21.7.Линейные ДУ второго по

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка (ЛДУ) называется уравнение вида

$$y'' + p(x)\cdot y' + g(x)\cdot y = f(x)$$

Где *y* – искомая функция, *p(x)*, *g(x)*, *f(x)* – функции, непрерывные на некотором интервале *(a,b)*.

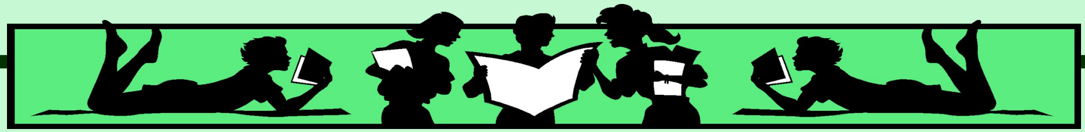
Если f(x)=0, то уравнение называется линейным однородным.

Если f(x) не равно 0, то уравнение называется линейным неоднородным.

Если разрешить это уравнение относительно второй производной, то оно будет являться частным случаем уравнения

$$y'' = f(x, y, y')$$

и будет удовлетворять условиям теоремы Коши. Поэтому для любых начальных условий это уравнение имеет единственное решение задачи Коши.



А

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линейным однородным ДУ второго порядка называется уравнение вида

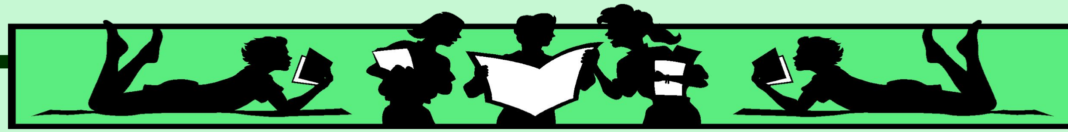
$$y'' + p(x)\cdot y' + g(x)\cdot y = 0$$

ТЕОРЕМА.

Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения уравнения (7). Тогда функция

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

тоже будет решением этого уравнения при любых значениях постоянных C_1 и C_2.



Доказательство:

Найдем первую и вторую производные от этой функции:

$$y' = C_1 \cdot y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x)$$

$$y'' = C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x)$$

и подставим их в исходное уравнение (7):

$$C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x) + p(x) \cdot (C_1 \cdot y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x)) +$$

$$+ g(x)(C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)) =$$

$$= C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x) + p(x) \cdot C_1 \cdot y_1'(x) +$$

$$+ p(x) \cdot C_2 \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot C_1 \cdot y_1(x) + g(x) \cdot C_2 \cdot y_2(x) =$$

$$= C_1 \cdot (y_1''(x) + p(x) \cdot y_1'(x) + g(x) \cdot y_1(x)) +$$

$$+ C_2 \cdot (y_2''(x) + p(x) \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot y_2(x)) = 0$$

(поскольку функции *y_1 (x) и y_2 (x)* – решения этого уравнения).

Ранее было введено понятие линейной зависимости векторов. По аналогии можно ввести понятие линейной зависимости функций.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (а,в), если существуют такие числа α_1, α_2, что для любого х из этого интервала выполняется равенство:

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$$

Линейно зависимые функции оказываются пропорциональными, т.е.

$$y_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot y_2(x) \qquad y_2(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot y_1(x)$$

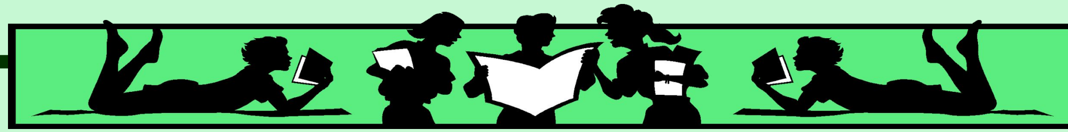
Обратное утверждение тоже верно: если две функции пропорциональны на интервале *(а, в)*, то они линейно зависимы на этом интервале.

Если указанное равенство не выполняется, то функции будут называться линейно независимыми.

Введем для случая двух функций

определитель Врон

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1'$$



ТЕОРЕМА.

Если функции y_1 (x) и y_2 (x) линейно зависимы на интервале (а,в), то определитель Вронского, составленный из них, равен нулю. Если же эти функции линейно независимы, то определитель Вронского отличен от нуля.

Доказательство:

Пусть функции *y_1 (x)* и *y_2 (x)* линейно зависимы на интервале *(а,в)*. Тогда они будут пропорциональны, т.е.

$$y_2 = k \cdot y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2' = k \cdot y_1'$$

Следовательно

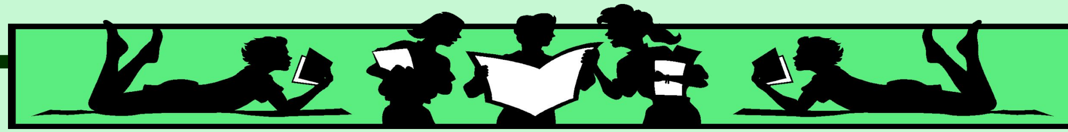
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & k \cdot y_1 \\ y_1' & k \cdot y_1' \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0$$

Вторую часть теоремы докажем от противного: Пусть функции y_1 (x) и y_2 (x) линейно независимы на интервале $(a,в)$. Предположим, что

$$W(x) = 0$$

Тогда его столбцы будут пропорциональны, следовательно, пропорциональны сами функции, и тогда функции должны быть линейно зависимы, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, если функции линейно независимы, то определитель Вронского отличен от нуля.



ТЕОРЕМА.

Пусть решения уравнения (7) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимы на (а,в), тогда функция

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Доказательство:

Функция

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

является решением уравнения (7). Нужно показать, что она представляет собой общее решение, т.е. что из нее можно выделить частное решение, удовлетворяющее любым начальным условиям.

Выберем любые числа

$$x_0 \in (a,b), \quad y_0, \quad y'_0$$

Составим из них начальные условия:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \qquad y'\big|_{x=x_0} = y'_0$$

Подставим в левую часть этих условий функцию

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

Получим систему двух линейных уравнений относительно неизвестных чисел C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1(x_0) + C_2 \cdot y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 \cdot y'_1(x_0) + C_2 \cdot y'_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

есть определитель Вронского.
Поскольку *y_1* и *y_2* – линейно независимы, то

$$W(x) \neq 0$$

и система будет иметь единственное решение

$$C_1 = C_1^0 \qquad C_2 = C_2^0$$

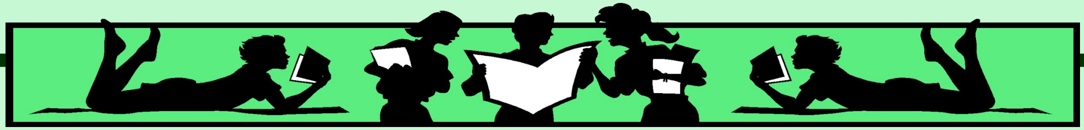
Подставляем эти решения в исходную функцию:

$$y = C_1^0 \cdot y_1(x) + C_2^0 \cdot y_2(x)$$

Получили частное решение, удовлетворяющее произвольно выбранным начальным условиям. Следовательно, функция

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

действительно является общим решением уравнения (7).



ПРИМЕРЫ.

1

Установить, будет ли функция

$$y = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$$

общим решением уравнения

$$y'' + y = 0$$

Решение:

По теореме это решение будет общим, если функции

$$\sin x \quad и \quad \cos x$$

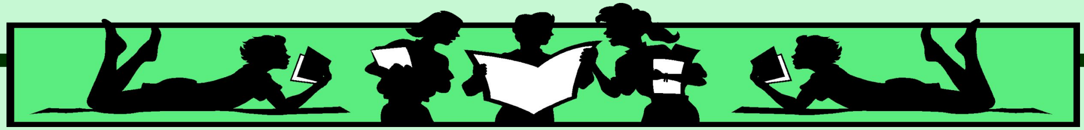
являются решением этого уравнения и будут линейно независимыми.

Проверяем:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\Rightarrow \quad -\sin x + \sin x = 0$$



$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(-\sin x)' = -\cos x$$

$$\Rightarrow \quad -\cos x + \cos x = 0$$

Следовательно, данные функции являются решением этого уравнения. Проверим, будут ли они линейно независимыми.

Вычислим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x = -1 \neq 0$$

Следовательно, данные функции являются линейно независимыми.

Таким образом, функция

$$y = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$$

будет общим решением заданного уравнения.

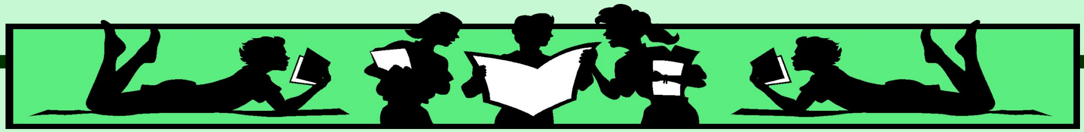
2

Установить, будет ли функция

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

общим решением уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$



Решение:

По теореме это решение будет общим, если функции

$$e^{2x} \quad и \quad e^{3x}$$

являются решением этого уравнения и будут линейно независимыми.

Проверяем:

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$(e^{2x})'' = 4e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad 4e^{2x} - 5 \cdot 2e^{2x} + 6 \cdot e^{2x} = 0$$

$$(e^{3x})' = 3e^{3x}$$

$$(e^{3x})'' = 9e^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad 9e^{3x} - 5 \cdot 3e^{3x} + 6 \cdot e^{3x} = 0$$

Следовательно, данные функции являются решением этого уравнения. Проверим, будут ли они линейно независимыми.

Вычислим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= 3e^{2x} \cdot e^{3x} - 2e^{2x} \cdot e^{3x} \neq 0$$

Следовательно, данные функции являются линейно независимыми.

Таким образом, функция

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

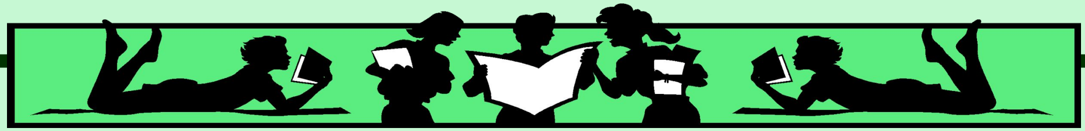
будет общим решением заданного уравнения.

Б

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

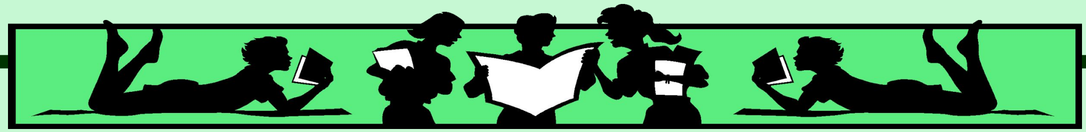
Линейным неоднородным ДУ второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = f(x)$$



ТЕОРЕМА.

Общее решение уравнения (8) состоит из суммы его частного решения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения.



Доказательство:

Пусть

$$\widetilde{y}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

- общее решение соответствующего однородного уравнения (7), и пусть

$$Y(x)$$

- какое-либо частное решение неоднородного уравнения (8).

Сначала покажем, что функция

$$y(x) = Y(x) + \tilde{y}(x)$$

является решением уравнения (8).

$$y'(x) = Y'(x) + \tilde{y}'(x)$$

$$y''(x) = Y''(x) + \tilde{y}''(x)$$

Подставляем в уравнение (8):

$$Y''(x) + \widetilde{y}''(x) + p(x) \cdot Y'(x) + p(x) \cdot \widetilde{y}'(x) +$$

$$+ g(x) \cdot Y(x) + q(x) \cdot \widetilde{y}(x)$$

Учтем, что

$$\widetilde{y}'(x) = C_1 \cdot y_1{}'(x) + C_2 \cdot y_2{}'(x)$$

$$\widetilde{y}''(x) = C_1 \cdot y_1{}''(x) + C_2 \cdot y_2{}''(x)$$

Тогда

$$= Y''(x) + C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x) + p(x) \cdot Y'(x) +$$

$$+ p(x) \cdot C_1 \cdot y_1'(x) + p(x) \cdot C_2 \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot Y(x) +$$

$$+ g(x) \cdot C_1 \cdot y_1(x) + q(x) \cdot C_2 \cdot y_2(x) =$$

$$= \left[Y''(x) + p(x) \cdot Y'(x) + g(x) \cdot Y(x) \right] +$$

$$\left[C_1 \cdot y_1''(x) + p(x) \cdot C_1 \cdot y_1'(x) + g(x) \cdot C_1 \cdot y_1(x) \right] +$$

$$+ \left[C_2 \cdot y_2''(x) + p(x) \cdot C_2 \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot C_2 \cdot y_2(x) \right] =$$

$$= f(x)$$

Таким образом, функция

$$y(x) = Y(x) + \tilde{y}(x)$$

является решением уравнения (8).

Теперь нужно показать, что она является общим решением этого уравнения.

Рассмотрим разность

$$y(x) - Y(x)$$

где *y(x)* – любое решение уравнения (8). Эта разность является решением однородного уравнения

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0$$

Поскольку

$$(y(x) - Y(x))' = y'(x) - Y'(x)$$

$$(y(x) - Y(x))'' = y''(x) - Y''(x)$$

Подставляем в это уравнение:

$$y''(x) - Y''(x) + p(x) \cdot y'(x) -$$

$$- p(x) \cdot Y'(x) + g(x) \cdot y(x) - g(x) \cdot Y(x) =$$

$$= \left[y''(x) + p(x)\cdot y'(x) + g(x)\cdot y(x)\right] -$$

$$- \left[Y''(x) + p(x)\cdot Y'(x) + g(x)\cdot Y(x)\right] =$$

$$= f(x) - f(x) = 0$$

Следовательно, эту разность можно записать в виде частного решения однородного уравнения (7):

$$y(x) - Y(x) = C_1^0 \cdot y_1(x) + C_2^0 \cdot y_2(x)$$

Таким образом, любое решение уравнения (8) можно получить по формуле:

$$y(x) = Y(x) + \tilde{y}(x)$$

путем подбора произвольных постоянных

$$C_1 \quad и \quad C_2$$

Это и означает, что данная функция является общим решением неоднородного уравнения.

Таким образом, чтобы найти общее решение неоднородного уравнения (8) нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения (7), а затем – какое-либо частное решение неоднородного уравнения, и эти решения сложить.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения используется

метод вариации постоя

Пусть

$$\tilde{y}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

- общее решение однородного уравнения (7). Будем считать, что частное решение неоднородного уравнения (8) имеет такой же вид, но произвольные постоянные C_1 и C_2 сами являются функциями от *x*:

$$C_1 = C_1(x) \qquad C_2 = C_2(x)$$

Тогда

$$Y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

Дифференцируем это равенство:

$$Y'(x) = C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_1(x) \cdot y_1'(x) +$$

$$+ C_2'(x) \cdot y_2(x) + C_2(x) \cdot y_2'(x)$$

Положим функции

$$C_1 = C_1(x) \qquad C_2 = C_2(x)$$

такими, что выполняется равенство:

$$C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0$$

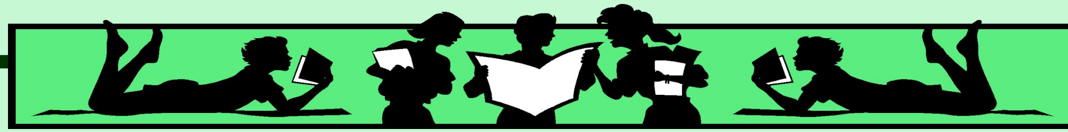
Тогда

$$Y'(x)=C_1(x)\cdot y_1'(x)+C_2(x)\cdot y_2'(x)$$

Находим вторую производную:

$$Y''(x)=C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_1(x)\cdot y_1''(x)+$$

$$+C_2'(x)\cdot y_2'(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x)$$



Подставляем найденные производные в уравнение (8):

$$C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)+$$
$$+C_2(x)\cdot y_2''(x)+p(x)\cdot C_1(x)\cdot y_1'(x)+$$
$$+p(x)\cdot C_2(x)\cdot y_2'(x)+g(x)\cdot C_1(x)\cdot y_1(x)+$$
$$+g(x)\cdot C_2(x)\cdot y_2(x)=f(x)$$

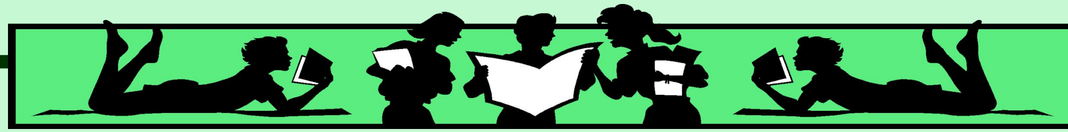
Перегруппируем слагаемые с $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x)\cdot\left(y_1''(x)+p(x)\cdot y_1'(x)+g(x)\cdot y_1(x)\right)+$$

$$+C_2(x)\cdot\left(y_2''(x)+p(x)\cdot y_2'(x)+g(x)\cdot y_2(x)\right)+$$

$$+C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x)$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения однородного уравнения (7), то выражения в скобках равны нулю, следовательно:



$$C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x)$$

Объединим его с равенством

$$C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x) \\ C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0 \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

есть определитель Вронского.

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимы, то

$$W(x) \neq 0$$

и система будет иметь единственное решение

$$C_1'(x) = \varphi_1(x) \qquad C_2'(x) = \varphi_2(x)$$

Интегрируем эти выражения, получим

$$C_1 = C_1(x) \qquad C_2 = C_2(x)$$

Подставляем их в выражение

$$Y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

и получаем частное решение неоднородного уравнения.

ПРИМЕР.

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = x$$

Решение:

Рассмотрим однородное уравнение:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Ранее было показано, что его общее решение

$$\tilde{y} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$Y = C_1(x) \cdot e^{2x} + C_2(x) \cdot e^{3x}$$

$$Y' = C_1'(x)\cdot e^{2x} + C_1(x)\cdot 2e^{2x} + C_2'(x)\cdot e^{3x} + C_2(x)\cdot 3e^{3x}$$

Пусть

$$C_1'(x)\cdot e^{2x} + C_2'(x)\cdot e^{3x} = 0$$

Тогда

$$Y' = C_1(x)\cdot 2e^{2x} + C_2(x)\cdot 3e^{3x}$$

$$Y'' = C_1'(x)\cdot 2e^{2x} + C_1(x)\cdot 4e^{2x} + C_2'(x)\cdot 3e^{3x} + C_2(x)\cdot 9e^{3x}$$

Подставляем в уравнение:

$$C_1'(x)\cdot 2e^{2x}+\cancel{4C_1(x)\cdot e^{2x}}+3C_2'(x)\cdot e^{3x}+$$

$$+\cancel{9C_2(x)\cdot e^{3x}}-\cancel{10C_1(x)\cdot e^{2x}}-\cancel{15C_2(x)\cdot e^{3x}}+$$

$$+\cancel{6C_1(x)\cdot e^{2x}}+\cancel{6C_2(x)\cdot e^{3x}}=x$$

Получаем:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{2x}+C_2'(x)\cdot e^{3x}=0 \\ 2C_1'(x)\cdot e^{2x}+3C_2'(x)\cdot e^{3x}=x \end{cases}$$

Первое уравнение умножаем на 2 и вычтем его из второго:

$$3C_2'(x)\cdot e^{3x}-2C_2'(x)\cdot e^{3x}=x$$

$$C_2'(x)=x\cdot e^{-3x}$$

Теперь подставляем в первое уравнение:

$$C_1'(x)\cdot e^{2x}+x\cdot e^{-3x}\cdot e^{3x}=0$$

$$C_1'(x)=-x\cdot e^{-2x}$$

Интегрируем эти выражения:

$$C_1(x) = -\int x \cdot e^{-2x} dx = \left| \begin{array}{ll} x = u & dx = du \\ e^{-2x} dx = dv & v = -\dfrac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2x} \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

$$C_2(x)=\int x\cdot e^{-3x}dx=\left|\begin{matrix} x=u & dx=du \\ e^{-3x}dx=dv & v=-\dfrac{1}{3}e^{-3x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

При интегрировании можно опустить произвольные постоянные т.к. мы ищем любое частное решение уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$Y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2x}\cdot e^{2x}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdot e^{-3x}\cdot e^{3x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\left(x+\frac{5}{6}\right)$$

Складываем это частное решение и общее решение однородного уравнения, получаем общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}+\frac{1}{6}\left(x+\frac{5}{6}\right)$$