

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

решения (анализа) задачи ЛП

1. ПРИМЕР ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛП
2. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ
3. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЗАДАЧИ
4. БАЗИСНАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ
5. СИМПЛЕКСНАЯ ТАБЛИЦА
6. ОЦЕНКИ НЕБАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ
7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИМПЛЕКСНОЙ ТАБЛИЦЫ
8. ОПТИМАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА
9. АНАЛИЗ КОНЕЧНОЙ ТАБЛИЦЫ



1. Пример исходной задачи ЛП

$$\min(-5x_1 - 8x_2)$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 420$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 300$$

$$x \geq 0.$$



2. Каноническая форма задачи ЛП СТАНДАРТНАЯ

$$\max(5x_1 + 8x_2)$$

$$6x_1 + 7x_2 + x_3 = 420$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 80$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_5 = 300$$

$$x \geq 0.$$



Приведение к стандартному виду ограничения типа « \geq »

Пример ограничения на уровень
выручки:

$$7x_1 + 11x_2 \geq 255.$$

$$7x_1 + 11x_2 - x_3 = 255, \quad x_3 \geq 0,$$

$$x_3 = -255 - (7x_1 + 11x_2).$$



3. Матричная форма записи задачи

$$\begin{aligned} \max(cx), \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$m = 3, n = 5$$

$$c = (c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5) = (5 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxtimes \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 420 \\ 80 \\ 300 \end{pmatrix}.$$



5. БАЗИСНАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ ЛП

ПРЕДПОЧИТАЕМАЯ, СИМПЛЕКСНАЯ

$$\max(5x_1 + 8x_2)$$

$$x_3 = 420$$

$$x_4 = 80$$

$$x_5 = 300$$

$$L = 0$$

$$- (6x_1 + 7x_2)$$

$$- (x_1 + 2x_2)$$

$$- (3x_1 + 4x_2)$$

$$- (-5x_1 - 8x_2)$$

опорный план

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 420$$

$$x_4 = 80$$

$$x_5 = 300$$

$$L = 0$$



СИМПЛЕКСНОЕ ОТНОШЕНИЕ ДЛЯ НОВОЙ БАЗИСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

x_2

$$\max(5x_1 + 8x_2)$$

$$x_3 = 420 - (6x_1 + 7x_2)$$

$$x_4 = 80 - (x_1 + 2x_2)$$

$$x_5 = 300 - (3x_1 + 4x_2)$$

$$\theta_1 = \frac{420}{7} = 60$$

$$\theta_2 = \frac{80}{2} = 40$$

$$\theta_3 = \frac{300}{4} = 75$$



Решение разрешающего уравнения

$$x_4 = 80 - (x_1 + 2x_2)$$

относительно x_2

$$x_2 = 40 - \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \right)$$



5. СИМПЛЕКСНАЯ ТАБЛИЦА

с единичной матрицей

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	420	6	7	1	0	0
x_4	80	1	2	0	1	0
x_5	300	3	4	0	0	1
L	0	-5	-8	0	0	0



Ба. сокращенная
СИМПЛЕКСНАЯ ТАБЛИЦА

Б А З И С		$-x_1$	$-x_2$
x_3	420	6	7
x_4	80	1	2
x_5	300	3	4
f	0	-5	-8



6. ОЦЕНКИ НЕБАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Оценка Δ_i небазисной переменной x_i численно равна величине приращения текущего значения критерия, соответствующее единичному приращению данной переменной:

$$\Delta L = \Delta_i \sim \Delta x_i = +1.$$

В строке критерия оценки указаны с обратным знаком !



Небазисная
переменная, оценка
которой положительна,
называется
перспективной



Если текущий опорный план содержит перспективные переменные, то его можно улучшить путем включения в базис любой из имеющихся перспективных переменных.



7.1. Преобразование СИМПЛЕКСНОЙ ТАБЛИЦЫ

выбираем новую базисную переменную x_2

$$\Delta_1 = +5, \quad \Delta_2 = +8$$

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ
x_3	420	6	7	1	0	0	
x_4	80	1	2	0	1	0	
x_5	300	3	4	0	0	1	
L	0	-5	-8	0	0	0	



7.2. Преобразование СИМПЛЕКСНОЙ ТАБЛИЦЫ

нахождение разрешающей строки

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ
x_3	420	6	7	1	0	0	60
x_4	80	1	2	0	1	0	40
x_5	300	3	4	0	0	1	75
L	0	-5	-8	0	0	0	



Величина симплексного отношения указывает максимально возможное значение новой базисной переменной,

« разрешенное »

соответствующим уравнением.

Симплексное отношение для строки (уравнения) не существует, если в разрешающем столбце этой строки находится нуль или отрицательное число.



Признак неограниченности критерия

Если получена очередная таблица, для которой не найдено ни одного симплексного отношения, решение задачи ЛПТ не существует по причине неограниченности критерия.



7.1-2. Разрешающий элемент

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ
x_3	420	6	7	1	0	0	70
x_4	80	1	2	0	1	0	40
x_5	300	3	4	0	0	1	75
L	0	-5	-8	0	0	0	



7.3. Преобразование

разрешающей строки производится путем ее деления на разрешающий элемент

$$x_2 = 40 - (0,5 x_1 + 0,5 x_4)$$

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ
x_3							
x_2	40	0,5	1	0	0,5	0	
x_5							
L							



7.4a. Преобразование остальных строк

Из преобразуемой строки
вычитается
преобразованная разрешающая
строка,
умноженная на элемент
разрешающего столбца
преобразуемой строки.



7.4.6. Преобразование

строки x_3

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\ominus
x_3	420	6	7	1	0	0	
x_2	40	1/2	1	0	1/2	0	
$x_2 \times 7$	280	3,5	7	0	3,5	0	
x_5							
L							



7.4.в. Преобразована

строка x_3

БАЗИС	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ
x_3	140	2,5	0	- 3,5	0	
x_2	40	1/2	1	1/2	0	
x_5						
L						



7.4.г. Преобразования все строки

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ
x_3	140	2,5	0	1	-3,5	0	56
x_2	40	1/2	1	0	1/2	0	80
x_5	140	1	0	0	-2	1	140
L	320	-1	0	0	4	0	



8. ОПТИМАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

Б А З И С	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	56	1	0	0,4	-1,4	0
x_2	12	0	1	-0,2	1,2	0
x_5	84	0	0	-0,4	-0,6	1
L^*	376	0	0	0,4	2,6	0



8.а. ОПТИМАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	56	1	0	0,4	-1,4	0
x_2	12	0	1	-0,2	1,2	0
x_5	84	0	0	-0,4	-0,6	1
L^*	376	0	0	0,4	2,6	0



8.a. ОПТИМАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

		x_3	x_4
x_1	56	0,4	- 1,4
x_2	12	- 0,2	1,2
x_5	84	- 0,4	-0,6
L^*	376	0,4	2,6



Базисная форма

$$x_1 = 56 - (0,4x_3 - 1,4x_4)$$

$$x_2 = 12 - (-0,2x_3 + 1,2x_4)$$

$$x_5 = 84 - (-0,4x_3 - 0,6x_4)$$

$$L = 376 - (0,4x_3 + 2,6x_4)$$



Базисная форма

$$x_1 = 56 - x_3 + 1,4x_4$$

$$x_2 = 12 + 0,2x_3 - 1,2x_4$$

$$x_5 = 84 + 0,4x_3 + 0,6x_4$$

$$L = 376 - 0,4x_3 - 2,6x_4$$



8.а. ОПТИМАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Отн по x_3
x_1	56	1	0	0,4	-1,4	0	56
x_2	12	0	1	-0,2	1,2	0	-60
x_5	84	0	0	-0,4	-0,6	1	-24
L^*	376	0	0	0,4	2,6	0	0



8.6. ОПТИМАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

Б А З И С		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Отн по x_4
x_1	56	1	0	0,4	-1,4	0	-40
x_2	12	0	1	-0,2	1,2	0	10
x_5	84	0	0	-0,4	-0,6	1	-24
L^*	376	0	0	0,4	2,6	0	0



9.а. Анализ конечной таблицы

ПРИЗНАК ОПТИМАЛЬНОСТИ

Если все небазисные переменные имеют отрицательную оценку, то текущий опорный

план оптимален.

В финальной таблице имеем:

$$\Delta_3 = -0,4 < 0;$$

$$\Delta_4 = -2,6 < 0.$$

x^*

=

$$\begin{bmatrix} 56 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 84 \end{bmatrix}$$



9.6. Анализ конечной таблицы

ПРИЗНАК **ЕДИНСТВЕННОСТИ**

ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА

Если в оптимальном опорном плане все небазисные переменные имеют ненулевую оценку, то этот план является

ЕДИНСТВЕННЫМ

ОПТИМАЛЬНЫМ.



9.в. Анализ конечной таблицы

ПРИЗНАК множества оптимальных планов

Если в оптимальном опорном плане имеются небазисные переменные с нулевой оценкой, то существует бесконечно много оптимальных планов.



9.г. Анализ оценки дополнительной переменной

x_3 — остаток ресурса №1

Небазисная переменная $x_3^* = 0$.

Ее оценка $\Delta_3 = -0,4$.

Увеличение этой переменной, например
придание ей значения

$$x_3 = 1,$$

соответствует уменьшению использования
ресурса. Из имеющихся 420 единиц будет
затрачено

$$420 - 1 = 419 \text{ единиц.}$$



**Оптимальное значение критерия при этом
получит приращение**

$$\Delta L = - 0,4.$$

и станет равным

$$376 - 0,4 = 375,6$$

**Итак, при уменьшении использования
ресурса на единицу оптимальное**

значение критерия уменьшится на 0,4.



Напротив, увеличение использования этого ресурса на 1, приведет к изменению оптимального значения критерия на

$$\Delta L = + 0,4.$$

Таким образом, оценка дополнительной переменной первого ограничения, взятая с **обратным** знаком, указывает численную меру

чувствительности критерия к изменению доступного запаса ресурса. Эта величина называется

«двойственная оценка ресурса».



ТЕМА
1-ГО ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

**«ГРАФИЧЕСКАЯ
МОДЕЛЬ
ЗАДАЧИ ЛТП»**

