

***ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА***

Лекция 1.

Основные изучаемые вопросы:

- **Случайные события.**
- **Понятие вероятности события.**
- **Элементы комбинаторики.**

ВВЕДЕНИЕ

- Все явления окружающей нас действительности можно рассматривать с точки зрения вероятности их наступления в ходе опыта (испытания).
- Под *испытанием* понимают процесс, протекающий при определенных условиях и приводящий к одному из возможных исходов.
- *Исходом опыта* может быть результат наблюдения, измерения, оценки.
- *Элементарным событием* является отдельный, отличающийся от других, исход испытания.
- К примеру, испытание – это выстрел, а исходы (элементарные события) – попадание или промах.

Основные понятия. Алгебра событий

- *Случайное событие* - это любой факт, который может либо произойти, либо не произойти при выполнении некоторого комплекса условий.

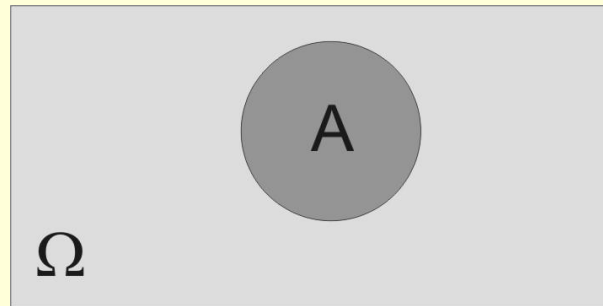


Диаграмма
Эйлера-Венна

- Примеры случайных событий — выпадение «орла» при бросании монеты, попадание в мишень при выстреле, появление туза при вынимании карты из колоды и т. п.
- Обычно случайные события обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B, C, \dots

- Если в каждом испытании с неизбежностью происходит некоторое событие - оно называется *достоверным* (обозначается Ω).
- Если событие заведомо не может произойти при данном комплексе условий (ни при каком испытании) — оно называется *невозможным* (обозначается \emptyset).
- События A и B называются *несовместными* (*несовместимыми*), если появление одного из них исключает появление другого (не могут произойти одновременно).
- События A и B - *совместные* (*совместимые*), если они могут произойти одновременно в результате испытания.
- События A и B - *равновозможные*, если по условиям испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным.

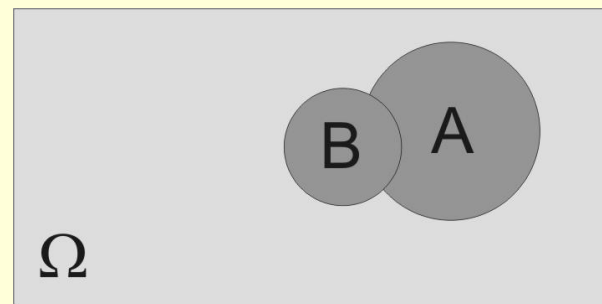
Пример. Рассмотрим случайные события - выпадение определенного числа на верхней грани - которые могут произойти при бросании простого шестигранного игрального кубика.

Введем обозначения случайных событий:

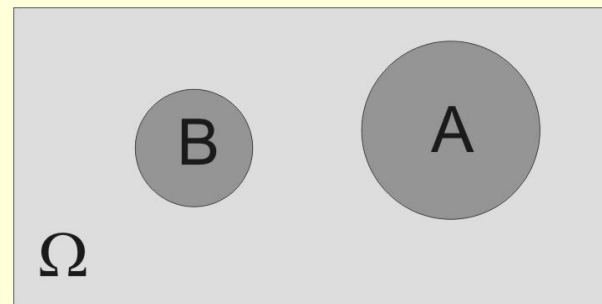
- Ω - выпадение какого-либо числа от 1 до 6 - достоверное событие;
- \emptyset - выпадение числа 7 - невозможное событие;
- A - выпадение числа 2,
- B - выпадение числа 3,
- C - выпадение нечетного числа,
- D - выпадение любого из чисел 1, 3 или 5.
- Тогда события: A и B , A и C , A и D - несовместные; B , C и D - совместные; причем B - частный случай C .
 C и D - равносильные;
 A и B - равновозможные.

В теории вероятностей случайные события рассматриваются с точки зрения теории множеств, что позволяет определить отношения над ними.

- *Суммой событий A и B называют событие $A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий A или B .*
- *Для суммы событий выполняются соотношения:*
 - $A + B = B + A$;
 - $A + \Omega = \Omega$;
 - $A + \emptyset = A$;
 - $A + A = A$.

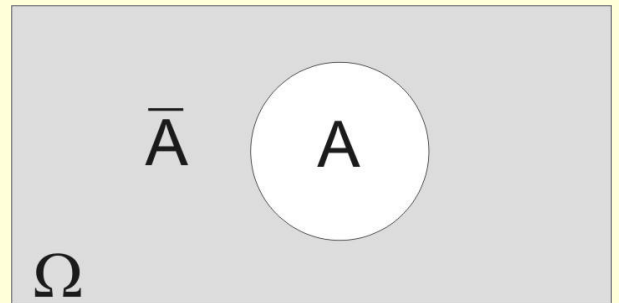
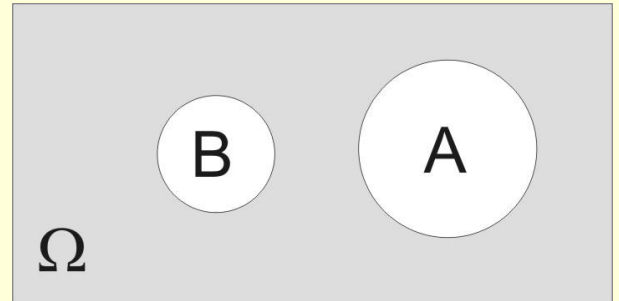
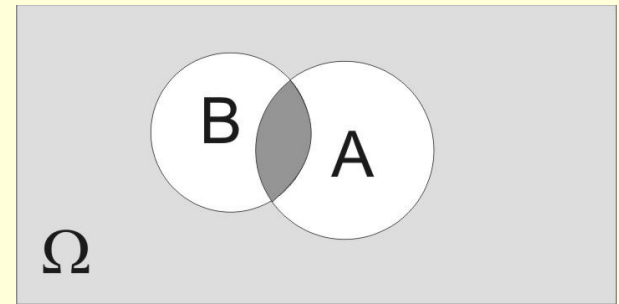


Сумма совместных событий A и B



Сумма несовместных событий A и B

- **Произведением событий**
 A и B называют событие $A \cdot B$, состоящее в одновременном наступлении этих событий.
- Для произведения событий выполняются соотношения:
 - $A \cdot B = B \cdot A$;
 - $A \cdot \Omega = A$;
 - $A \cdot \emptyset = \emptyset$;
 - $A \cdot A = A$.
- Событие \bar{A} называется **противоположным событием** (дополнением) события A , если непоявление одного события влечет появление другого.



- **Пример.** Пусть случайным образом из колоды карт извлекается одна карта. Введем обозначения:
 - событие A - извлечение дамы;
 - событие B - извлечение короля;
 - C - извлечение карты пиковой масти.
- Тогда события: $A + B$ - извлечение дамы или короля любой масти;
- $A \cdot C$ - извлечение пиковой дамы;
- $(A+B) \cdot C$ - извлечение пиковой дамы или пикового короля.

Операции сложения и произведения удовлетворяют свойству дистрибутивности:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$$

$$A + B \cdot C = (A + B)(A+C).$$

Операции над событиями удовлетворяют формулам де Моргана:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

- События образуют *полную группу попарно несовместимых событий*, если любые два из них несовместимы и хотя бы одно непременно должно произойти в результате испытания.
- Следует иметь в виду соотношения:

$$\overline{\overline{A}} = A;$$

$$A + \overline{A} = \Omega;$$

$$A \cdot \overline{A} = \emptyset.$$

- **Пример.** При бросании игрального кубика случайные события $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ - обозначающие соответственно выпадение чисел 1, 2, 3, 4, 5 или 6 - образуют полную группу событий.

События A_1 и A_2 - выпадения четного и нечетного числа - также образуют полную группу событий (и, заметим, являются противоположными).

Примеры для обсуждения

- 1. Какие из предложенных событий являются совместными?
 - а). Опыт - бросание монеты.
События: A - выпала цифра; B - выпал герб;
 - б). Опыт - бросание игральной кости.
События: A - выпадение единицы; B - выпадение тройки;
 C - выпадение четного числа очков;
 - с). Опыт - бросание двух монет.
События: A - хотя бы на 1 из монет выпадет герб; B - на обеих монетах выпадет герб;
 - д). Опыт - два выстрела по мишени.
События: A - есть хотя бы одно попадание; B - ни одного попадания.

- 2. Какие из предложенных событий являются несовместными?
 - a). Опыт - бросание монеты.
События: A - хотя бы на одной монете выпал герб; B - на обеих монетах выпал герб;
 - b). Опыт - два выстрела по мишени.
События: A - хотя бы одно попадание; B - ни одного попадания;
 - c). Опыт - бросание игрального кубика.
События: A - выпадение шестерки; B - выпадение четного числа очков;
 - d). Опыт - сдача экзамена.
События: A - получение оценки «3» на экзамене;
 B - получение оценки ниже оценки «5».

- 3. Какие из предложенных событий образуют полную группу событий?
 - a). Выигрыш по первому билету и проигрыш по второму лотерейному билету при наличии двух лотерейных билетов.
 - b). Два попадания, одно попадание и ни одного попадания при двух выстрелах.
 - c). Появление 1, 2, 3, 4 при бросании игрального кубика.
 - d). Получение оценки «5» и получение оценки 4 «на экзамене».
- 4. Что понимают под суммой двух несовместных событий A и B ?
 - a). Совместное появление событий A и B .
 - b). Появление хотя бы одного из событий A или B .
 - c). Появление либо события A , либо события B .

Классическое определение вероятности

- *Вероятность события - это численная мера объективной возможности его появления.*
- В соответствии с классическим определением, вероятность $P(A)$ события A равняется отношению числа случаев M , благоприятствующих событию A , к общему числу всех возможных исходов испытания N :

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

При этом полагают, что:

- испытание содержит конечное число исходов;
- все исходы испытания равновозможны и несовместны.

Свойства вероятности события

1. *Вероятность любого случайного события есть число от нуля до единицы*, так как число благоприятных исходов не может превышать общего числа исходов испытания ($M < N$):

$$0 < P(A) < 1.$$

2. *Вероятность достоверного события равна 1*, так как все исходы испытания являются благоприятными ($M = N$):

$$P(A) = 1.$$

3. *Вероятность невозможного события равна 0*, так как нет ни одного благоприятного исхода испытания ($M = 0$):

$$P(\emptyset) = 0.$$

Пример. Известно, что среди 25 приборов имеется 5 бракованных. Какова вероятность при случайном отборе взять бракованный?

- ***Решение.***

Множество исходов испытания представляет собой все возможные способы выбора одного прибора из имеющихся 25. Так как отбор случайный, ***все они равновозможны.***

Событие A состоит в том, что отобранный прибор - бракованный. Таким образом общее число вариантов отбора $N = 25$, из них 5 случаев благоприятствуют событию A , т. е. $M = 5$.

Следовательно, в соответствии с классическим определением, вероятность события A составляет:

$$P(A) = 5 / 25 = 0,2.$$

Элементы комбинаторики

- **Комбинаторика** - это раздел математики, изучающий методы решения задач на подсчет числа различных комбинаций.
- В комбинаторике есть два важных правила, часто применяемых при решении комбинаторных задач.

1. Правило умножения комбинаторики

Пусть требуется выполнить одно за другим какие-то k действий, причем первое действие можно выполнить n_1 способами, второе n_2 способами и т. д. до k -го действия, которое можно выполнить n_k способами. Тогда все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

2. Правило сложения комбинаторики.

Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно них можно выполнить n_1 способами, а другое n_2 способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $n_1 + n_2$ способами.

Пример. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров?

• ***Решение.***

Семизначный номер представляет собой комбинацию 7 ячеек, каждую из которых мы можем заполнить одной из имеющихся в нашем распоряжении 10 цифр - 0, 1, 2, ..., 9. Только в первой ячейке не может быть цифры 0 - иначе номер не будет 7-значным (мы не рассматриваем варианты, когда телефонный номер не может начинаться еще на какие-то цифры, например, на 8 в Москве).

Таким образом, 1-ю ячейку мы можем заполнить 9 способами, а 2-ю, 3-ю и т. д. до последней - 10 способами. Следовательно, по правилу умножения, общее число комбинаций будет равно произведению:

$$N = 9 \cdot 10^6 = 9\,000\,000.$$

Пример. Выбрать книгу или диск (один предмет) из 10 книг и 12 дисков можно $N = 10 + 12 = 22$ способами.

Рассмотрим основные понятия комбинаторики. Пусть дано множество из n различных элементов и из него мы выбираем случайным образом m элементов ($0 < m < n$).

Эти m -элементные подмножества могут отличаться:

- составом элементов;
- порядком следования элементов;
- возможностью повтора элементов в подмножестве;
- объемом подмножества.

В соответствии с этим выделяют следующие виды подмножеств.

1. Размещения - упорядоченные m -элементные подмножества n -элементного множества, которые отличаются как *составом*, так и *порядком следования элементов*. Число всех размещений A_n^m из n элементов по m (где $m < n$), определяется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

Напомним, что факториал есть

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

$$0! = 1.$$

Пример. Сколькими способами можно случайным образом из 25 студентов курса выбрать двух (с учетом порядка их выбора)?

- ***Решение.***

Так как в данном случае важно не только то, какие два человека будут выбраны из 25 (состав элементов n), но и кто из них первый, а кто - второй (порядок следования элементов), то общее число комбинаций будет числом размещений из 25 элементов по 2 (m).

Таким образом, искомое общее число способов будет равно:

$$A_n^m = \frac{25!}{(25 - 2)!} = \frac{25!}{23!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23!}{23!} = 25 \cdot 24 = 600.$$

Размещения с повторениями

- Каждое размещение с повторениями из n элементов по m элементов может состоять не только из различных элементов, но из m каких угодно и как угодно повторяющихся элементов или не содержать их вообще.
- Например, возьмем в качестве трех элементов цифры 1, 2 и 3, тогда $n = 3$. Построим соединения из них, содержащие два элемента ($m = 2$), которые будут отличаться друг от друга либо элементами, либо порядком их расположения
- Таких соединений будет девять (число размещений с повторениями из трех по два):
11 12 13 21 22 23 31 32 33
- Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов будем обозначать символом $A_{n(c \text{ повт})}^m$

$$A_{n(c \text{ повт})}^m = n^m.$$

2. Перестановки - любые упорядоченные множества, в которые входят по одному все n различных элементов исходного множества. Число всех перестановок P_n из n элементов определяется по формуле:

$$P_n = n!$$

Перестановки - это частный вид размещений, когда $n = m$:

$$P_n = A_n^m.$$

Пример. Сколькими способами можно поставить 5 человек в очередь?

• ***Решение.***

Так как в данном случае искомые комбинации будут состоять из всех 5 элементов исходного множества, то общее число комбинаций будет числом перестановок из 5 элементов.

- Таким образом, искомое общее число способов будет равно:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

- **Перестановки с повторениями**

- Пусть имеется совокупность n элементов, среди которых m элементов первого типа, l элементов второго типа и k элементов третьего типа ($m + l + k = n$).
- Для расчета числа возможных перестановок с повторениями применяют формулу:

$$P_{\text{повт}} = \frac{n!}{m! l! k!}.$$

- Например, возьмем две цифры (1 и 2), которые в 4-значном ($n = 4$) числе повторяются по 2 раза ($m = 2, k = 2$). Число возможных перестановок с повторениями

$$P_{\text{повт}} = \frac{4!}{2! 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6.$$

- Найдем все эти перестановки:

1122 1212 1221 2112 2121 2211.

3. Сочетания – это m -элементные подмножества n -элементного множества, которые отличаются только составом элементов (порядок их следования не важен!). Число всех сочетаний C_n^m из n элементов по m (где $m < n$), определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}.$$

Пример. Сколькими способами можно вызвать двух человек из группы 25 человек случайным образом к доске?

• **Решение.**

Так как в данном случае важно только то, какие 2 человека будут выбраны из 25 человек группы (состав элементов), а порядок их следования не важен, то общее число комбинаций будет числом сочетаний из 25 элементов по 2. Таким образом, искомое общее число способов будет равно:

$$C_n^m = \frac{25!}{2! \cdot (23)!} = 300.$$

Сочетания с повторениями

- Рассмотрим случай, когда сочетание из n элементов по m элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до m включительно, или не содержать его совсем. Такое соединение называется *сочетанием с повторениями*.
- Например, возьмем в качестве трех элементов цифры 1, 2 и 3, тогда $n = 3$. Построим соединения из них, содержащие два элемента ($m = 2$), которые будут отличаться друг от друга хотя бы одним элементом, при этом каждый элемент может повторяться.
- Таких соединений будет шесть (число перестановок с повторениями):

11 12 13 22 23 33

- Формула для вычисления числа сочетаний с повторениями:

$$C_n^m \text{ (с повт)} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Примеры для обсуждения

- Четыре студента претендуют на три места в олимпиаде. Сколько существует способов распределения мест между ними?
- Сколькими способами можно выбрать 7 красок из 9?
- Если выполняются соотношения $n > 2$, $m < n$, то какое число больше: A_n^m или C_n^m ?
- Сколькими способами можно составить список из пяти фамилий?
- Сколькими способами можно переставить буквы в слове ОЛОВО?