

Линейные цепи постоянного тока

Режим постоянного тока наступает в ЭЦ, если источники энергии схемы (источники напряжения и источники тока) не изменяют своих значений во времени. При этом такие элементы цепи как индуктивность и емкость превращаются в коротки и разрывы цепи, то есть схема включает в себя только электрические сопротивления. Такие схемы называют резистивными. Универсальным методом расчета токораспределения является метод расчета по уравнениям Кирхгофа. Но если в схеме ЭЦ имеется только один источник и соединение элементов в схеме представляют из себя комбинацию последовательных и параллельных соединений (смешанное соединение), то расчет токов можно проводить, используя только закон Ома и правила преобразований таких соединений. Такие ЭЦ называются **простыми**.

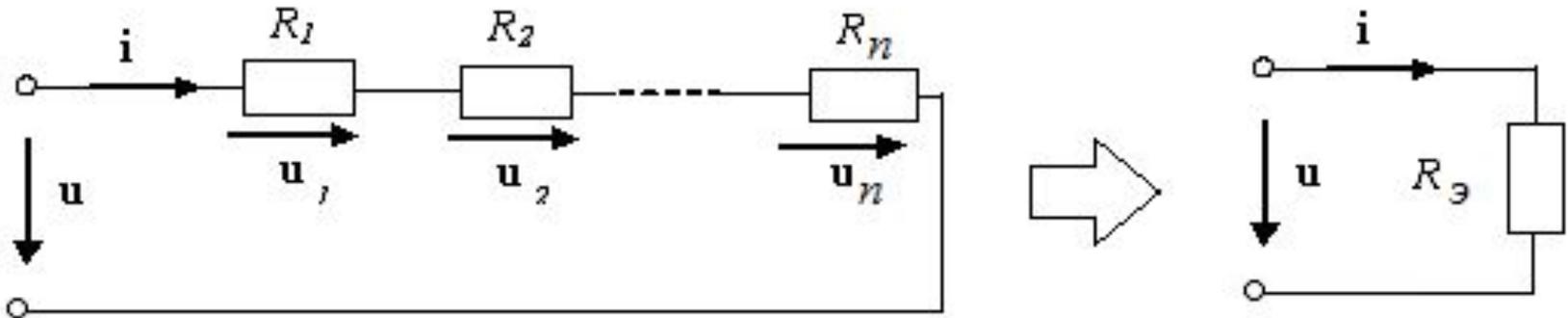
1. Простые цепи постоянного тока.

Эквивалентные преобразования, метод эквивалентных преобразований. Метод пропорциональных величин.

Метод расчета простых цепей с использованием закона Ома и преобразований участков схемы называется **метод эквивалентных преобразований**

Последовательное соединение элементов

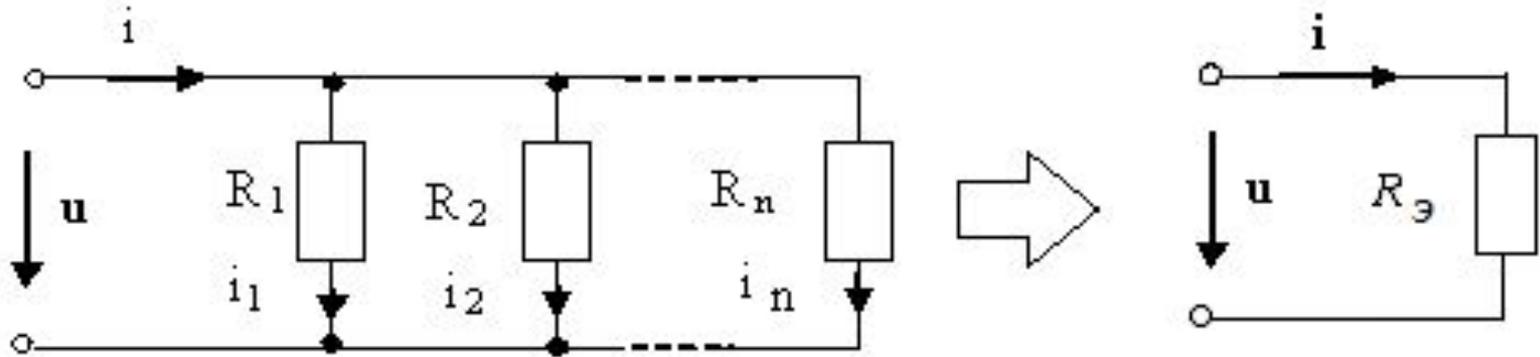
Последовательным называется такое соединение элементов, при котором по ним протекает один и тот же ток.



$$R_{\text{э}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Параллельное соединение элементов

При параллельном соединении все элементы электрической цепи находятся под одним и тем же напряжением.

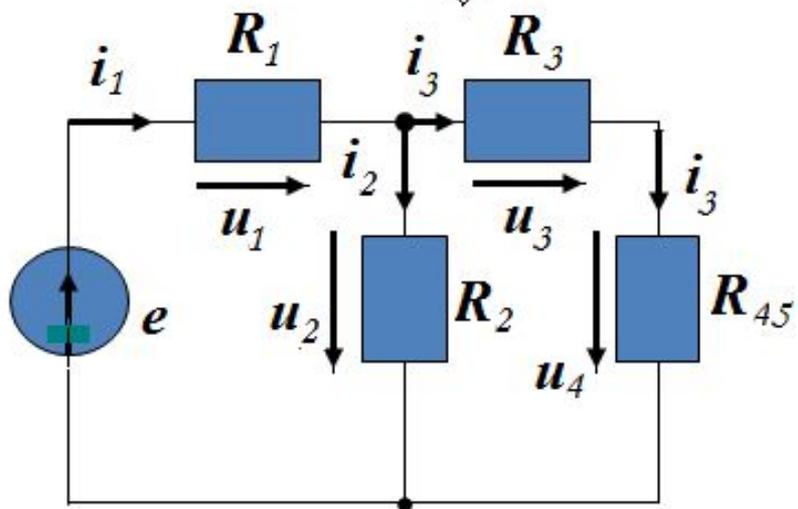
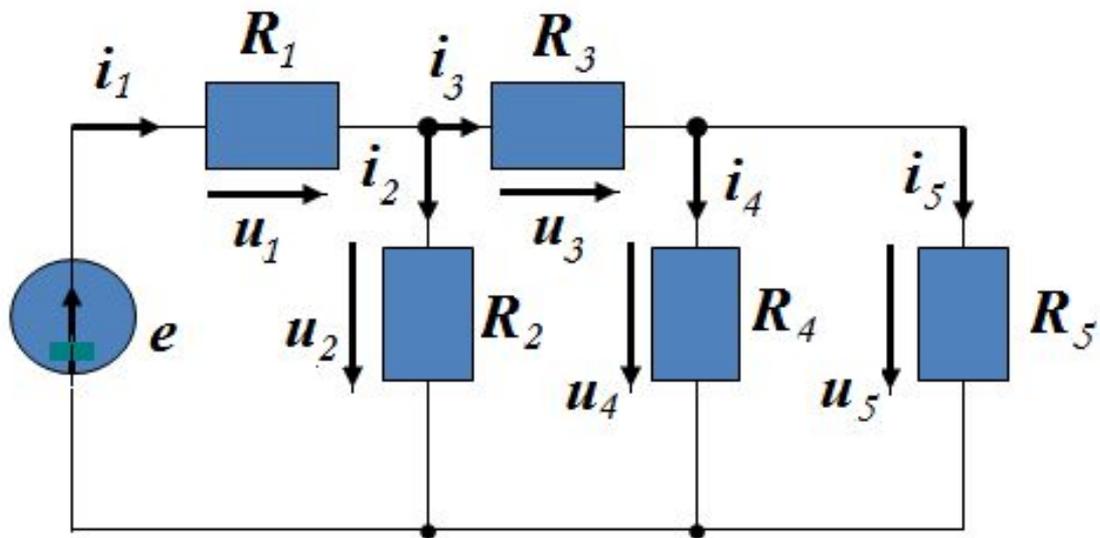


$$R_{\text{э}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

$$R_{\text{э}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

При параллельном соединении двух резисторов:

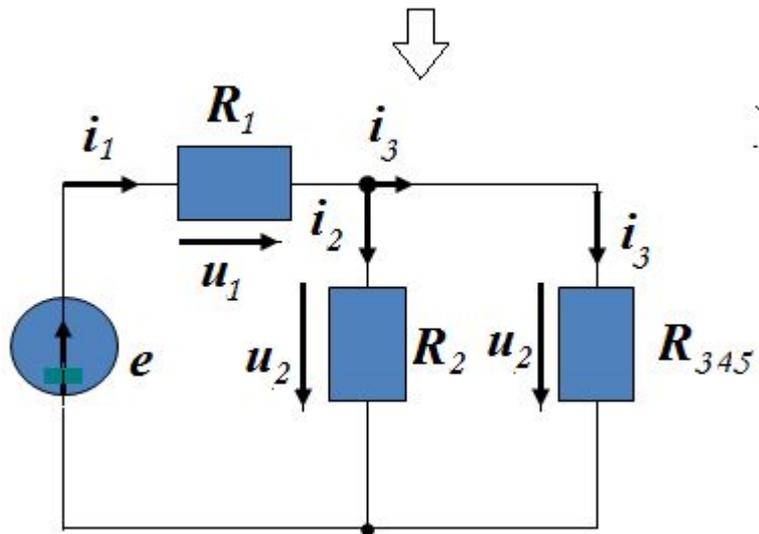
Смешанное соединение элементов. Метод эквивалентных преобразований



Первое преобразование

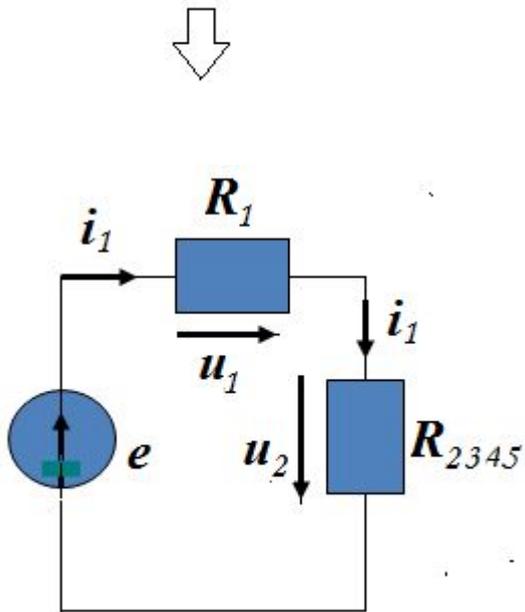
$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

Второе преобразование



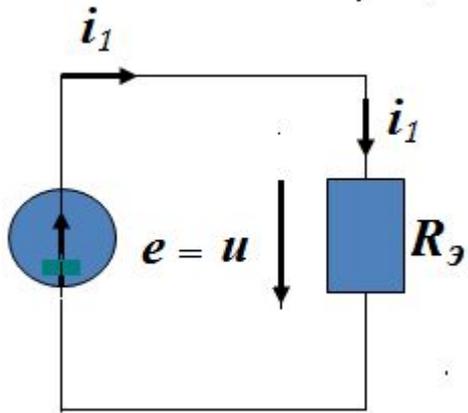
$$R_{345} = R_3 + R_{45}$$

Третье преобразование



$$R_{2345} = \frac{R_2 R_{345}}{R_2 + R_{345}}$$

Четвертое преобразование



$$R_{\text{э}} = R_1 + R_{2345}$$

Далее расчет проводится по закону Ома в обратном порядке от последней схемы до исходной схемы

$$i_1 = \frac{e}{R_{\text{э}}}$$

$$u_1 = i_1 R_1$$

$$u_2 = i_1 R_{2345}$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{u_2}{R_{345}}$$

$$u_3 = i_3 R_3$$

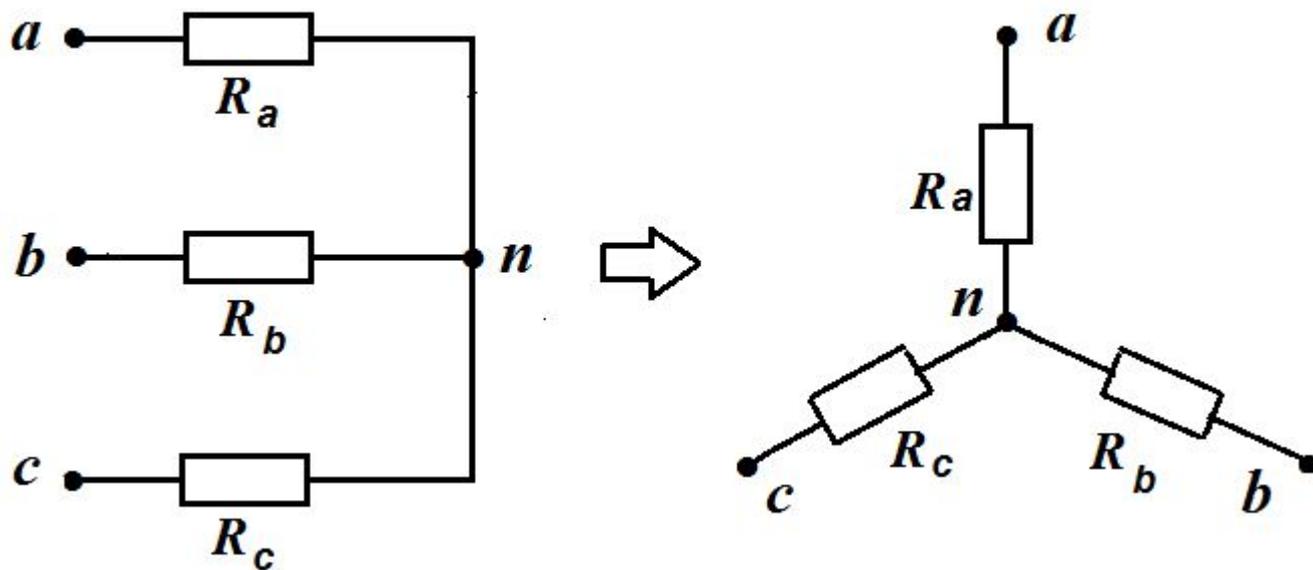
$$u_4 = i_3 R_{45}$$

$$i_4 = \frac{u_4}{R_4}$$

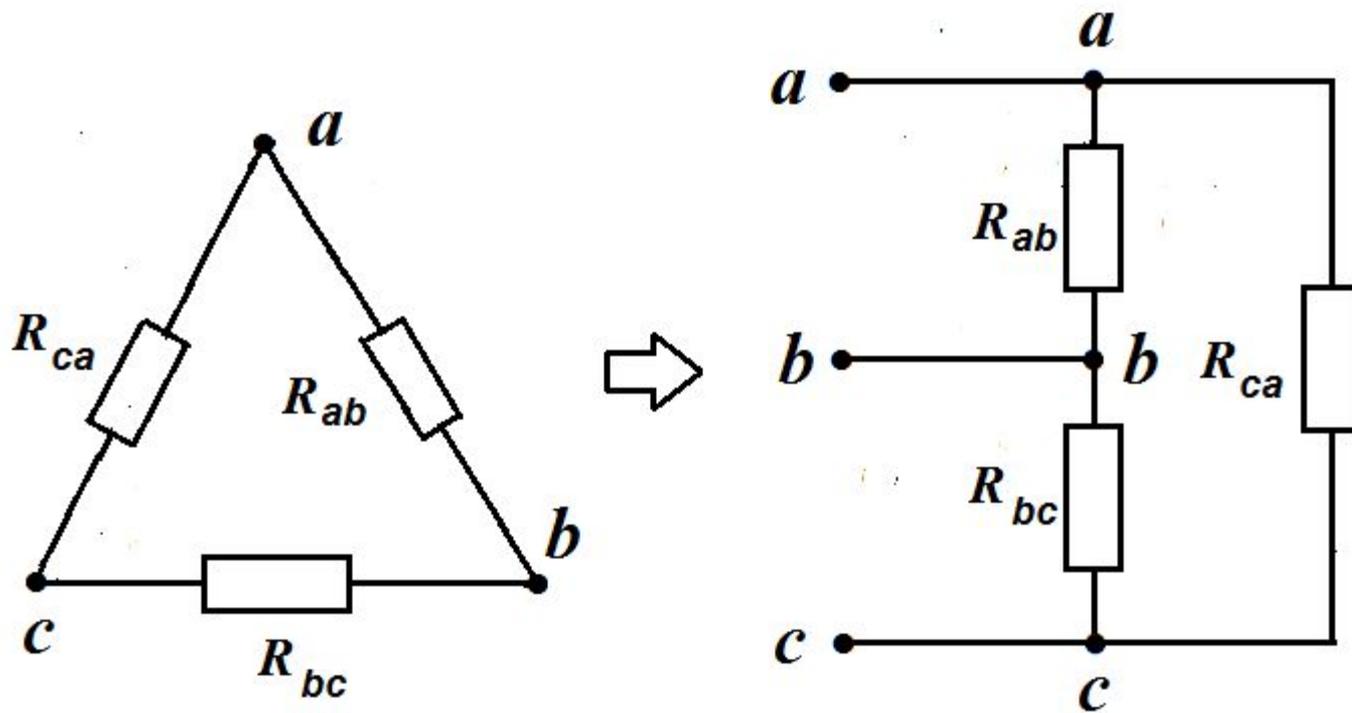
$$i_5 = \frac{u_4}{R_5}$$

Следует отметить, что к простым схемам можно отнести и схемы с соединением сопротивлений **звезда** и **треугольник**. В этом случае их также можно эквивалентно преобразовывать друг в друга.

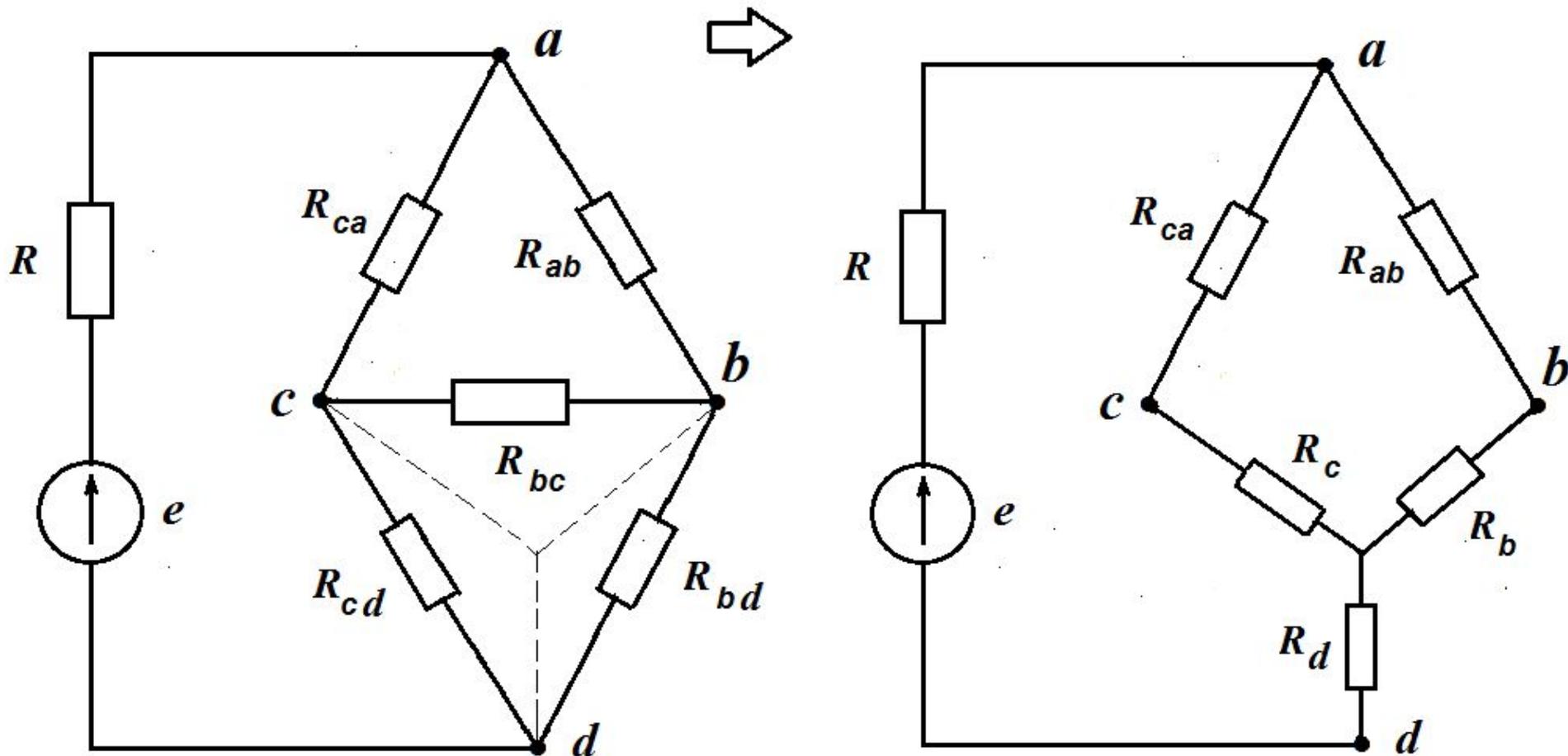
соединение сопротивлений **звезда**



соединением сопротивлений **треугольник**



Пример расчета простой цепи с соединением сопротивлений звезда-треугольник



Преобразование треугольника в звезду

$$R_c = \frac{R_{cd} R_{bc}}{R_{cd} + R_{bc} + R_{bd}}$$

$$R_b = \frac{R_{cb} R_{bd}}{R_{cd} + R_{bc} + R_{bd}}$$

$$R_d = \frac{R_{cd} R_{bd}}{R_{cd} + R_{bc} + R_{bd}}$$

Дальнейший расчет соответствует смешанному соединению элементов

Метод пропорциональных величин

Если в простой цепи напряжение источника увеличить, например, в два раза, то все токи в ветвях и напряжения увеличатся в два раза. Это свойство линейных цепей используют как метод расчета. Зададимся током в наиболее удаленной от источника ветви, например, равным одному амперу.

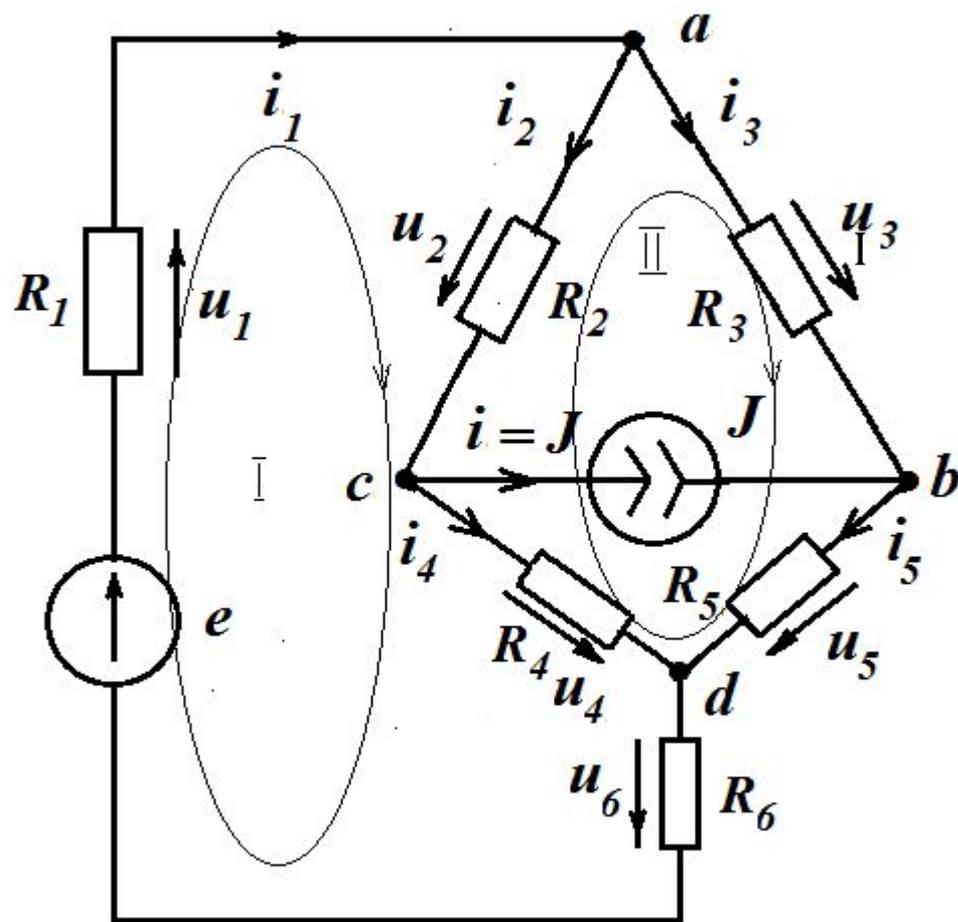
Рассчитываем напряжения и токи в других ветвях, используя закон Ома и определим напряжение источника схемы в результате такого расчета. Это фиктивное значение ЭДС источника сравниваем с настоящим значением по условию задачи. Определяем во сколько раз истинное значение ЭДС больше фиктивного. Умножаем на этот коэффициент все рассчитанные фиктивные токи и напряжения в ветвях цепи. Это и будут истинные значения.

2. Сложные цепи постоянного тока.

Расчет токораспределения в цепи по уравнениям Кирхгофа.

Сложные цепи постоянного тока имеют количество источников более одного и более широкий класс соединений элементов цепи. При расчете сложных ЭЦ универсальным является метод расчета по законам Кирхгофа. Расчет таких цепей следует начинать с произвольного выбора стрелок токов в ветвях ЭЦ. Количество расчетных уравнений Кирхгофа должно совпадать с количеством неизвестных токов схемы. Полученная система расчетных уравнений должна быть линейно независимой. Для этого уравнения Кирхгофа должны составляться для независимых узлов и независимых контуров. Для сложных ЭЦ, как правило, количество этих уравнений достаточно велико и их решение вручную весьма затруднительно. При современном уровне вычислительной техники расчеты проводятся на ЭВМ. Ниже будут рассмотрены вопросы подготовки расчетных уравнений для реализации их на ЭВМ.

Для изображенной ниже схемы независимых узлов - 3, независимых контуров - 2, неизвестных токов - 5. Следовательно, по 1 закону Кирхгофа составляется 3 уравнения, по 2 закону - 2 уравнения.



Узел а : $i_1 - i_2 - i_3 = 0$

Узел б : $i_3 + J - i_5 = 0$

Узел с : $i_2 - J - i_4 = 0$

Контур I

$$u_1 + u_2 + u_4 + u_6 = e$$

Контур II

$$u_3 + u_5 - u_4 - u_2 = 0$$

Напряжения в уравнениях 2 закона Кирхгофа можно заменить по закону Ома. Тогда получится линейно независимая система уравнений для расчета токов в цепи.

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_3 - i_5 = -J \\ i_2 - i_4 = J \\ i_1 r_1 + i_2 r_2 + i_4 r_4 + i_1 r_6 = e \\ i_3 r_3 + i_5 r_5 - i_4 r_4 - i_2 r_2 = 0 \end{array} \right.$$

Неизвестные токи находятся в левой части системы, известные источники – в правой части. При большом количестве уравнений в системе ее удобнее решать, используя вычислительную технику, Информацию о решаемой системе необходимо уметь представить в матричной форме

$$A \cdot I = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ r_1 + r_6 & r_2 & 0 & r_4 & 0 \\ 0 & -r_2 & r_3 & -r_4 & r_5 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -J \\ J \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Существующие математические пакеты прикладных программ позволяют решать и матричные уравнения

$$I = A^{-1} \cdot B$$

Баланс мощностей в ЭЦ

Мощность, вырабатываемая источниками энергии ЭЦ (источниками напряжения и источниками тока), должна быть равна мощности потребляемой пассивными элементами цепи (сопротивлениями).

$$\sum (\pm e_k i_k + J_k u_{Jk}) = \sum u_{rk} i_k$$

Мощность, вырабатываемая источником напряжения

$$P_e = \pm e \cdot i$$

Знак + ставится, если стрелка ЭДС и стрелка тока на данном источнике совпадают, в противном случае -минус

Мощность, вырабатываемая источником тока

$$P_J = J \cdot u_J$$

u_J - Напряжение на зажимах источника тока, вычисляемое по направлению противоположному стрелке тока источника

Мощность , потребляемая электрическим сопротивлением

$$P_r = u_r \cdot i_r = i_r^2 \cdot r = \frac{u_r^2}{r}$$

Методы контурных токов и узловых потенциалов.

На ранних этапах развития расчетных методов были созданы косвенные методы снижающие порядок решаемых уравнений Кирхгофа. Характерным для косвенных методов анализа является то, что в уравнениях, описывающих электромагнитное состояние ЭЦ, в качестве переменных подлежащих определению, выступают не искомые токи и напряжения, а некоторые вспомогательные величины, например, узловые потенциалы и контурные токи. Искомые токи и напряжения определяют по найденным узловым потенциалам и контурным токам с использованием законов Кирхгофа и Ома. Рассмотрим более подробно эти методы.

Метод контурных токов

Метод контурных токов (МКТ) является одним из основных косвенных методов расчета ЭЦ, который находит широкое применение на практике. Сущность этого метода заключается в том, что в каждом независимом контуре протекает свой условный, так называемый «контурный» ток. Система уравнений для контурных токов получается как результат сведения законов Кирхгофа к уравнениям только для независимых контуров. Уравнения для контурных токов составляются по известным правилам. Решение этих уравнений и определяет величину контурных токов. Действительный ток ветви находится как алгебраическая сумма контурных токов, протекающих в этой ветви.

Порядок расчета электрических цепей методом КТ

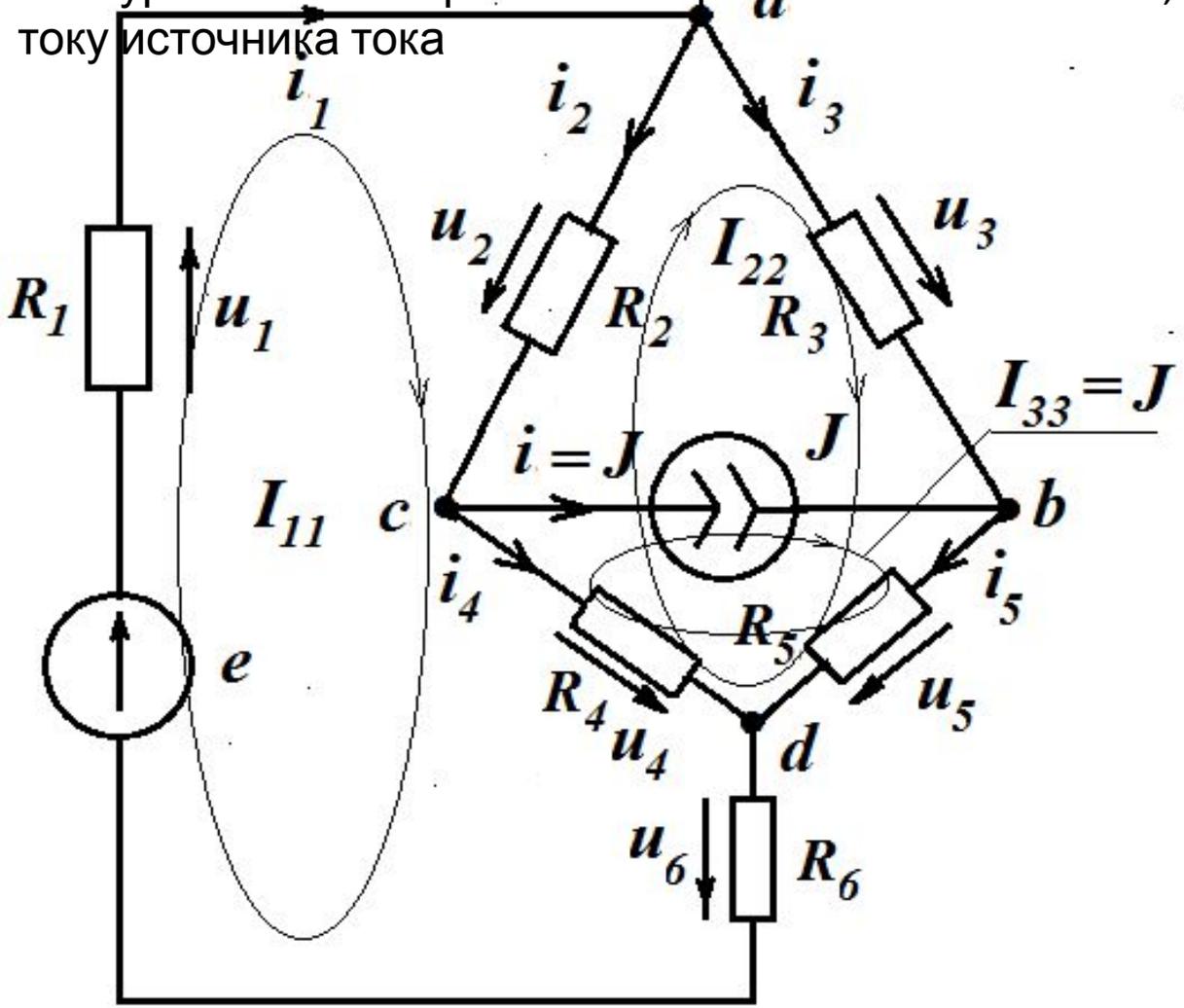
- Определяем независимые контуры и указываем направления отсчета контурных токов и действительных токов в ветвях .
- Определяем собственные, смежные сопротивления контуров и контурные эдс контуров.
- Составляем уравнения для контурных токов, используя стандартную форму записи этих уравнений. Решаем полученную систему уравнений и определяем контурные токи ЭЦ.
- Действительные токи определяются как алгебраическая сумма контурных токов, протекающих в этой ветви. При этом, если направление действительного тока совпадает с направлением контурного тока, то контурный ток берется с собственным знаком. В противном случае контурный ток берется с противоположным знаком

Рассмотрим ЭЦ, представленную на рис и произведем расчет этой ЭЦ методом КТ.

В схеме пять неизвестных токов (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5), четыре узла (a, b, c, d).

Независимых узлов - три ($q-1=3$), независимых контуров - два ($5-3=2$). Нарис. в выбранных независимых контурах протекают два неизвестных контурных тока.

Контурный ток J протекает через источник тока, его величина известна и равна току источника тока $I_{33} = J$.



Составляем уравнения для контурных токов, используя стандартную форму записи этих уравнений.

$$I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} = e_{11}$$

$$I_{22}R_{22} + I_{11}R_{21} + I_{33}R_{23} = e_{22}$$

В этих уравнениях:

R_{11} R_{22} собственные сопротивления контуров

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_4 + R_6$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5$$

R_{12} R_{13} R_{21} R_{23} смежные сопротивления контуров

$$R_{12} = -(R_2 + R_4)$$

$$R_{13} = -R_4$$

$$R_{23} = R_4 + R_5$$

$$R_{12} = R_{21}$$

e_{11} e_{22} Контурные ЭДС

$$e_{11} = e_1 \quad e_{22} = 0$$

Решение полученной системы алгебраических уравнений дает значение
контурных токов

$$I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} = e_{11} - JR_{13}$$

$$I_{22}R_{22} + I_{11}R_{21} = e_{22} - JR_{23}$$

Токи в ветвях определяются через найденные контурные токи

$$i_1 = I_{11} \quad i_3 = I_{22}$$

$$i_2 = I_{11} - I_{22} \quad i_4 = I_{11} - I_{22} - I_{33}$$

$$i_5 = I_{22} + I_{33}$$

Метод узловых потенциалов

Методом узловых потенциалов называют метод анализа электрических цепей, в которых неизвестными являются потенциалы узлов ЭЦ.

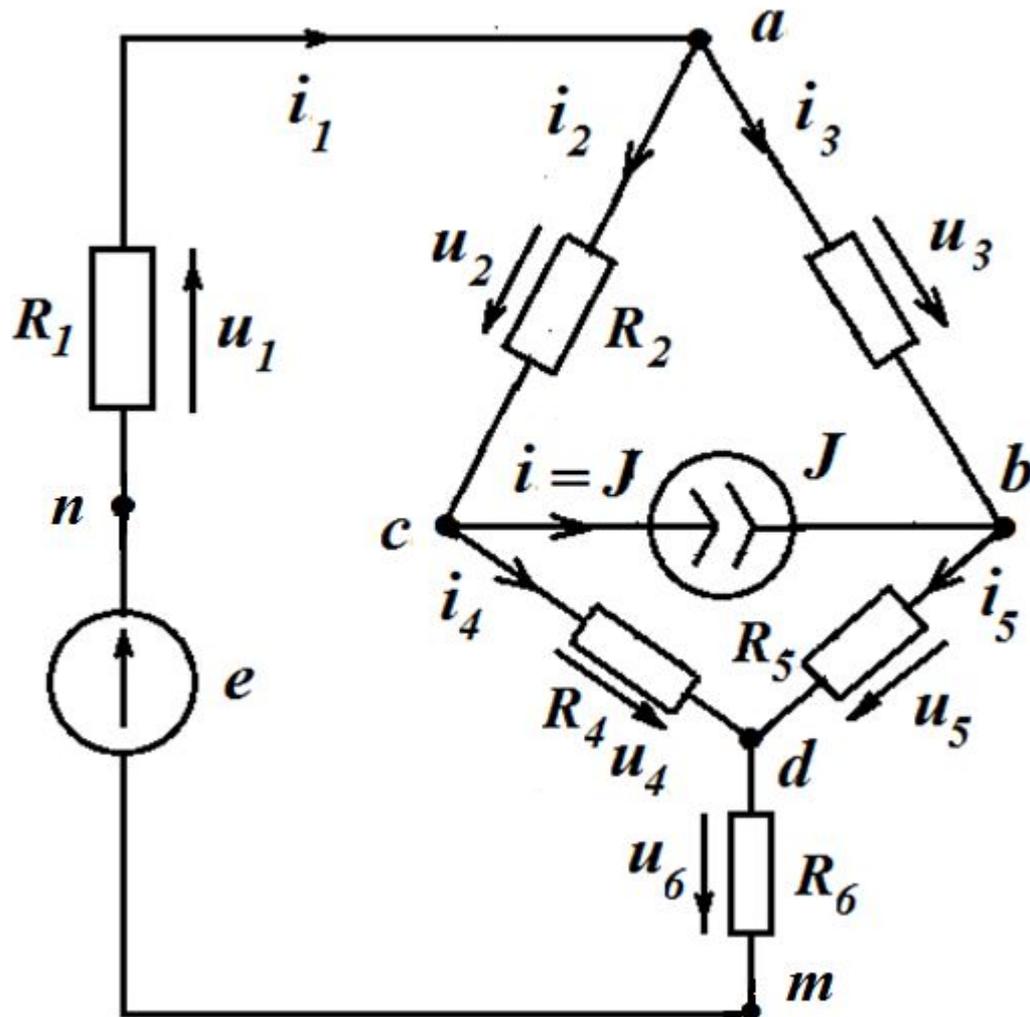
Потенциал одного из узлов называемого *базисным* принимается равным нулю. В качестве базисного узла схем обычно выбирают узел, в котором соединяется наибольшее количество элементов или, (при наличии в схеме идеальных источников напряжения) узел, с которым соединяется один из зажимов идеального источника напряжения.

Такой выбор базисного узла позволяет сократить число уравнений в системе, поскольку для узла, к которому подключен второй зажим источника напряжения потенциал оказывается равным ЭДС (со знаком $+$ или $-$), то есть оказывается известным.

Система уравнений для узловых потенциалов получается сведением системы уравнений Кирхгофа к уравнениям только для независимых узлов ЭЦ. Таким образом размерность решаемой системы уравнений уменьшается, что и является основным достоинством косвенных методов расчета ЭЦ.

Рассмотрим ЭЦ, представленную на рис. и произведем расчет этой ЭЦ методом УП.

Для изображенной ниже схемы независимых узлов - 3. Следовательно, по МУП составляется 3 уравнения. В качестве базисного примем узел d



$$\varphi_d = 0$$

Система уравнений для узловых потенциалов имеет следующий вид:

$$\varphi_a g_{11} - \varphi_b g_{12} - \varphi_c g_{13} = J_{11}$$

$$- \varphi_a g_{21} + \varphi_b g_{22} - \varphi_c g_{23} = J_{22}$$

$$- \varphi_a g_{31} - \varphi_b g_{32} + \varphi_c g_{33} = J_{33}$$

В этих уравнениях:

g_{11} g_{22} g_{33} собственные проводимости узлов

$$g_{11} = 1/(R_1 + R_6) + 1/R_2 + 1/R_3 \quad \text{проводимость узла } a$$

$$g_{22} = 1/R_5 + 1/R_3 \quad \text{проводимость узла } b$$

$$g_{33} = 1/R_2 + 1/R_4 \quad \text{проводимость узла } c$$

$g_{12} = g_{21}$ $g_{13} = g_{31}$ $g_{23} = g_{32}$ смежные проводимости узлов

$$g_{12} = 1/R_3 \quad g_{13} = 1/R_2 \quad g_{23} = 0$$

проводимость между узлами

a и b

проводимость между узлами

a и c

проводимость между узлами

b и c

J_{11} J_{22} J_{33} узловые токи

$$J_{11} = \frac{e}{R_1 + R_6} \quad \text{узловой ток узла} \quad \mathbf{a}$$

$$J_{11} = J \quad \text{узловой ток узла} \quad \mathbf{b}$$

$$J_{11} = -J \quad \text{узловой ток узла} \quad \mathbf{c}$$

При использовании метода узловых потенциалов предлагается следующая последовательность решения задач.

1. Определение количества независимых узлов и выбор направлений отсчета искомых токов в ветвях.
2. Выбор базисного узла.
3. Составление системы уравнений для узловых потенциалов .
4. Определение собственных и смежных проводимостей узлов и узловых токов ЭЦ.
5. Решение системы линейных алгебраических уравнений и определение узловых потенциалов .
6. Расчет токов в ветвях ЭЦ с использованием рассчитанных узловых потенциалов и законов Кирхгофа и Ома.

Токи в ветвях схемы находятся через узловые напряжения по следующему мнемоническому правилу: ток в ветви равен разности узлового потенциалов узла из которого он выходит минус узловой потенциал узла в который он входит , плюс э д с источника находящегося в этой ветви, если его стрелка совпадает со стрелкой тока и ли минус э д с источника , если его стрелка не совпадает со стрелкой тока и деленное на сопротивление ветви .

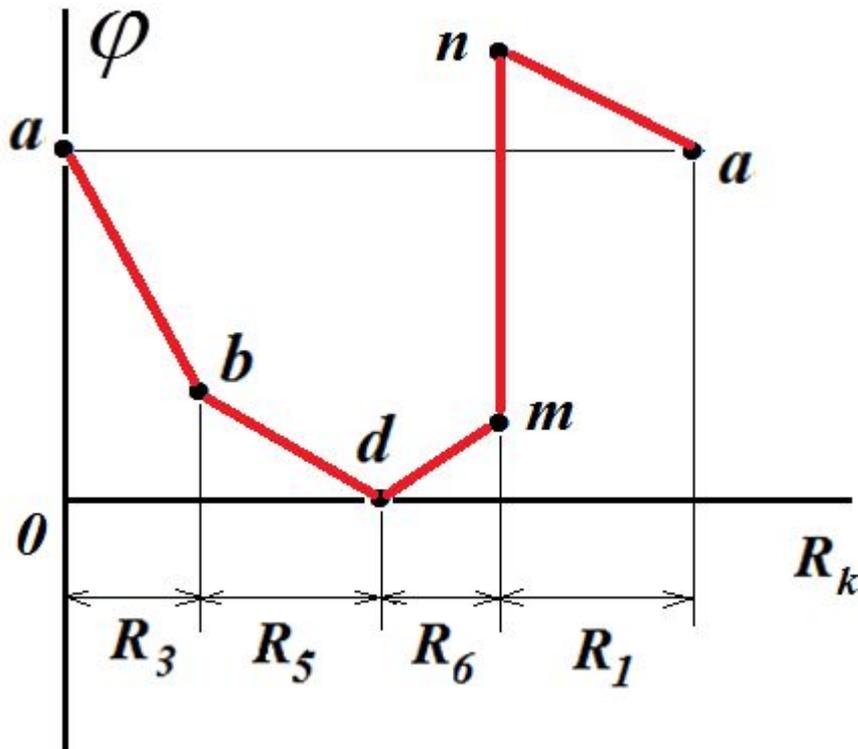
Например, для заданной ЭЦ ток i_1 равен

$$i_1 = \frac{\varphi_d - \varphi_a + e}{R_1 + R_6}$$

Потенциальная диаграмма

Потенциальная диаграмма – это распределение потенциалов ЭЦ вдоль некоторого контура этой цепи

Например, для выше представленной схемы потенциальная диаграмма контура $a b d m n a$ имеет вид:



R_k Суммарное сопротивление контура

Основные свойства и теоремы линейных электрических цепей

Принцип наложения

Ток в некоторой ветви линейной ЭЦ от действия всех источников схемы равен алгебраической сумме токов в этой ветви от поочередного действия каждого из источников

$$i_n = e_1 g_{n1} + e_2 g_{n2} + \dots + e_n g_{nn} + \dots + e_m g_{nm}$$

g_{nm} Взаимная проводимость ветвей n m

g_{nn} собственная проводимость ветви n

Принцип взаимности

Ток в ветви n линейной ЭЦ от действия источника схемы, находящегося в m ветви равен току в ветви m от действия источника перемещенного в ветвь n

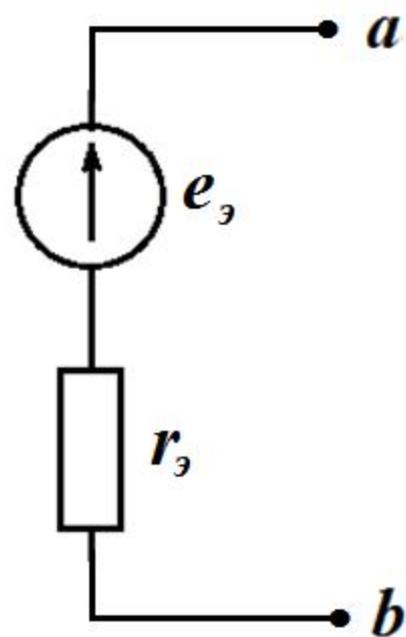
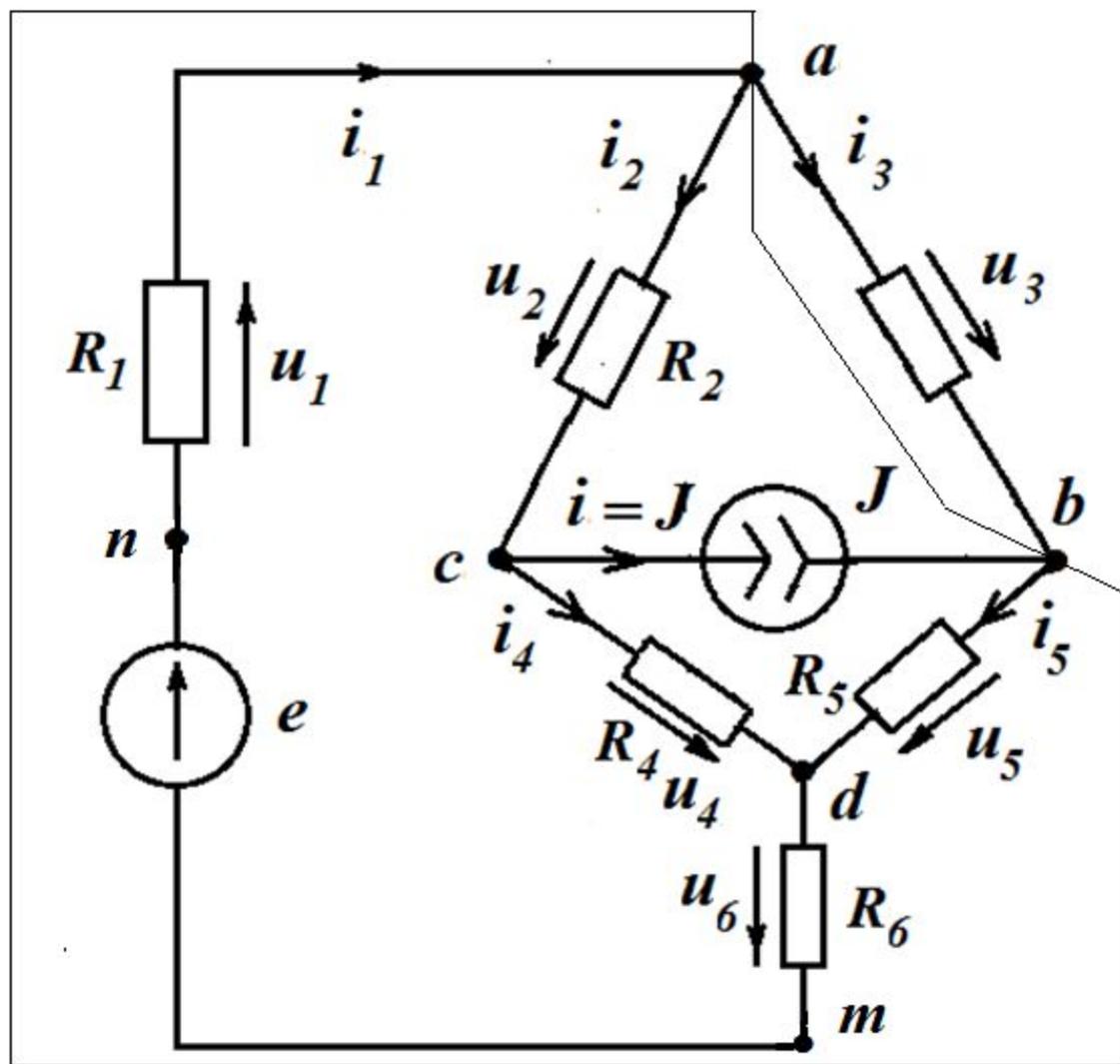
$$i_n = e_m g_{nm} \quad i_m = e_n g_{mn} \quad g_{nm} = g_{mn} \Rightarrow i_n = i_m$$

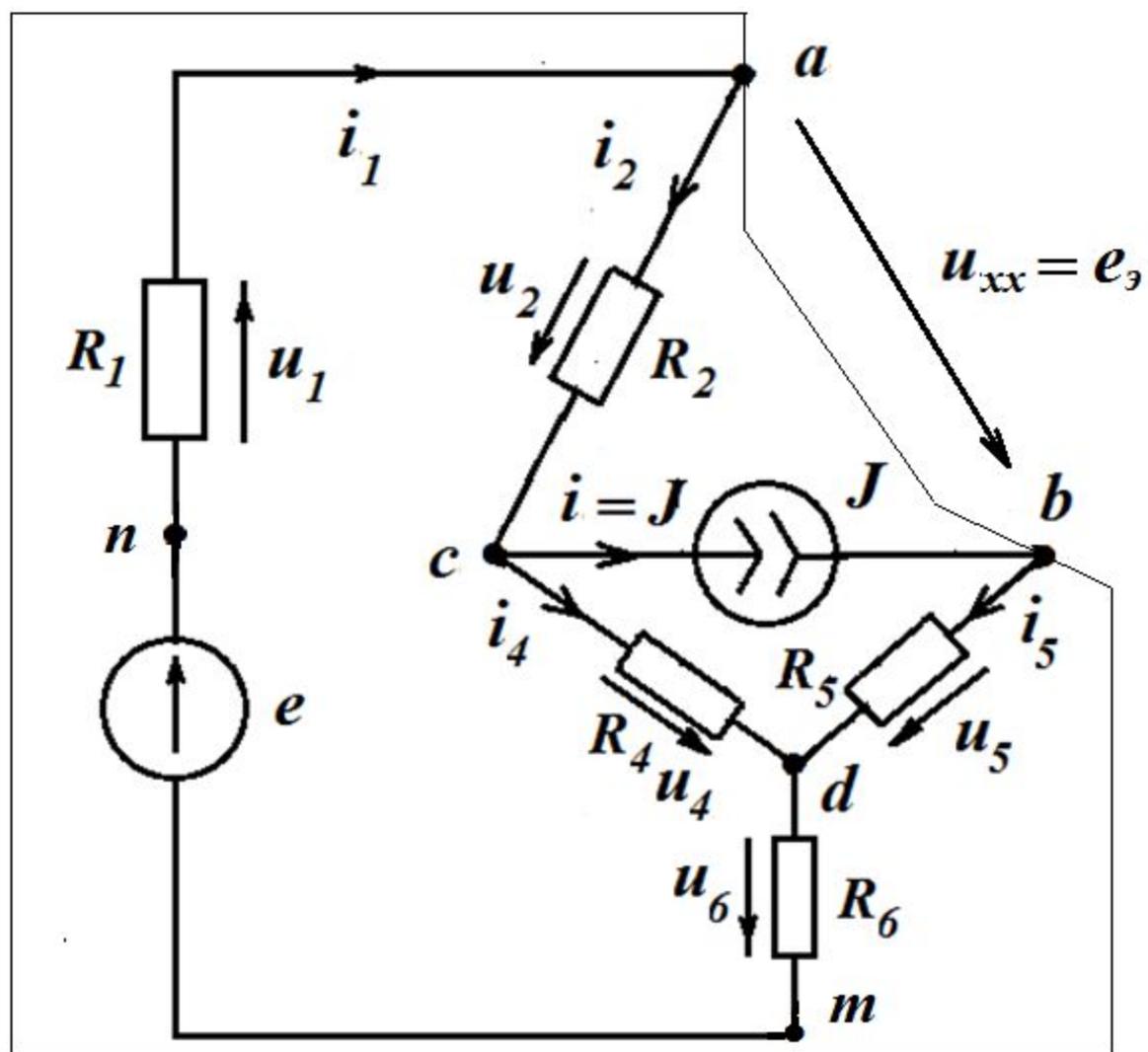
Теорема об эквивалентном источнике напряжения (теорема Гельмгольца-Тевенена)

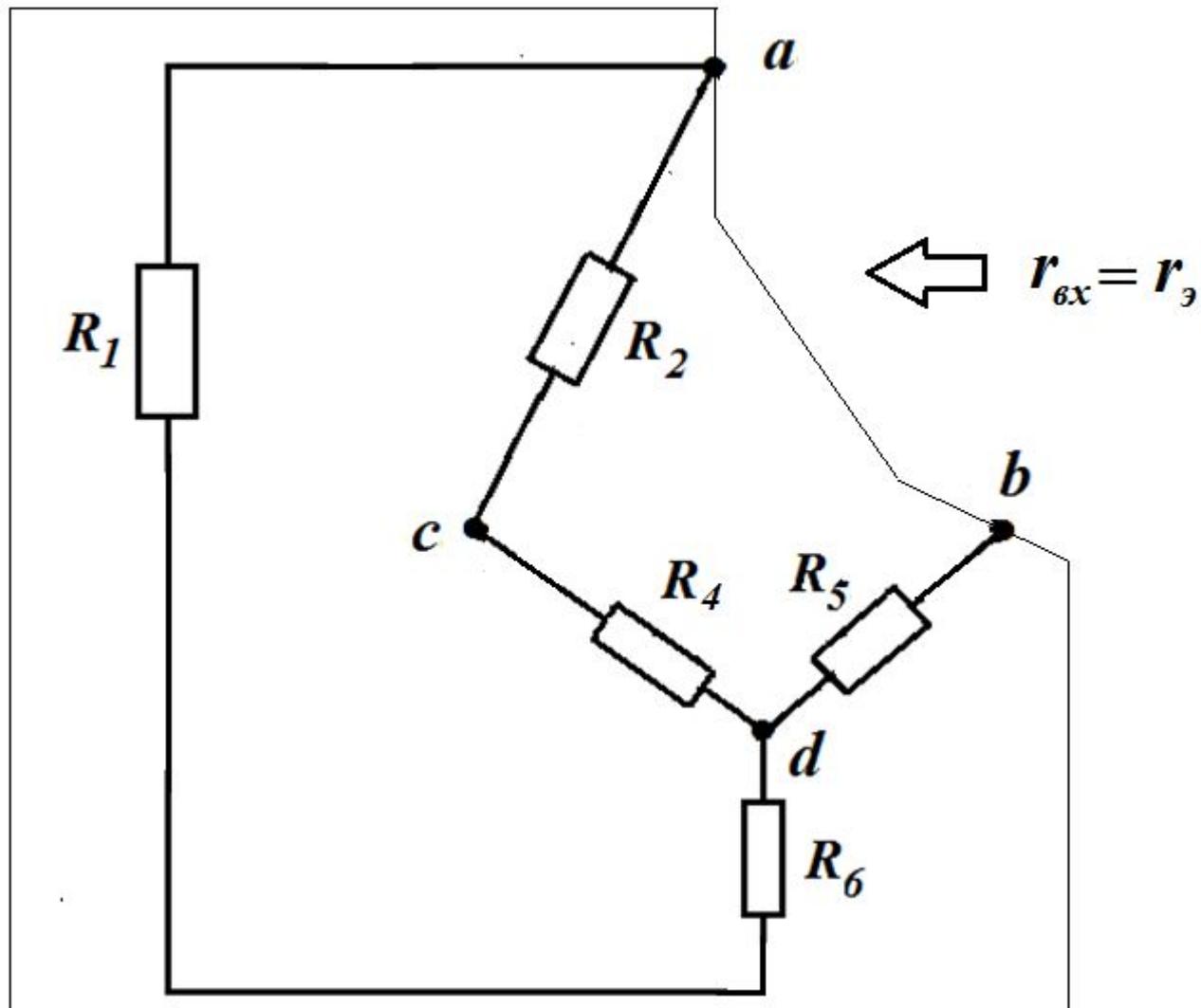
Линейная ЭЦ или ее часть относительно любых двух точек схемы может быть эквивалентно заменена источником напряжения с параметрами e_{ε} r_{ε}

ЭДС эквивалентного источника равна напряжению на зажимах точек преобразования и называемого напряжение холостого хода, внутреннее сопротивление эквивалентного источника равно входному сопротивлению схемы относительно точек преобразования при погашенных источниках внутри преобразуемой схемы.

Параметры эквивалентного источника могут быть рассчитаны аналитически или определены экспериментально, то есть опытным путем в результате измерений в схеме.



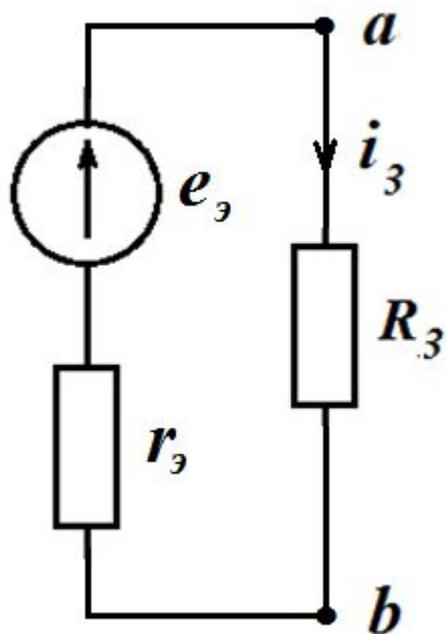




Метод эквивалентного генератора.

Теорема об эквивалентном источнике(его называют эквивалентный генератор) может быть использована для расчета тока в одной из ветвей ЭЦ. Для этого часть схемы относительно зажимов той ветви в которой требуется определить ток заменяется эквивалентным генератором. В результате получается простая цепь расчет ток в которой можно провести по закону Ома.

Для выше представленной схемы ток в третьей ветви в соответствии с методом эквивалентного генератора (МЭГ) равен



$$i_3 = \frac{e_3}{r_3 + R_3}$$