

FUNKCJE

(Analiza Matematyczna 1, wykład 2)

X, Y - niepuste zbiory.

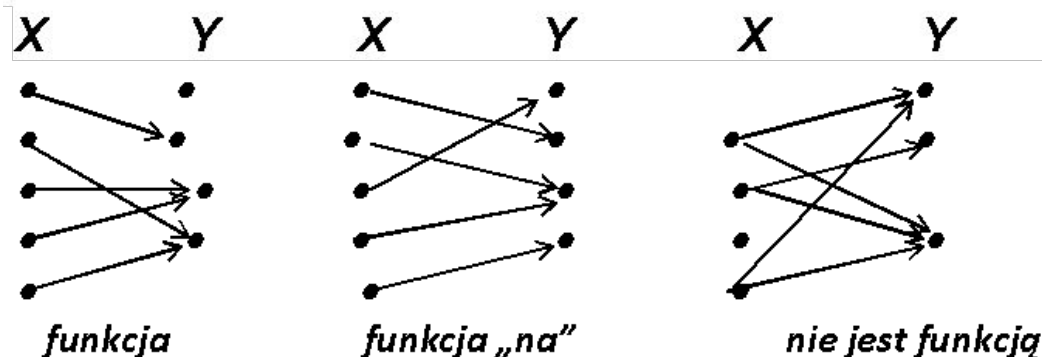
Funkcja (odwzorowanie, przekształcenie)

$$f: X \rightarrow Y$$

przyporządkowuje, każdemu elementowi zbioru X dokładnie jeden element zbioru Y .

Zbiór X jest *dziedziną*, a Y *zbiorem wartości* funkcji f .

Jeżeli $y_0 = f(x_0)$, to x_0 jest *argumentem*, a y_0 *wartością* funkcji f w punkcie x_0 .



Jeżeli $f(x_0) = 0$, to x_0 jest *miejscem zerowym* funkcji f .

Uwaga.

Wykład jest poświęcony funkcją rzeczywistym zmiennej rzeczywistej, tj.

$$f: X \rightarrow Y, \text{ gdzie } X, Y \subseteq \mathbb{R}.$$

Wykresem funkcji f jest zbiór punktów płaszczyzny (podzbiór produktu kartezjańskiego $R \times R$)

$$\{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Funkcja f na zbiorze A jest:

$$1^0 \text{ *rosnąca* } \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

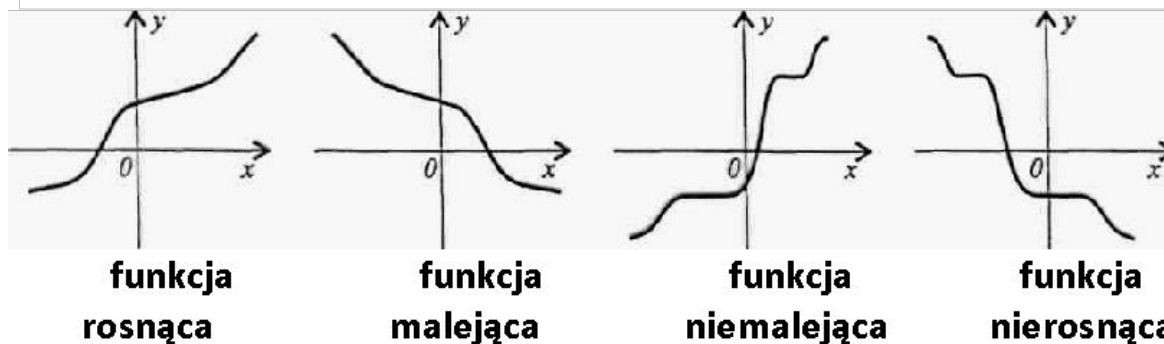
$$2^0 \text{ *malejąca* } \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

$$3^0 \text{ *niemalejąca* } \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

$$4^0 \text{ *nierosnąca* } \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$

W szczególności funkcje rosnące albo malejące nazywamy **ściśle monotonicznymi**.

Funkcje monotoniczne (przedziałami monotoniczne)



Własności:

- suma funkcji malejących (rosnących) jest funkcją malejącą (rosnącą). A iloczyn?
- funkcji malejąca (rosnąca) pomnożona przez liczbę dodatnią jest funkcją malejącą (rosnącą).
- funkcja malejąca (rosnąca) pomnożony przez liczbę ujemną jest funkcją rosnącą (malejącą).

Funkcję $f(x)$ jest *różnowartościową*, iff

$$\forall t, u, t \neq u \Rightarrow f(t) \neq f(u)$$

Funkcja rosnąca albo malejąca (ściśle monotoniczna) jest różnowartościowa.

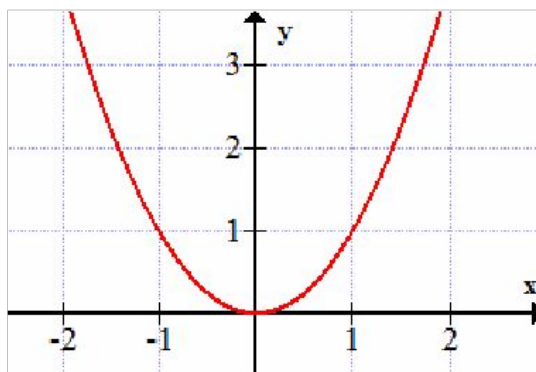
Funkcja f na zbiorze A jest:

1^o **parzystą** $\Leftrightarrow \forall x \in A, (-x \in A \wedge f(-x) = f(x))$

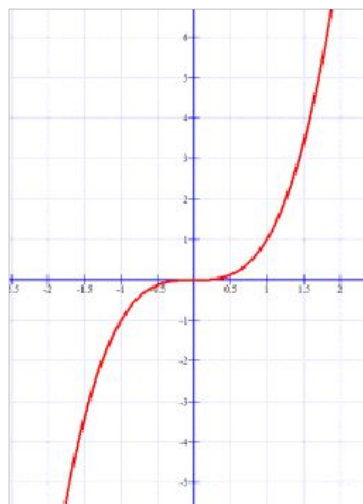
2^o **nieparzystą** $\Leftrightarrow \forall x \in A, (-x \in A \wedge f(-x) = -f(x))$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY , a nieparzystej - względem początku układu współrzędnych.

Przykład. Wykres funkcji



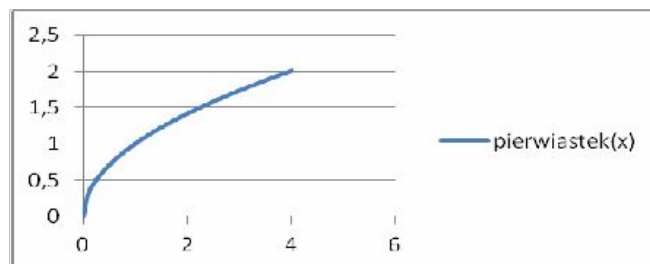
parzystej



nieparzystej

Przykład.

a) $y = f(x) = \sqrt{x}$



Dziedzina: $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty)$, pierwiastek kwadratowy jest określony tylko dla liczb dodatnich oraz zera.

Zbiór wartości $Y = [0, +\infty)$.

Jest funkcją rosnącą oraz różnowartościową

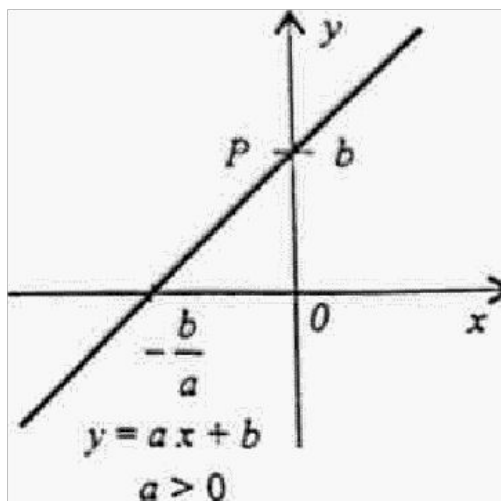
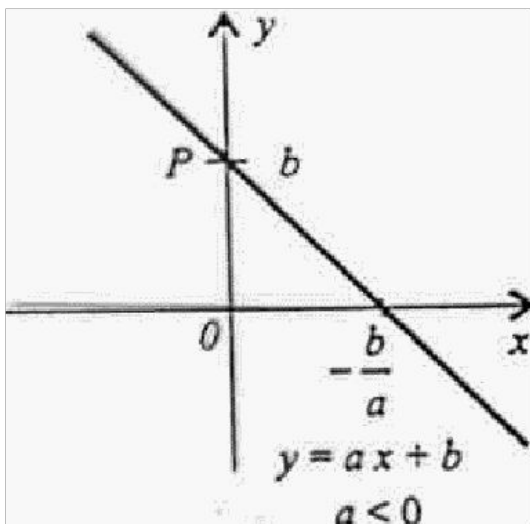
Wobec tego $f : X \rightarrow Y$ jest wzajemnie jednoznaczna (tj. różnowartościowa i na), co zapisujemy

$$f : X \xrightarrow{1-1} Y.$$

Funkcja ta nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

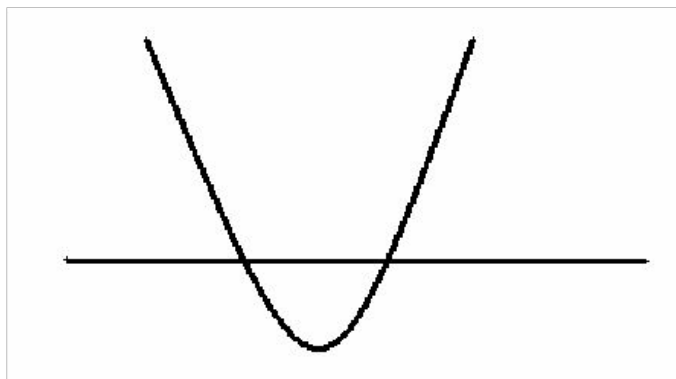
Funkcja liniowa

Funkcja liniowa $f(x)=y = ax + b$



Funkcja kwadratowa

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0.$$



$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$ - dwa pierwiastki rzeczywiste ($\Delta = 0$ - jeden)

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-b}{2a}, \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a}.$$

$a > 0$ - ramiona w górę oraz

- $\Delta > 0$ - parabola przecina oś X w dwóch punktach,
- $\Delta = 0$ - wierzchołek styczny do osi X ,
- $\Delta < 0$ - wierzchołek powyżej osi X .

$a < 0$ - ramiona w dół oraz

- $\Delta > 0$ - parabola przecina oś X w dwóch punktach,
- $\Delta = 0$ - wierzchołek styczny do osi X ,
- $\Delta < 0$ - wierzchołek poniżej osi X .

Wielomiany

Wielomianem stopnia n jest funkcja postaci:

$$W_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

Liczba a jest *pierwiastkiem (zerem)* wielomianu, jeżeli $W_n(a) = 0$, tzn.

$$a_n a^n + \dots + a_1 a + a_0 = 0$$

Przykład.

Liczba $a = -1$ jest pierwiastkiem wielomianu:

$$W(x) = 3x^5 - 9x^2 - 2x + 10,$$

ponieważ $W(-1) = 3(-1)^5 - 9(-1)^2 - 2(-1) + 10 = 0$

Wyznaczanie miejsc zerowych wielomianów (*algorytmy pierwiastkowe*)

- Algorytm Ferro, Tartaglii – *wielomiany stopnia 3*.
- Algorytm Ferrari – *wielomiany stopnia 4*.
- Twierdzenie Nielsa Abela i Evarista Galois – *nie istnieje algorytm pierwiastkowy dla wielomianów stopni $n \geq 5$* .

Funkcje wymierne

Funkcja wymierna jest ilorazem dwóch wielomianów, tj.

$$f(x) = \frac{w_n(x)}{g_m(x)},$$

gdzie $w_n(x)$ i $g_m(x)$ są wielomianami.

Dziedziną jest R oprócz miejsc zerowych wielomianu $g_m(x)$.

Działania na funkcjach, składanie

Funkcję

$$f : X \rightarrow Y,$$

gdzie $X \subset \mathbb{R}$ i $Y \subset \mathbb{R}$ możemy traktować jako

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Jeżeli

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ i } g : X \rightarrow \mathbb{R},$$

to definiujemy ich sumę, iloczyn, iloraz, mnożenie przez stałą, odpowiednio:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{dla } g(x) \neq 0 \text{ oraz } x \in X.$$

Złożenie (superpozycja) funkcji

Mając dwie funkcje $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$, można utworzyć *funkcję złożoną*,

$$(g \circ f) : X \rightarrow Z$$

określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Wtedy f jest funkcją *wewnętrzną*, g - *zewnętrzną*.

Przykład.

Niech

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt[4]{x}, \text{ to}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty) \quad g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty).$$

Wtedy $[1, +\infty) \subset [0, +\infty)$ i

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt[4]{x^2 + 1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcja odwrotna

Dla każdej funkcji wzajemnie jednoznacznej $f : X \xrightarrow{1-1} Y$ można określić funkcję

$f^{-1} : Y \rightarrow X$ taką, że

$$\forall x \in X, (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

którą nazywa się funkcją odwrotną.

Własności funkcji odwrotnej:

$$1^0 \quad (f^{-1})^{-1} = f$$

$$2^0 \quad f^{-1}(f(x)) = x = id_x \text{ dla } x \in X$$

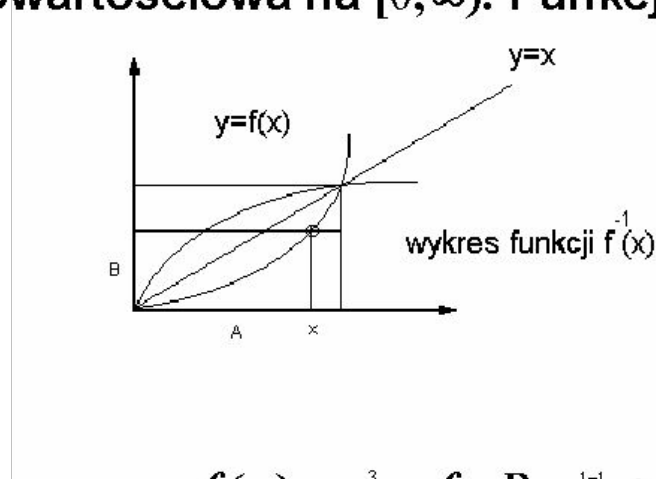
$$3^0 \quad f(f^{-1}(y)) = y = id_y \text{ dla } y \in Y$$

$$4^0 \quad \text{Wykresy } f \text{ i } f^{-1} \text{ są symetryczne względem prostej } y = x.$$

Funkcja f^{-1} jest odwrotną do $f \Leftrightarrow$ spełnione własności 2^0 i 3^0 .

Przykład

$f(x) = x^2$ jest różnowartościowa na $[0, \infty)$. Funkcja odwrotna $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



Przykład

$$f(x) = x^3 \quad f: R \xrightarrow{1-1} R.$$

Wtedy $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ jest funkcją odwrotną funkcji f , bowiem

$$\forall x \in R \wedge y \in R \quad (\sqrt[3]{y} = x \Leftrightarrow x^3 = y)$$

ponieważ

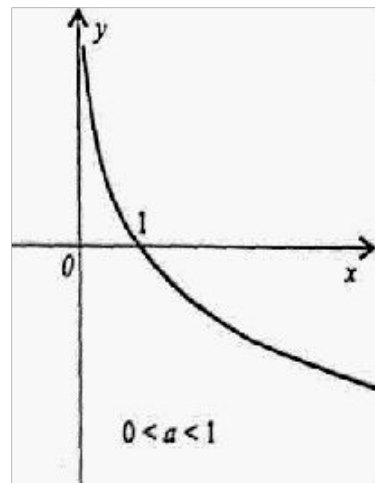
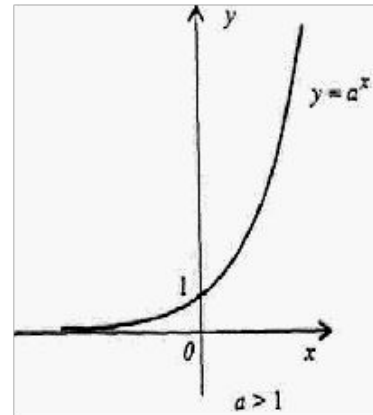
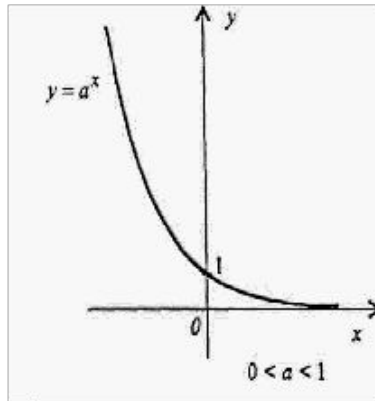
$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x \quad \text{ i } \quad f(f^{-1}(y)) = (\sqrt[3]{y})^3 = (y^{\frac{1}{3}})^3 = y$$

spełnione są więc własności 2^o i 3^o.

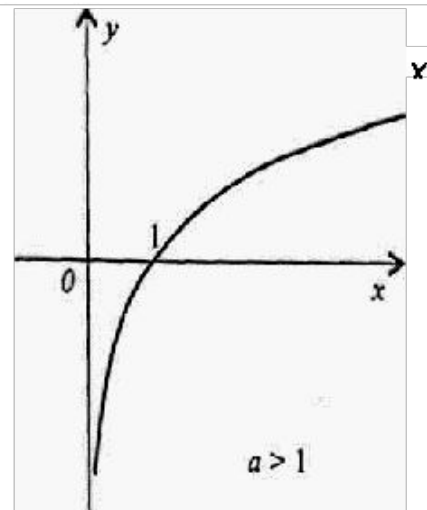
FUNKCJE ELEMENTARNE ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Funkcja wykładnicza $y = f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ gdzie a jest liczbą dodatnią i różną od 1 (dla $a=1$, $y=1^x=1$).

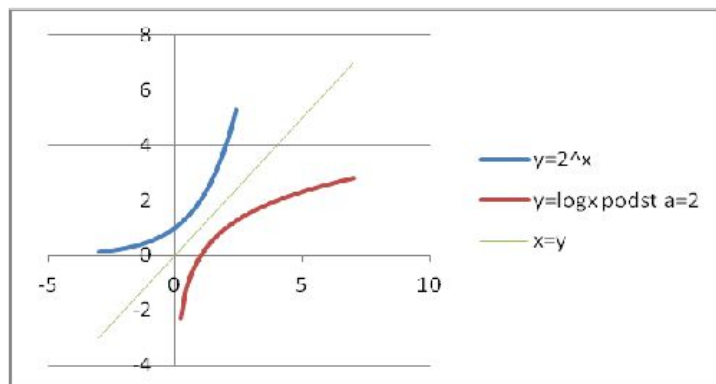


$v =$

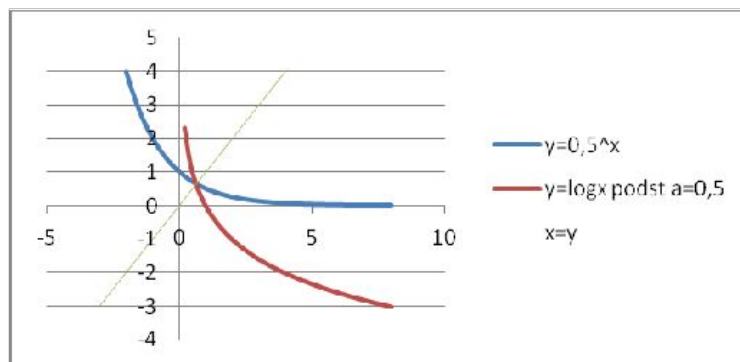


Funkcja wykładnicza $y = a^x$ i logarytmiczna $y = \log_a x$ są względem siebie odwrotne.

Dla $a > 1$, np. $a = 2$.



Dla $0 < a < 1$ np. $a = 0,5$.



Reguły potęgowania: ($a > 0$ i $a \neq 1$):

$$1^\circ \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad 2^\circ \quad a^x a^y = a^{x+y} \quad 3^\circ \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad 4^\circ \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$5^\circ \quad \sqrt[k]{a^x} = a^{\frac{x}{k}} \quad 6^\circ \quad a^x b^x = (ab)^x \quad b > 0, \quad x, y \in R \quad k \in N$$

Reguły logarytmowania:

$$1^\circ \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad 2^\circ \quad \log_a x^y = y \log_a x$$

$$3^\circ \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$4^\circ \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad b > 0 \text{ i } b \neq 1.$$

Złożenie funkcji:

$$1^\circ \quad \log_a a^x = x \quad x \in R \quad 2^\circ \quad a^{\log_a x} = x, \quad x > 0, \quad x \in R$$

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna (moduł) liczby rzeczywistej x

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Z definicji wynika, że $x \leq |x|$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych r, s , zachodzi:

a. $|-r| = |r|$

b. $|s + r| \leq |s| + |r|$

c. $||s| - |r|| \leq |s - r|$

d. $|s - r|$ **jest odległością pomiędzy punktami r oraz s na prostej rzeczywistej**

e. $|r \cdot s| = |r| \cdot |s|$

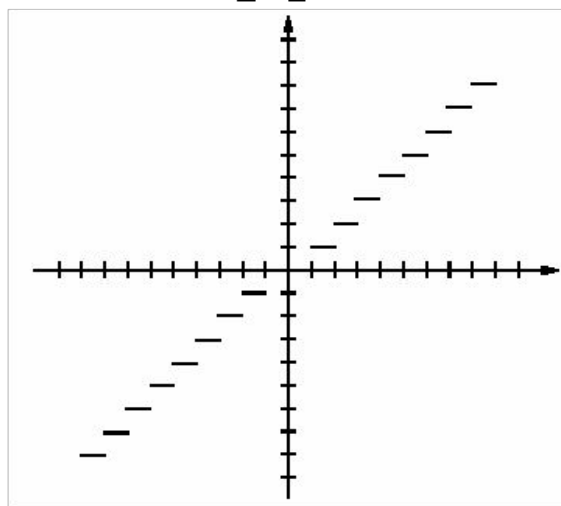
f. $|r| = 0 \Leftrightarrow r = 0$

Funkcje zaokrąglające do liczb całkowitych

Częścią całkowitą liczby rzeczywistej x (*podłoga*):

$\lfloor x \rfloor =$ *największa liczba całkowita n taka, że $n \leq x$*

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x = n + r, 0 \leq r < 1,$$



Powała (sufit) liczby rzeczywistej x :

$\lceil x \rceil =$ *najmniejsza z liczb całkowitych n taka, że $x \leq n$*

$$\left\lceil 3\frac{1}{3} \right\rceil = 4, \quad \left\lfloor 3\frac{1}{3} \right\rfloor = 3, \quad \lceil 5 \rceil = \lfloor 5 \rfloor = 5$$

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$$