

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИНФОРМАТИКИ



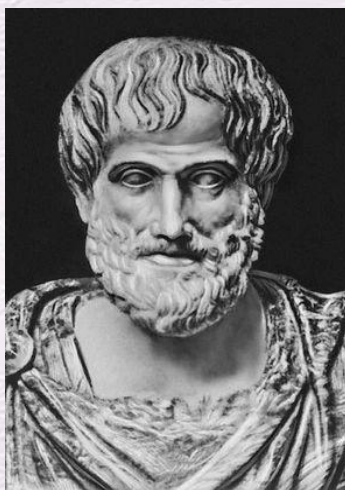
Турист шел к озеру. У перекрестка сидели двое парней, каждый из которых знал, какая дорога ведет к озеру. На вопросы они отвечали только «да» или «нет». Один из них всегда говорил правду, другой всегда лгал. Все это знал турист, но не знал, какая из двух дорог ведет к озеру.

Турист задал один вопрос одному из парней и узнал какая дорога ведет к озеру. Какой вопрос мог задать турист парню?

Турист задал два вопроса одному из парней и узнал какая дорога ведет к озеру. Какие вопросы мог задать турист парню?

Логика – это наука правильно рассуждать, наука о формах и законах человеческого мышления.

Формальная логика – это наука, пытавшаяся найти ответ на вопрос, как мы рассуждаем, изучающая логические операции и правила мышления.



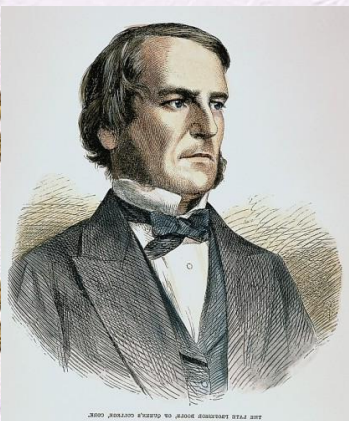
Ее основоположник –
древнегреческий
мыслитель
**Аристотель (384-322
года до н. э.).**

ЛОГИКА



Вильгельм Лейбниц (1646-1716).

Основоположник математической логики (пытался построить первые логические исчисления: арифметические и буквенно-алгебраические).



Джордж Буль (1815-1864). Создал новую область науки - Алгебру логики (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).

Главная задача логики состоит в том, чтобы **ВЫЯВИТЬ**, какие способы рассуждения правильные, а какие нет.

Задача логики – описать и исследовать те способы рассуждений, которые являются правильными.



Основные формы мышления: *понятие, суждение (высказывание), умозаключение.*

Понятие.

Понятие - это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.

В структуре каждого понятия различают две стороны: **содержание** и **объем**.

Содержание понятия составляет совокупность существенных признаков объекта.

Чтобы раскрыть содержание понятия, следует выделить признаки, необходимые и достаточные для выделения данного предмета по отношению к другим предметам.

Объем понятия определяется совокупностью предметов, на которую оно распространяется, и может быть представлено в форме множества объектов, состоящего из элементов множества.

Высказывание.

Высказывание (суждение) - это форма мышления, выраженная с помощью понятий, посредством которой что-либо утверждают или отрицают о предметах, их свойствах и отношениях между ними. Высказывание может быть *истинно* либо *ложно*.

Истинное суждение=1, ложное=0

Каждое высказывание состоит из трех элементов :

субъекта - Понятие о предмете мысли;

предиката - Понятие о свойствах и отношениях предмета мысли ;

связки (двух терминов и связки) - Отношения между субъектом и предикатом выражается *связкой* «есть», «не есть», «является», «состоит» и т. д.

Пример

Определить, что в суждении «Компьютер состоит из процессора, памяти и внешних устройств» является субъектом, предикатом и связкой.

«Компьютер» - субъект,

«процессора, памяти и внешних устройств» - предикат,

«состоит» - связка.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Определить, что является субъектом, предикатом и связкой в следующих суждениях:

- А) Сканер — это устройство ввода информации.
- Б) Луна является спутником Земли.
- В) Атом состоит из ядра и электронов.

2. Приведите примеры понятий, суждений из различных наук: математики; информатики; физики и химии.

Высказывание

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

*Земля вращается вокруг Солнца.
Москва - столица.*

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием:

Это высказывание ложное.

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

*Без стука не входить!
Откройте учебники.
Ты выучил стихотворение?*

Высказывание или нет?

- ✓ На улице жарко.
- ✓ Информатика – это наука.

Ура, снег пошел!

- ✓ У треугольника 3 стороны и 3 угла.

Верно ли, что $\pi=3,14$?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание



Суждения подразделяются на частные и общие:

ЧАСТНЫЕ суждения выражают конкретные (частные) факты.

Пример: $7-2=5$

Луна-спутник Земли.

ОБЩИЕ суждения характеризуют свойства групп объектов или явлений.

Пример: Всякий человек – млекопитающее.

В любом прямоугольном треугольнике есть угол в 90° .

Высказывания могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков. Из двух числовых выражений можно составить высказывания, соединив их знаками равенства или неравенства.

Простые и сложные высказывания

Высказывания бывают простые и сложные.

Высказывание называется *простым*, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Пример: Завтра пойдет дождь. Я буду смотреть дома телевизор.

Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Пример: Если завтра пойдет дождь, то я буду смотреть дома телевизор.



Простые или сложные высказывания?

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Луна – спутник земли.

Студент запланировал выполнить следующие дела: подготовиться к зачету, побывать на тренировке, почитать интересную книгу, поиграть в шахматы.

Умозаключение

Умозаключение – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение).

Примеры:

Если король под шахом и ему некуда ходить, то – мат.

Если идет дождь, то необходимо открыть зонтик.

Задания:

В следующих умозаключениях выделите посылки и заключения. Определите, истинны они или нет:

- Произведение двух чисел равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0.
- Если $A \cdot B = 0$, то $A > 0$ и $B > 0$.

Алгебра логики

Алгебра логики определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют *логическими переменными*.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей ($A = 1$), а если ложно - нулём ($B = 0$).

0 и **1** называются *логическими значениями*.



Логические операции



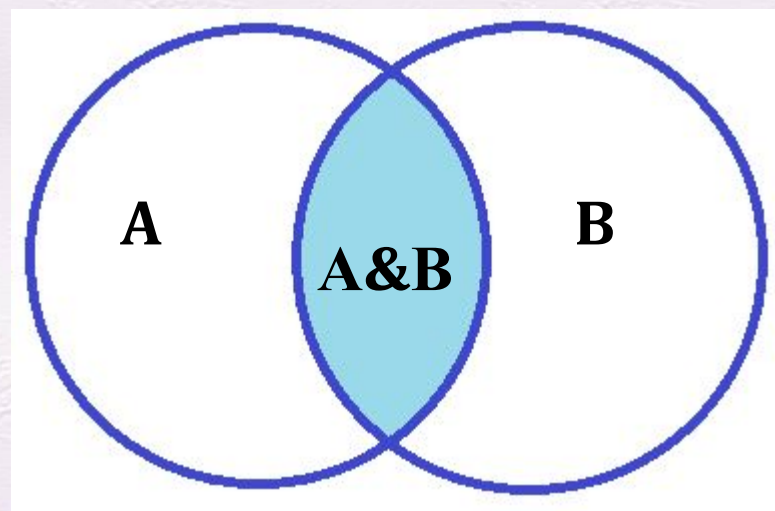
Логическое умножение или конъюнкция - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Обозначения: \wedge , \times , $\&$, И.

Таблица истинности:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление



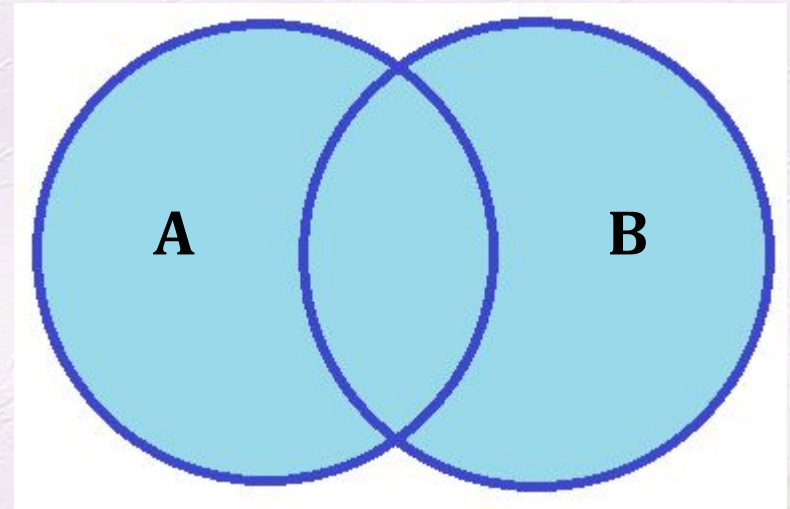
Логическое сложение или дизъюнкция - логическая операция, которая каждому двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Обозначения: **V, |, ИЛИ, +.**

Таблица истинности:

A	B	AVB
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Графическое представление



AVB

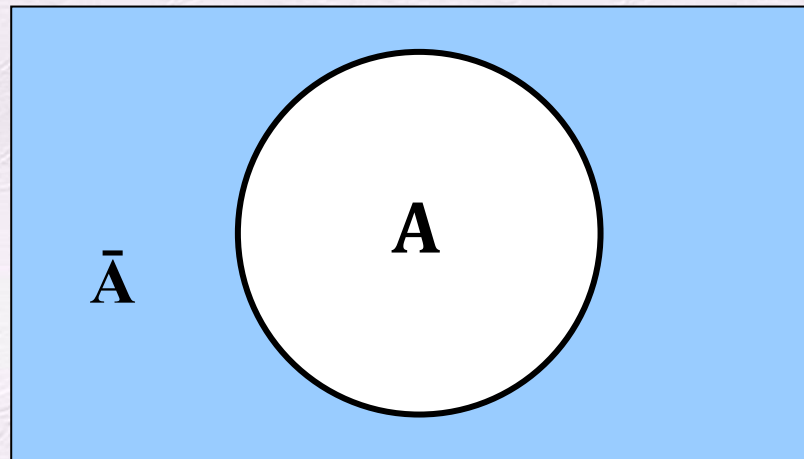
Логическое отрицание или инверсия - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Обозначения: **НЕ**, \neg , $\bar{}$.

Таблица истинности:

A	\bar{A}
0	1
1	0

Графическое представление



Логическое следование или импликация - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание.

Если А, то В; Из А следует В; А влечет В; для А необходимо В; для В достаточно А;



Обозначения: **ИЛИ** \rightarrow .

Таблица истинности:

A	B	A\rightarrowB
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Логическая равнозначность или эквивалентность - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Обозначения: \Leftrightarrow , \sim .

Таблица истинности:

A	B	A\LeftrightarrowB
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ



Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1. Инверсия;
2. Конъюнкция;
3. Дизъюнкция;
4. Импликация;
5. Эквивалентность.



Определите истинность составного высказывания:

$\overline{(A \& B)} \& (C \setminus D)$, состоящего из простых высказываний:

$A = \{\text{Принтер - устройство вывода информации}\}$,

$B = \{\text{Процессор - устройство хранения информации}\}$,

$C = \{\text{Монитор - устройство вывода информации}\}$,

$D = \{\text{Клавиатура - устройство обработки информации}\}$.

Сначала на основании знания устройства компьютера устанавливаем истинность простых высказываний:

$A = 1, B = 0, C = 1, D = 0$.

Определим теперь истинность составного высказывания, используя таблицы истинности логических операций:

$$\overline{(1 \& 0)} \& (1 \setminus 0) = (0 \& 1) \& (1 \setminus 0) = 0$$

Составное высказывание ложно.

Даны простые высказывания:

$A = \{\text{Принтер} - \text{устройство ввода информации}\},$

$B = \{\text{Процессор} - \text{устройство обработки информации}\},$

$C = \{\text{Монитор} - \text{устройство хранения информации}\},$

$D = \{\text{Клавиатура} - \text{устройство ввода информации}\}.$

Определите истинность составных высказываний:

а) $(A \ \& \ B) \ \& \ (C \ \vee \ D);$

б) $(A \ \& \ B) \ \Rightarrow \ (C \ \vee \ D);$

в) $(A \ \vee \ B) \ \Leftrightarrow \ (C \ \& \ D);$

г) $\overline{A} \ \Leftrightarrow \ \overline{B}.$

Определите истинность составных высказываний:

а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;

б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$;

в) $(0 \& 1) \& 1$;

г) $1 \& (1 \& 1) \& 1$;

д) $((1 \vee 0) \& (1 \& 1)) \& (0 \vee 1)$;

е) $((1 \& 1) \vee 0) \& (0 \vee 1)$;

ж) $((1 \& 0) \vee (1 \& 0)) \vee 1$;

з) $((0 \& 0) \vee 0) \& (1 \vee 1)$



Построение таблиц ИСТИННОСТИ



Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать n - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки: $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

Пример построения таблицы истинности

$$A \vee A \& B$$

n (число переменных) = 2,

t (количество строк без шапки) = $2^2 = 4$.

Операций – 2, значит количество столбцов будет: $n+2=4$

Приоритет операций: $\&$, \vee

A	B	$A \& B$	$A \vee A \& B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Пример построения таблицы истинности

Найдите значение логического выражения для указанных значений X:

$$(X > 2) \& (X > 5)$$

X	A (X>2)	\bar{A}	B (X>5)	$\bar{A} \& B$
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0
4	1	0	0	0
5	1	0	0	0

Построить таблицы истинности

1. $B \& (A \vee B)$
2. $A \& \overline{(B \vee B)}$
3. $A \& B \& C$
4. $F = (A \vee B) \& (A \vee B)$

A) $(A \Rightarrow B) \vee \overline{B}$

B) $\overline{(A \& \overline{B})} \Leftrightarrow (\overline{A} \vee (A \& B))$

C) $\overline{(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))} \Leftrightarrow (A \& \overline{B} \& C)$