лоренца встановлює зв'язок між двома сторонніми струмами у двох різних точках простору і електромагнітними полями, які збуджені цими джерелами.

5.6. Контрольні питання та завдання

1. Обґрунтуйте підхід до виведення теореми Пойнтінга.
2. Поясніть сутність сторонніх струмів.
3. Наведіть теорему Пойнтінга в диференціальній формі та поясніть сутність її складників.
4. Сформулюйте теорему Пойнтінга в інтегральній формі та поясніть фізичний зміст складників.
5. Наведіть формулу для вектора Пойнтінга, визначте напрям та поясніть поняття «фронт хвилі».
6. Поясніть особливості вектора Пойнтінга у комплексній формі, поясніть сутність двох його складників.
7. Визначте енергію електричного поля.
8. Визначте енергію магнітного поля.
9. Визначте енергію електромагнітного поля.
10. Доведіть зорієнтованість вектора Пойнтінга відносно векторів напруженості електричного та магнітного полів. Який процес характеризує цей напрям?
11. Охарактеризуйте процес передавання електромагнітної енергії системою провідників.
12. Сформулюйте лему Лоренца, поясніть її сутність в електродинаміці.