

Кинематика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Механика- это раздел физики, в котором изучается простейшая форма движения материи – механическое, т. е. движение тел в пространстве.

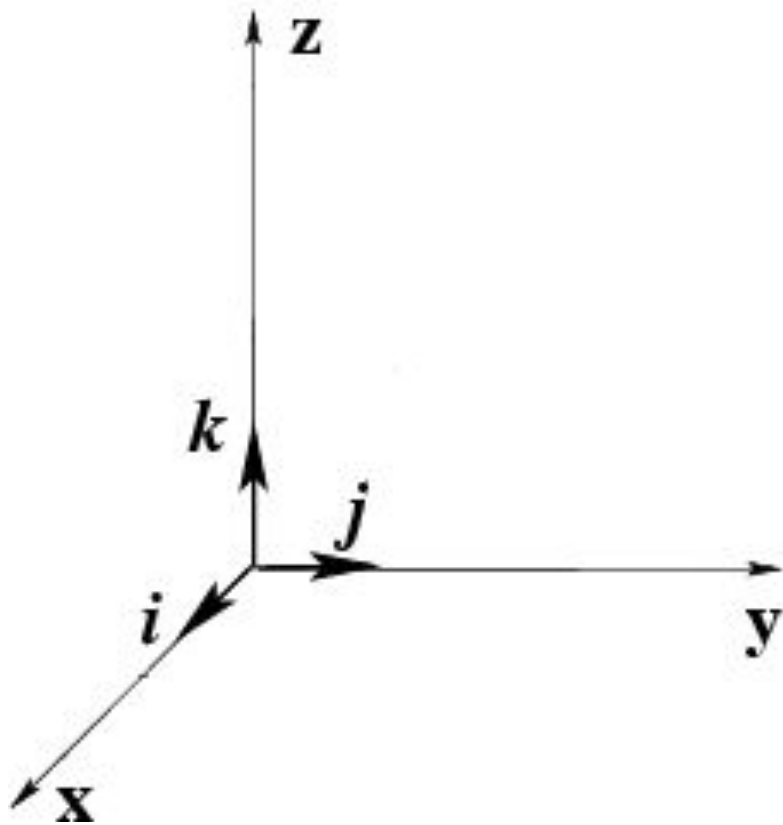
Основные понятия классической механики

- Положение тела в пространстве может быть определено только по отношению к каким-либо другим телам. Движение тела – это процесс изменения положения в пространстве с течением времени. **Чтобы изучать свойства пространства и времени необходимо наблюдать движение тел, которые в них находятся, исследовать характер движения тела.**
- **Пространство.** Считается, что движение тел происходит в пространстве, являющимся евклидовым, абсолютным (не зависит от наблюдателя), однородным (две любые точки пространства неотличимы) и изотропным (два любых направления в пространстве неотличимы).
- **Время**— фундаментальное понятие, постулируемое в классической механике. Считается, что время является абсолютным, однородным и изотропным (уравнения классической механики не зависят от направления течения времени).

Основные понятия классической механики

- Тело, которое служит для определения положения интересующего нас тела называют **телом отсчёта**. Для описания движения с телом отсчёта связывают систему координат, например, декартову. Координаты тела позволяют определить его положения в пространстве. Движение происходит не только в пространстве, но и во времени, поэтому для описания движения необходимо отсчитывать время.
- Совокупность тела отсчёта и связанных с ним системы координат и синхронизированных между собой часов образуют **систему отсчёта**.
- Материальная точка — это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. В одной задачи тело можно рассматривать как материальную точку, в других как протяжённый объект.

Декартова система координат — ортонормированный базис которой образован тремя единичными по модулю и взаимно ортогональными (перпендикулярными) векторами i , j , k проведенными из начала координат.



Основные понятия классической механики

- **Ньютоновская механика**- основана на основанный на [законах Ньютона](#) и [принципе относительности Галилея](#): скорости тел малы по сравнению со скоростью света, линейные масштабы и промежутки времени остаются неизменными при переходе от одной системы отсчёта к другой, т.е. не зависят от выбора системы отсчёта.
- **Релятивистская механика**: скорости сравнимы со скоростью света, линейные масштабы и промежутки времени зависят от выбора системы отсчёта. В частном случае малых скоростей переходит в классическую.

Задачи механики

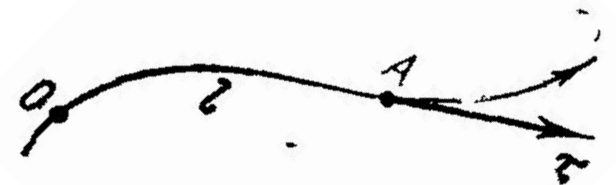
- **Изучение различных движений и обобщение полученных результатов в виде законов движения-** законов, с помощью которых может быть предсказан характер движения в каждом конкретном случае.
- **Отыскание общих свойств.** Присущих любой системе, независимо от конкретного рода взаимодействий между телами системы.

- **Кинематика**- это раздел механики, где изучаются различные способы описания движений независимо от причин, обуславливающих эти движения.

Три способа описания движения:

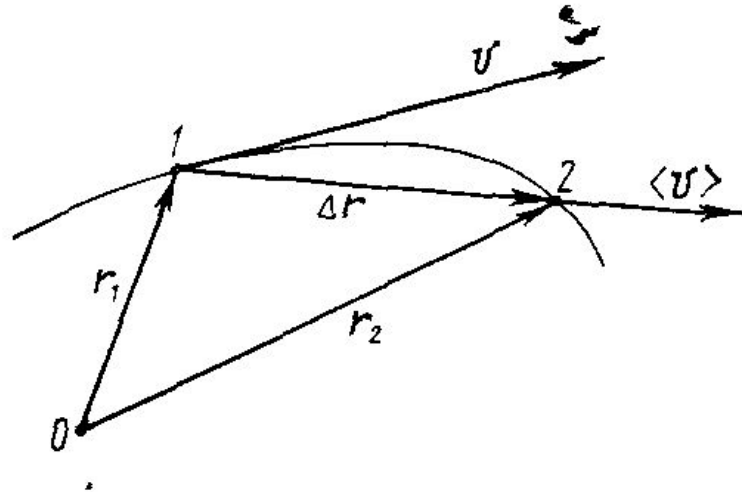
Координатный – в выбранной системе координат задаются координаты движущейся точки как функции от времени.

Естественный - пользуются, если известна траектория движения точки. Положение точки A определяют дуговой координатой l – расстоянием вдоль траектории от выбранного начала отсчёта O .

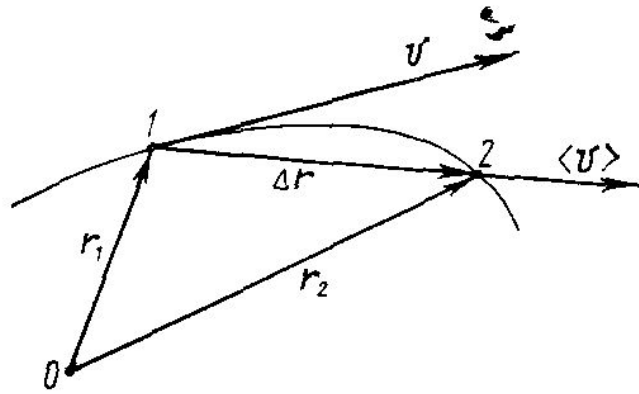


Векторный - положение точки определяется радиус-вектором, направленным в данную точку.

Векторный способ



- Положение точки задают радиус-вектором $\mathbf{r}$.
- При движении точки радиус-вектор меняется по модулю и направлению, т.е. радиус-вектор зависит от времени $\mathbf{r}(t)$.
- Геометрическое место концов радиус-вектора образует **траекторию** точки.
- В зависимости от формы траектории движение материальной точки может быть **прямолинейным** или **криволинейным**.



- **Скорость** — это **векторная** величина, которая определяет быстроту и направление движения в данный момент времени [м/с].
- Скорость точки: пусть за время Δt точка А переместилась из положения 1 в положение 2.
- Вектор перемещения $\Delta \mathbf{r}$ точки А: $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — приращение радиус-вектора за время Δt .
- **Средний вектор скорости** $\langle \mathbf{v} \rangle = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$
- Вектор скорости в данный момент времени $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r} / \Delta t = d\mathbf{r} / dt$$
- Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V^2}$

Векторный способ

- **Ускорение $\mathbf{a}$** определяет скорость изменения вектора скорости (по модулю и направлению) точки со временем равен производной вектора скорости по времени $[\text{м/с}^2]$:
- $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$
- Пример: радиус-вектор точки зависит по закону:
 $\mathbf{r} = \mathbf{A} * t^2 + 3 * \mathbf{D}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ постоянные вектора,
тогда
$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = 2 * \mathbf{A} * t$$
$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = 2 * \mathbf{A}$$

Векторный способ

- Обратная задача, можно найти $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ зная зависимость $\mathbf{a}(t)$?
- Достаточно ли начальных условий: $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$ в момент времени $t=0$?

Векторный способ

- Рассмотрим случай равноускоренного движения $\mathbf{a} = \text{const}$.
- Найдём $\mathbf{v}(t)$. За промежуток времени dt элементарное приращение скорости $d\mathbf{v}$:
- $d\mathbf{v} = \mathbf{a} * dt$. Проинтегрируем по времени в пределах от 0 до t и найдём приращение вектора скорости за это время:

- $\Delta\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a} * dt = \mathbf{a} * t$

- $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0^0 + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} * t$

Векторный способ

- Найдём радиус-вектор: за промежуток времени dt элементарное приращение радиус-вектора $d\mathbf{r}$:
- $d\mathbf{r} = \mathbf{v} * dt$.
- Интегрируем это выражение с учётом зависимости $\mathbf{v}(t)$ и найдём приращение радиус-вектора за время от 0 до t :
- $$\Delta\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a} t^2/2$$

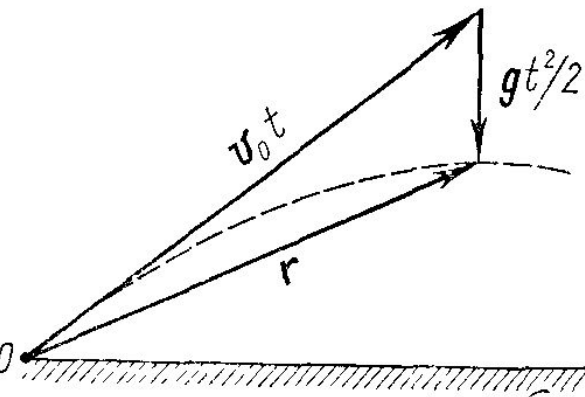
Векторный способ

- Тогда сам радиус вектор $\mathbf{r}$:
- $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a} t^2/2$
- Пример: рассмотрим камень, брошенный под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$. Камень движется с постоянным ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, его положение относительно точки бросания ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$) определяется радиус-вектором:

- $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g} t^2/2,$

$\mathbf{r}$ — сумма двух векторов:

Начальные условия нужны!



Координатный способ

- С выбранным телом отсчёта жестко связывают определённую систему координат, например, декартову. Запишем в момент времени t положение точки A относительно начала координат O через проекции радиус – вектора $\mathbf{r}(t) - x, y, z$:
- $x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$ – **кинематические уравнения движения точки**
- Зная зависимость этих координат от времени – закон движения точки, можно найти положение точки в каждый момент времени, её скорость и ускорение.

Координатный способ

- Проекции векторов скорости и ускорения:

$$v_x = dx/dt \quad v_y = dy/dt \quad v_z = dz/dt$$

$$a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2 \quad a_y = dv_y/dt = d^2y/dt^2$$

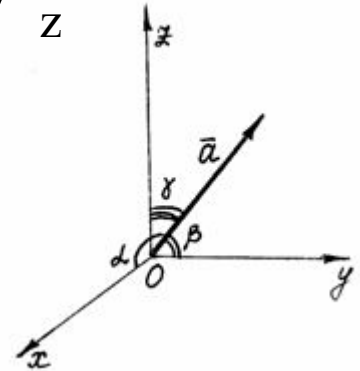
$$a_z = dv_z/dt = d^2z/dt^2$$

- Модуль вектора скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

- Направление вектора $\mathbf{v}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = v_x/v \quad \cos \beta = v_y/v \quad \cos \gamma = v_z/v ,$$

где α, β, γ – углы между вектором $\mathbf{v}$ и осями x, y, z , соответственно.



- Таким образом $x(t), y(t), z(t)$ полностью определяют движение точки.

Тангенциальное и нормальное ускорения

- При прямолинейном движении векторы скорости и ускорения совпадают с направлением траектории. Рассмотрим движение материальной точки по криволинейной плоской траектории. Вектор скорости в любой точке траектории направлен по касательной к ней.

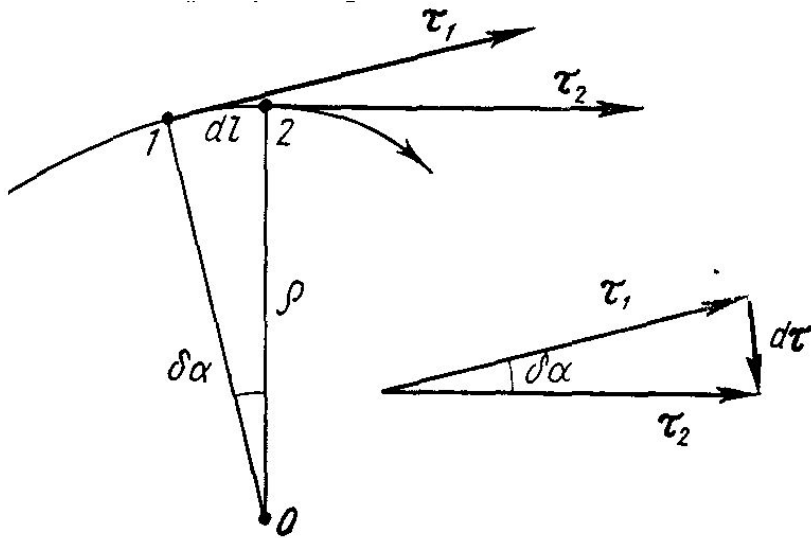
- Введём единичный вектор τ , связанный с движущейся точкой A и направленный по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты l .



- Вектор скорости $\mathbf{v}$ движения точки направлен по касательной к траектории, тогда можем записать:
- $\mathbf{v} = v_{\tau} * \tau$, где $v_{\tau} = dl/dt$ – проекция вектора $\mathbf{v}$ на направление вектора τ .
- **Тангенциальное ускорение:**
- $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d(v_{\tau} * \tau)/dt = (dv_{\tau}/dt) \tau + (d\tau/dt) v_{\tau}$
- **Тангенциальное (касательное) ускорение** – это составляющая вектора ускорения, направленная вдоль касательной к траектории в данной точке траектории движения.

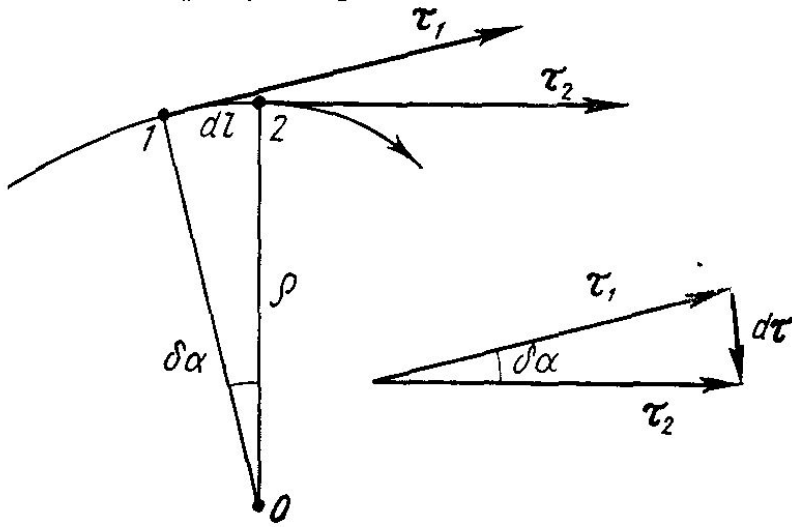
Тангенциальное и нормальное ускорения

- Преобразуем:
- $v_\tau(d\tau/dt) = v_\tau(d\tau * dl/dt * dl) = v_\tau^2 d\tau / dl = v^2 d\tau / dl \quad (1)$



- Траектория 1-2 стремится к окружности с центром в некоторой точке O , называемую **центром кривизны траектории** в данной точке, а радиус ρ — **радиусом кривизны траектории** в точке 2.

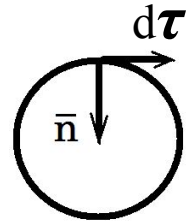
Тангенциальное и нормальное ускорения



- Угол $\delta\alpha = dl / \rho$
- Введём единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ к траектории в точке 1, тогда

- $dl / \rho = d\boldsymbol{\tau} / \mathbf{n}$

- $d\boldsymbol{\tau} / dl = \mathbf{n} / \rho \quad (2)$



- Подставим (2) в (1) и получим:
- $\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau}(dv_{\tau} / dt) + \mathbf{n}(v^2 / \rho)$
- Полное ускорение есть сумма тангенциального и нормального ускорений.

Тангенциальное и нормальное ускорения

- **Тангенциальное** ускорение a_τ характеризует быстроту изменения скорости по модулю, его величина:

$$a_\tau = \tau(dv_\tau / d\tau)$$

- **Нормальное (центростремительное)** ускорение направлено по нормали к траектории к центру ее кривизны O и характеризует быстроту изменения направления вектора скорости точки.

$$a_n = n(v^2 / \rho)$$

- **Модуль полного ускорения:** $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$
- Абсолютная величина тангенциального ускорения зависит только от путевого ускорения, совпадая с его абсолютной величиной. Абсолютная величина нормального ускорения, зависит от путевой скорости.