ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 3.

Основные изучаемые вопросы:

- **Формула полной вероятности.**
- **Формула Байеса.**
- **Повторение опытов.**

Формула полной вероятности

- ***Формула полной вероятности*** является следствием теорем сложения и умножения вероятностей. Она позволяет определять вероятность некоторого события, которое может происходить в различных ситуациях с разной вероятностью, причем вероятности этих ситуаций можно оценить до опыта, а условные вероятности появления рассматриваемого события при каждой сложившейся ситуации должны быть известны.
- С учетом этого искомая вероятность определяется как «средневзвешенная» вероятность, а «весами» при этом являются вероятности ситуаций, при которых данное событие может происходить.
- Пример: дождь может пойти с вероятностью $P(A)$ и не пойти с вероятностью $P(\bar{A})$ (ситуация характеризуется вероятностью дождя. При наличии дождя вероятность грома $P(B/A)$, а при его отсутствии, очевидно, такая вероятность $P(B/\bar{A})$.

- Пусть рассматривается полная группа попарно несовместных событий, т. е. выполняются условия $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$, $A_i \cdot A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, и некоторое событие B, которое может осуществиться одновременно только с одним из A_i.
- Говорят еще, что об обстановке проведения опыта можно сделать ***n*** исключающих друг друга предположений A_i, называемых ***гипотезами***.
- ***Вероятность P(B) события B***, которое может произойти только ***при условии появления одного из событий*** (гипотез) A_1, A_2, … A_n, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий A_1, A_2, … A_n на соответствующие условные вероятности события B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i).$$

- Подчеркнем: поскольку гипотезы составляют полную группу событий, то ***сумма вероятностей гипотез равна единице:***

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

- ***Условные вероятности появления события В при i-той гипотезе*** обозначают

$$P(B/A_i).$$

- ***«Взвешенную» вероятность события В при i-той гипотезе*** определяют как

$$P(B/A_i) \cdot P(A_i).$$

- Сумма «взвешенных» вероятностей дает вероятность события B с учетом всех гипотез $A_1 .... A_n$

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \; .... + P(B/A_n) \cdot P(A_n).$$

Пример. На сборку поступают детали с трех станков, производительности которых соотносятся, как 2:3:5. Брак в продукции этих станков составляет 2 %, 1 % и 3 %, соответственно. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь из общей продукции автоматов не является бракованной.

- ***Решение.***

Обозначим события:

- A_1 - деталь изготовлена первым автоматом;
- A_2 - деталь изготовлена вторым автоматом;
- A_3 - деталь изготовлена третьим автоматом.
- Вероятности этих событий

$$P(A_1) = \frac{2}{2+3+5} = 0{,}2;\; P(A_2) = \frac{3}{2+3+5} = 0{,}3;\; P(A_3) = \frac{5}{2+3+5} = 0{,}5.$$

- Эти события составляют полную группу попарно несовместных событий, так как никакие два из этих событий не могут произойти одновременно.

- Событие B – случайно выбранная из общей продукции деталь не является браком - происходит одновременно с одним из событий A_i. Условные вероятности события B согласно условию задачи:

$$P(B/A_1) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98;$$
$$P(B/A_2) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99;$$
$$P(B/A_3) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97.$$

- По формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}98 + 0{,}3 \cdot 0{,}99 + 0{,}5 \cdot 0{,}97 = 0{,}978.$$

Формула Байеса

- ***Формула Байеса или теорема гипотез*** является следствием формулы полной вероятности и теоремы умножения вероятностей. Она дает возможность пересчитать «априорные» (имевшиеся до проведения опыта) вероятности гипотез $P(A_i)$ с учетом результата проведенного опыта, то есть определять так называемые «апостериорные» (после опыта) вероятности $P(A_i/B)$.
- Пусть об условиях опыта, в котором может произойти событие B, можно сделать ряд взаимоисключающих гипотез

$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

- ***Гипотезы образуют полную группу событий***

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

- Если уже наступило рассматриваемое некоторое событие *B*, происходящее с одним из событий A_i, образующих полную группу несовместных событий, причем известны вероятности этих гипотез до испытания $P(A_i)$, а также вероятности, сообщаемые ими событию $P(B/A_i)$, то ***можно рассчитать вероятности гипотез A_i после того, как событие B произошло.***
- Вероятность $P(A_i/B)$ гипотезы A_i при условии, что событие *B* произошло (апостериорная вероятность гипотезы):

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) \cdot P(A_i)}.$$

- Формула Байеса, таким образом, дает возможность «пересмотреть» вероятности гипотез с учетом наблюденного результата опыта по мере получения новой информации.

Пример. Наборщик типографии использует два набора шрифтов одинакового объема, при этом в первом наборе 80 %, а во втором – 70 % отличного шрифта. Наудачу извлеченная литера оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта литера взята из второго набора.

- ***Решение.***

Обозначим события:

- A_1 - литера извлечена из первого набора;
- A_2 - литера извлечена из второго набора.
- Так как по условию наборы шрифтов имеют одинаковый объем, то вероятности событий:

$$P(A_1) = P(A_2) = 0{,}5.$$

- Эти события составляют полную группу попарно несовместимых событий, так как они не могут произойти одновременно, и сумма их вероятностей равна 1.

- Событие *B* - наудачу взятая литера отличного качества - происходит одновременно с одним из событий A_i. Условные вероятности события *B* согласно условию задачи:

$$P(B/A_1) = 0{,}8;$$
$$P(B/A_2) = 0{,}7.$$

- В задаче требуется переоценить вероятность события A_2 при условии, что событие *B* произошло. По формуле Байеса

$$P(A_2/B) = \frac{P(B/A_2)\cdot P(A_2)}{\sum_{i=1}^{2} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}5}{0{,}8\cdot 0{,}5 + 0{,}7\cdot 0{,}5} = \frac{0{,}35}{0{,}75} = 0{,}4667.$$

- **Пример.** Вертолет осуществляет поиск льдины с рыбаками в заданном районе моря, где по метеонаблюдениям в 60 % всех случаев в это время года бывает облачная погода, а в 40 % случаев – малооблачная погода. Вероятность обнаружения льдины с рыбаками в хорошую погоду составляет $P_1 = 0{,}9$, а в случае плохой погоды – $P_2 = 0{,}6$.
- Определить апостериорные вероятности $P(B/A_1)$ и $P(B/A_2)$, считая, что обнаружение рыбаков (событие B) произошло.
- ***Решение***
- Определяем вероятность события B по «доопытным» данным:
- $P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) = 0{,}4\cdot 0{,}9 + 0{,}6\cdot 0{,}6 = 0{,}72.$
- По формуле Байеса апостериорная вероятность гипотезы A_1

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}4}{0{,}72} = 0{,}5.$$

- По той же формуле Байеса для апостериорной вероятности гипотезы A_2 получаем:

$$P(A_2/B)=\frac{P(B/A_2)\cdot P(A_2)}{P(B)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}6}{0{,}72}=0{,}5.$$

- Из этого следует: тот факт, что событие B произошло в результате опыта, повлиял на изменение априорных вероятностей гипотез: первая увеличилась с 0,4 до 0,5, а вторая уменьшилась с 0,6 до 0,5. Причина этого - более высокая условная вероятность обнаружения рыбаков в хорошую погоду $P(B/A_1)$ = 0,9 по сравнению с $P(B/A_2)$ = 0,6.

- Формула Байеса находит широкое применение при создании ***систем распознавания образов и самообучающихся систем, используемых в робототехнике***. Такие системы способны принимать решение о дальнейшем поведении (робота) - делать выбор из множества альтернативных решений - на основании анализа поступающей информации с последующей переоценкой априорных вероятностей (вычисление и анализ апостериорных вероятностей).
- Рассмотрим простейший пример применения так называемого Байесовского подхода к построению самообучающихся систем.
- Пусть система S на основании поступающей информации Z должна выбрать одно из двух альтернативных решений A_0 или A_1.
- Апостериорная вероятность правильности решения A_0, зависящего от информации Z о результатах опыта, может быть представлена в виде:

$$P(A_0/Z)=\frac{P(A_0)P(Z/A_0)}{P(A_0)P(Z/A_0)+P(A_1)P(Z/A_1)},$$

где $P(A_0)$, $P(A_1)$ - априорные вероятности,
$P(Z/A_0)$, $P(Z/A_1)$ - ***правдоподобия решений***.

- Разделим числитель и знаменатель правой части равенства на $P(Z/A_0) \neq 0$. ***Отношение правдоподобия*** обозначим

$$L = \frac{P(Z/A_1)}{P(Z/A_0)}.$$

- Тогда получим следующее выражение для $P(A_0/Z)$:

$$P(A_0/Z) = \frac{P(A_0)}{P(A_0) + L \cdot P(A_1)}.$$

- Проанализируем полученный результат.
- Пусть $P(A_0) = 1$, $P(A_1) = 0$. Тогда апостериорная вероятность $P(A_0/Z) = 1$.
- Если, наоборот, $P(A_0) = 0$, $P(A_1) = 1$, то апостериорная вероятность $P(A_0/Z) = 0$.

- Это означает, что исследуемая система S в первом случае принимает решение A_0, а во втором случае - решение A_1.
- Таким образом, наличие информации Z о результатах опытов не оказывает никакого влияния на процесс принятия решения системы S - система не имеет тенденции к самообучению, а отношение правдоподобия в данном случае не играет роли.
- Если отношение правдоподобия (3.6.9) равно единице $L = 1$, то апостериорная вероятность равна априорной вероятности

  $$P(A_0 / Z) = P(A_0),$$

  следовательно, поступающая информация Z не влияет на принятие решения.
- Чем больше отношение правдоподобия L отличается от единицы, тем в большей степени наблюдается отличие апостериорной и априорной вероятностей, тем сильнее влияние поступающей информации Z на принятие решения A_0.

- При наблюдении за результатами опытов будет накапливаться информация в виде частоты $P^*(A_0/Z)$, которая с ростом числа опытов n будет сходиться по вероятности к вероятности $P(A_0/Z)$. Следовательно, в данном случае накопление информации Z о результатах опытов ***влияет на принятие решения.***
- Таким образом, при отсутствии информации Z о результатах опытов система S руководствуется при принятии решения лишь априорными вероятностями $P(A_0)$ и $P(A_1)$.
- По мере накопления информации Z о результатах опытов система S «самообучается» и корректирует свое поведение в зависимости от Z. Система, "прошедшая обучение", принимает решение, руководствуясь апостериорными вероятностями $P(A_0/Z)$ и $P(A_1/Z)$, которые зависят от Z - информации, получаемой по результатам опытов.

Повторение опытов

- Повторение опытов связано с задачами, в которых осуществляется последовательность независимых опытов, в каждом из которых может произойти (или не произойти) некоторое событие *A*, вероятность которого известна. Задача заключается в определении вероятности появления события *A* ровно *m* раз в *n* независимых опытах, которая в дальнейшем будет обозначаться через $P_{m,n}$ $(m = 0 \ldots n)$.
- Опыты со случайным исходом называются ***независимыми,*** если вероятность исхода того или иного опыта не зависит от исходов других опытов. В противном случае опыты будут ***зависимыми***.
- Рассмотрим ***два случая определения вероятности*** $P_{m,n}$ **.**

- <u>Первый случай</u>
- *Независимые опыты проводятся в одинаковых условиях,* поэтому вероятность появления события A в каждом опыте одинакова и равна $P(A) = p$, а вероятность непоявления события A (появления противоположного события A) равна

$$P(A) = 1 - p = q \ .$$

- Такая последовательность опытов (испытаний) носит название *"испытания Бернулли"*. Требуется определить вероятность $P_{m,n}$ появления события A ровно m раз в n опытах $(m = 0, \ldots, n)$.
- ***<u>Примеры задач, связанных с испытаниями Бернулли.</u>***
- 1. Производится n бросаний симметричной монеты на гладкую поверхность стола. При каждом бросании герб (цифра) может появиться с одной и той же вероятностью $p = 0{,}50$. Требуется определить вероятность $P_{m,n}$ появления герба (цифры) ровно m раз из n бросаний $(m = 0, \ldots, n)$.

- 2. Производятся стендовые испытания n однотипных агрегатов на надежность в течение времени t. Вероятность безотказной работы одного агрегата $p(t)$ известна и одинакова для всех агрегатов.

  Требуется определить вероятность $P_{m,n}$ того, что все n агрегатов успешно пройдут стендовые испытания.
- 3. Производится стрельба в тире по мишени n выстрелами с индивидуальным прицеливанием при каждом выстреле с одной дистанции. Вероятность попадания в "десятку" для данного стрелка оценивается величиной p.

  Требуется определить вероятность $P_{m,n}$ попадания в "десятку" m раз при n выстрелах $(m = 0...n)$.
- ***Вероятность $P_{m,n}$ появления события А m раз в n независимых опытах определяется выражением (формулой Бернулли)***

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad m = 0,\ldots,n$$

- **Пример.** Производятся четыре независимых опыта, в каждом из которых с вероятностью p = 0,60 может произойти событие A. Определить вероятность появления события A не менее трех раз.
- ***Решение***. Обозначим B - событие, состоящее в появлении события A не менее трех раз в четырех независимых опытах. Тогда вероятность события B определяется как сумма вероятностей появления события A три или четыре раза:

$$P(B) = P_{3,4}+P_{4,4}.$$

- По формуле Бернулли получим решение задачи:

$$P(B) = C_4^3 p^3 q + p^4 = 4 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 + 0{,}6^4 = 0{,}476.$$

- **Пример.** Монета бросается пять раз. Какова вероятность того, что число выпавших гербов будет больше числа выпавших цифр?
- **Решение.**
- Обозначим *A* искомое событие - число выпавших гербов больше числа цифр при пяти бросаниях монеты. Для выполнения события *A* необходимо, чтобы число гербов при пяти бросаниях монеты было 3, 4 или 5 (при этом цифр будет соответственно 2, 1 или 0).
- По формуле Бернулли получим

$$P(A) = P_{3,5} + P_{4,5} + P_{5,5} = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q + p^5 =$$

$$= 10 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2 + 5 \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^5 = 0{,}5$$