



Основы математическо й логики

A decorative graphic in the top-left corner featuring four white light bulbs with black bases and smiling faces, and a large glowing orange and yellow sphere below them.

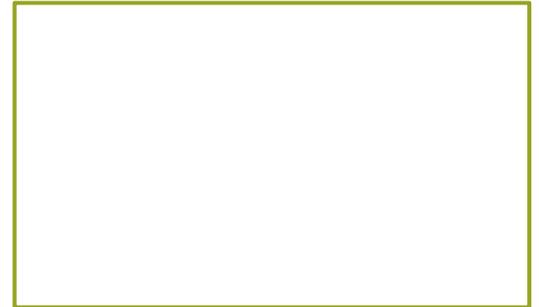
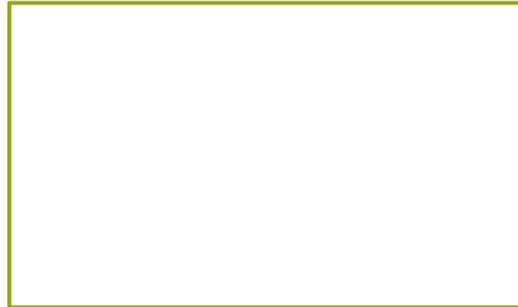
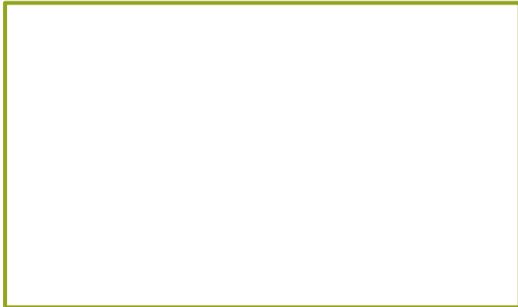
Изучаемые вопросы

1. Формы мышления. Алгебра высказываний.
2. Логические выражения и функции.
3. Основные законы алгебры логики.
4. Примеры решения задач.

**Формы мышления.
Алгебра высказываний.**

Логика, как и теория алгоритмов – является теоретической основой современных ЭВМ и программирования.

Слово «логика» в широком смысле означает науку о правилах рассуждений, а в узком смысле – совокупность правил, которым подчиняется процесс мышления.



Понятие — это мысль, в которой обобщаются отличительные свойства.

Примеры: *портфель, трапеция, ураганный ветер.*

Понятие имеет две стороны: *содержание* и *объем*.

Содержание понятия составляет совокупность существенных признаков объекта. Чтобы раскрыть содержание понятия, следует найти признаки, необходимые и достаточные для выделения данного объекта из множества других объектов.

Объем понятия определяется совокупностью предметов, на которую оно распространяется.

СУЖДЕНИЕ – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается об объектах, их свойствах и отношениях.

Суждениями обычно являются повествовательными предложениями, которые могут быть или истинными или ложными.

«Берн — столица Франции»,

«Река Кубань впадает в Азовское море»,

« $3 \times 5 = 10$ »

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ – это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких истинных суждений, называемых посылками, мы по определенным правилам вывода получаем новое суждение (заключение).

Все металлы - простые вещества. Литий - металл. → Литий - простое вещество.

Математическая логика является специальным математическим аппаратом, который лежит в основе работы логических схем и устройств персонального компьютера.

Математическая логика изучает вопросы применения математических методов для решения логических задач и построения логических схем.

Знание логики необходимо при разработке алгоритмов и программ, так как в большинстве языков программирования есть логические операции.

Алгебру логики иначе называют алгеброй высказываний.

Суждения и утверждения в математической логике называют высказываниями и предикатами.

Высказывания – это конкретные частные утверждения.

Предикаты – это утверждение о переменных, истинность предикатов зависит от значений, входящих в них переменных.

Пример высказываний: « $5+7=12$ », « 5 – четное число»

Пример предикатов: « $x+y>0$ », « N – число четное».

ВЫСКАЗЫВАНИЕ - это повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно.

Например:

Земля - планета Солнечной системы. (Истинно)

$2+8<5$ (Ложно)

$5 \cdot 5=25$ (Истинно)

Всякий квадрат есть параллелограмм (Истинно)

Каждый параллелограмм есть квадрат (Ложно)

$2 \cdot 2 = 5$ (Ложно)

Не всякое предложение является высказыванием:

1) Восклицательные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

- “Какого цвета этот дом?”

- “Пейте томатный сок!”

- “Стоп!”

2) Не являются высказываниями и определения.

“Назовем медианой отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны”.

Определения не бывают истинными или ложными, они лишь фиксируют принятое использование терминов.

Высказывания могут быть *простыми и сложными*.

Высказывание считается простым, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание

Некоторые высказывания можно разложить на отдельные части, при этом каждая такая часть будет самостоятельным высказыванием. Например, высказывание “Сегодня в 4 часа дня я был в школе, а к 6 часам вечера пошел на каток” состоит из 2 частей. Высказывание может состоять и из большего количества частей.

Высказывание, которое можно разложить на части, будем называть сложным, а неразложимое далее высказывание - простым.

Сложное высказывание получается путем объединения простых высказываний *логическими связками* — **НЕ, И, ИЛИ**. Значение истинности сложных высказываний зависит от истинности входящих в них простых высказываний и объединяющих их связок.

Например, даны простые высказывания:

На улице идет дождь.

На улице светит солнце.

На улице пасмурная погода.

Составим из них сложные высказывания:

*На улице идет дождь **и** на улице светит солнце.*

*На улице светит солнце **или** на улице пасмурная погода.*

В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, истинно оно или ложно. Поэтому высказывание можно представить некоторой переменной величиной, значением которой может быть только 0 или 1. Если высказывание истинно, то его значение равно 1, если ложно - 0.

Простые высказывания называли *логическими переменными* и для простоты записи их обозначают латинскими буквами: $A, B, C...$

Луна является спутником Земли. $A = 1$

Москва – столица Германии. $B = 0$

Сложные высказывания называются *логическими функциями*. Значения логической функции также может принимать значения только 0 или 1.

Базовые логические операции

Над высказываниями можно производить определенные **логические операции**, в результате которых получаются **новые, составные высказывания**.

Для образования новых высказываний наиболее часто используются базовые логические операции, выражаемые с помощью логических связок «и» (логическое умножение (конъюнкция)), «или» (логическое сложение (дизъюнкция)), «не» (логическое отрицание (инверсия)).

КОНЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ)

- соответствует союзу И
- обозначается знаком $\&$ или \wedge , или \cdot

Конъюнкция двух логических переменных истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Это определение можно обобщить для любого количества логических переменных, объединенных конъюнкцией. $A \& B \& C=1$, только если $A=1, B=1, C=1$.

Таблица истинности конъюнкции имеет следующий вид:

A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример.

Высказывание A: 8 делится на 2.

Высказывание B: 8 делится на 4.

Высказывание $A \wedge B$:

8 делится на 2 и 8 делится на 4.

ДИЗЬЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ)

- соответствует союзу ИЛИ
- обозначается знаком \vee или + или |

Дизъюнкция двух логических переменных ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Это определение можно обобщить для любого количества логических переменных, объединенных дизъюнкцией. $A \vee B \vee C = 0$, только если $A=0, B=0, C=0$.

Таблица истинности дизъюнкции имеет следующий вид:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример

Высказывание A: Москва – столица России.

Высказывание B: Киев – столица России.

Высказывание $A \vee B$:

Москва – столица России или Киев – столица России.

ИНВЕРСИЯ (ОТРИЦАНИЕ)

- соответствует частице НЕ
- обозначается черточкой над именем переменной или знаком \neg перед переменной

Инверсия логической переменной истинна, если сама переменная ложна, и, наоборот, инверсия ложна, если переменная истинна.

Таблица истинности инверсии имеет вид:

A	\bar{A}
0	1
1	0

Высказывание A : Сегодня по расписанию будут занятия по математике.

Высказывание \bar{A} : Сегодня по расписанию не будет занятий по математике

Сложные высказывания можно представить в виде логического выражения или формулы, состоящей из логических переменных, которые обозначают высказывания, и знаков логических операции.

Логические операции выполняются в следующем порядке:

1. инверсия
2. конъюнкция
3. дизъюнкция

Скобки позволяют это порядок изменить.

Таблицы истинности можно построить для каждого логического выражения. Она определяет его значение при всех возможных комбинациях значений логических переменных.

1. Записать выражение и определить порядок выполнения операций.
2. Количество строк N в таблице истинности равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных n , и определяются по формуле $N=2^n$;
3. Количество столбцов в таблице истинности равно количеству логических переменных плюс количество операций;
4. Построить таблицу истинности с необходимым количеством строк и столбцов и записать значение исходных логических переменных;
5. Заполнить таблицу истинности по столбцам в соответствии с таблицами истинности.

Например, построим таблицу истинности для логической функции:

$$F(A, B, C) = \bar{A} \& (B \vee C)$$

1. Количество входных переменных в заданном выражении равно трем (A, B, C). Значит, количество входных наборов, а значит и строк $Q=2^3=8$.

2. Количество столбцов равно 6 (3 переменные + 3 операции).
Столбцы таблицы истинности соответствуют значениям исходных выражений A, B, C , промежуточных результатов \bar{A} и $(B \vee C)$, а также искомого окончательного значения сложного арифметического выражения $\bar{A} \& (B \vee C)$

A	B	C	\bar{A}	B V C	$\bar{A} \& (B \vee C)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

A	B	C	\bar{A}	B V C	$\bar{A} \& (B \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Задание 1. Постройте таблицу истинности для данного логического выражения:

$$(A \vee B) \& (\bar{A} \vee B)$$

$$(A \vee B) \& (\bar{A} \vee B)$$

A	B	$A \vee B$	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$	$(A \vee B) \& (\bar{A} \vee B)$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Равносильные логические выражения - логические выражения, у которых совпадают последние столбцы таблиц истинности.

Составное высказывание можно рассматривать как некую логическую функцию.

Например: $\overline{A} \& \overline{B} = \overline{A \vee B}$

Логические выражения и функции

Выше были рассмотрены функции двух аргументов: логическое умножение $F(A, B) = A \& B$, логическое сложение $F(A, B) = A \vee B$, а также логическое отрицание $F(A) = \neg A$, в котором значение второго аргумента можно считать равным нулю.

Логическая функция двух аргументов имеет четыре возможных набора исходных значений этих аргументов, то есть существует 16 различных логических функций двух аргументов.

Аргументы		Логические функции															
<i>A</i>	<i>B</i>	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Легко заметить, что здесь логическая функция F_2 является функцией логического умножения, F_8 — функцией логического сложения, F_{13} — функцией логического отрицания для аргумента A и F_{11} — функцией логического отрицания для аргумента B .

В обыденной и научной речи кроме базовых логических связок «и», «или», «не» используются и некоторые другие: «если... то...», «... тогда и только тогда, когда...» и др. Некоторые из них имеют свое название и свой символ, и им соответствуют определенные логические функции.

ИМПЛИКАЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ)

- Импликация двух высказываний A и B соответствует союзу «ЕСЛИ...ТО».
- Запись $A \rightarrow B$ читается как «из A следует B »
- Импликация двух высказываний истинна всегда, кроме случая, если первое высказывание истинно, а второе ложно.

Таблица истинности импликации двух суждений A и B такова:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО, ФУНКЦИЯ ТОЖДЕСТВА)

- Она обозначается символами \equiv или \Leftrightarrow . («тогда и только тогда»).
- Запись $A \equiv B$ читается как «А эквивалентно В».
- Эквивалентность двух высказываний истинна только в тех случаях, когда оба высказывания ложны или оба истинны.

Таблица истинности эквивалентности двух суждений А и В такова:

A	B	A \equiv B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В алгебре высказываний все логические функции могут быть сведены путём логических преобразований к трём базовым логическим операциям: инверсии, дизъюнкции и конъюнкции.

Основные законы алгебры логики

Равносильности формул логики высказываний часто называют **законами логики**. Законы логики отражают наиболее важные закономерности логического мышления.

В алгебре высказываний законы логики записываются в виде формул, которые позволяют проводить эквивалентные преобразования логических выражений в соответствии с законами логики.

Знание законов логики позволяет проверять правильность рассуждений и доказательств. Нарушения этих законов приводят к логическим ошибкам и вытекающим из них противоречиям.

1. Закон тождества. Всякое высказывание тождественно самому себе:

$$A = A$$

Закон тождества утверждает, что мысль, заключенная в некотором высказывании, остается неизменной на протяжении всего рассуждения, в котором это высказывание фигурирует.

2. Закон непротиворечия. Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание A — истинно, то его отрицание *не* A должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно:

$$\bar{A} \& A = 0$$

Закон непротиворечия говорит о том, что никакое предложение не может быть истинно одновременно со своим отрицанием.

“Это яблоко спелое” и “Это яблоко не спелое”

3. Закон исключенного третьего. Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение истина:

$$A \vee \bar{A} = 1$$

Закон исключенного третьего говорит о том, что для каждого высказывания имеются лишь две возможности: это высказывание либо истинно, либо ложно. Третьего не дано.

“Сегодня я получу 5 либо не получу”.

Истинно либо суждение, либо его отрицание.

4. Закон двойного отрицания. Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Закон двойного отрицания. Отрицать отрицание какого-нибудь высказывания - то же, что утверждать это высказывание.

5. Законы идемпотентности. В алгебре логики нет показателей степеней и коэффициентов.

Конъюнкция одинаковых «сомножителей» равносильна одному из них:

$$A \& A = A$$

Дизъюнкция одинаковых «слагаемых» равносильна одному:

$$A \vee A = A$$

6. Законы де Моргана:

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Смысл законов де Моргана можно выразить в кратких словесных формулировках:

- отрицание логической суммы эквивалентно логическому произведению отрицаний слагаемых;
- отрицание логического произведения эквивалентно логической сумме отрицаний множителей.

7. Правило коммутативности. В обычной алгебре слагаемые и множители можно менять местами. В алгебре высказываний можно менять местами логические переменные при операциях логического умножения и логического сложения:

Логическое умножение:

$$A \& B = B \& A$$

Логическое сложение:

$$A \vee B = B \vee A$$

8. Правило ассоциативности. Если в логическом выражении используются только операция логического умножения или только операция логического сложения, то можно пренебрегать скобками или произвольно их расставлять:

Логическое умножение:

$$(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$$

Логическое сложение:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

9. Правило дистрибутивности. В отличие от обычной алгебры, где за скобки можно выносить только общие множители, в алгебре высказываний можно выносить за скобки, как общие множители, так и общие слагаемые:

Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(A \& B) \vee (A \& C) = A \& (B \vee C)$$

Дистрибутивность сложения относительно умножения:

$$(A \vee B) \& (A \vee C) = A \vee (B \& C)$$

10. $A \& 1 = A$

$$A \& 0 = 0$$

11. $A \vee 1 = 1$

$$A \vee 0 = A$$

12. Законы поглощения:

$$A \& (A \vee B) = A$$

$$A \vee (A \& B) = A \& B$$

РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Какое из предложений является высказыванием:

а) Не можете ли вы передать мне соль?

б) Некоторые лекарства опаснее самих болезней.

в) Сегодня солнечно.

2. Составьте отрицания к данным высказываниям:

- а) Все дни в августе были солнечными
- б) Не все птицы летают
- в) Все растения съедобные

3. Какие из предложений являются высказываниями? Определите их истинность или ложность:

- 1) Петербург – столица нашей Родины.
- 2) Собака – хищное животное.
- 3) Я поступил в университет.
- 4) Как твои дела?
- 5) Мы сегодня встретимся?
- 6) Летом я отдыхал на море.

4. Постройте таблицу истинности для логического выражения

$$\mathbf{A \& B \vee \neg A \& \neg B.}$$

5. Постройте таблицу истинности для логических выражений:

1) $A \& B \vee \neg A \& \neg B,$

2) $(\neg X \vee Z) \wedge (Y \vee Z);$

3) $X \vee Y \wedge Z;$

4) $X \wedge Y \vee Z \wedge T;$

5) $(X \wedge \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Z);$

6) $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \vee \neg Y \wedge (Z \vee \neg Y);$

7) $X \vee Y \vee Z;$

8) $(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee T) \wedge (Z \vee T);$

9) $X \vee Y \vee Z \vee S \vee T;$

10) $\neg X \vee X \wedge Y \vee Y \wedge Z \vee Z \wedge T;$