

Эконометрика

Тема 6

Тема 6. Временные ряды и прогнозирование

- 1) Общие сведения о временных рядах и задачах их анализа.**
- 2) Стационарные временные ряды и их характеристики.
Автокорреляционная функция.**
- 3) Аналитическое выравнивание (сглаживание) временного ряда (выделение неслучайной компоненты).**
- 4) Прогнозирование на основе моделей временных рядов.**
- 5) Понятие об авторегрессионных моделях и моделях скользящей средней.**

1. Общие сведения о временных рядах и задачах их анализа

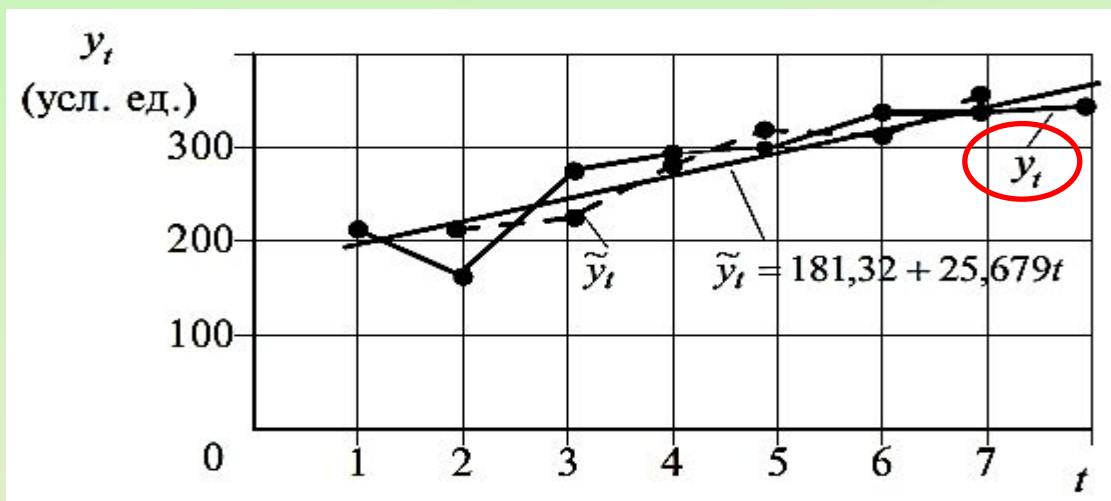
Под **временным рядом (динамическим рядом или рядом динамики)** в экономике подразумевается последовательность наблюдений некоторого признака (случайной величины) Y в последовательные моменты времени.

Отдельные наблюдения называются **уровнями ряда**, обозначаемые y_t ($t = 1, 2, \dots, n$), где n - число уровней.

Пример временного ряда (спрос на некоторый товар за восьмилетний период (усл. ед.)):

Год, t	1	2	3	4	5	6	7	8
Спрос, y_t	213	171	291	309	317	362	351	361

**График
временного
ряда спроса y_t :**



1. Общие сведения о временных рядах и задачах их анализа

Экономический временной ряд y_t (в общем виде) как сумма его составляющих:

$$y_t = u_t + v_t + c_t + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, n),$$

где **u_t - тренд**, плавно меняющаяся компонента, описывающая чистое влияние долговременных факторов, (например, рост населения, экономическое развитие, изменение структуры потребления и т. п.);

v_t - сезонная компонента, отражающая повторяемость экономических процессов в течение не очень длительного периода (года, иногда месяца, недели и т. д., например, объем продаж товаров или перевозок пассажиров в различные времена года);

c_t - циклическая компонента, отражающая повторяемость экономических процессов в течение длительных периодов (например, влияние волн экономической активности Кондратьева, демографических «ям», циклов солнечной активности и т. п.);

ε_t - случайная компонента, отражающая влияние не поддающихся учету и регистрации случайных факторов.

Три компоненты u_t , v_t , c_t являются **закономерными**, неслучайными! ₄

1. Общие сведения о временных рядах и задачах их анализа

Случайным процессом (или случайной функцией) $Y(t)$ неслучайного аргумента t называется функция, которая при любом значении t является случайной величиной.

Важнейшая классическая **задача** при исследовании экономических временных рядов - выявление и статистическая оценка **основной тенденции развития** изучаемого процесса и отклонений от нее.

Если выборка $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$ рассматривается как **одна из реализаций** случайной величины Y , временной ряд $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$ рассматривается как **одна из реализаций (траекторий)** случайного процесса $Y(t)$.

Отличия временного ряда y_t ($t = 1, 2, \dots, n$) от последовательности наблюдений $y_1, y_2, \dots, y_n$, образующих случайную выборку:

- 1) в отличие от элементов случайной выборки члены временного ряда, как правило, **не являются статистически независимыми**;
- 2) члены временного ряда **не являются одинаково распределенными**.

1. Общие сведения о временных рядах и задачах их анализа

Основные этапы анализа временных рядов:

- ✓ графическое *представление и описание* поведения временного ряда;
- ✓ *выделение и удаление* закономерных (неслучайных) составляющих временного ряда (тренда, сезонных и циклических составляющих);
- ✓ *сглаживание и фильтрация* (удаление низко- или высокочастотных составляющих временного ряда);
- ✓ *исследование случайной составляющей* временного ряда, построение и проверка адекватности математической модели для ее описания;
- ✓ *прогнозирование развития* изучаемого процесса на основе имеющегося временного ряда;
- ✓ *исследование взаимосвязи* между различными временными рядами.

1. Общие сведения о временных рядах и задачах их анализа

Методы анализа временных рядов

```
graph TD; A[Методы анализа временных рядов] --- B[Корреляционный анализ]; A --- C[Спектральный анализ]; A --- D[Модели авторегрессии]; A --- E[Модели скользящей средней];
```

Корреляц
ионный
анализ

Спектрал
ьный
анализ

Модели
авторегре
ссии

Модели
скользящ
ей
средней

2. Стационарные временные ряды и их характеристики. Автокорреляционная функция.

Стационарные временные ряды - ряды, вероятностные свойства которых не изменяются во времени.

Временной ряд y_t ($t = 1, 2, \dots, n$) называется **строго стационарным** (или стационарным в узком смысле), если **совместное распределение вероятностей n наблюдений $y_1, y_2, \dots, y_n$ такое же, как и n наблюдений $y_{1+h}, y_{2+h}, \dots, y_{n+h}$ при любых n, t и h** . Т.о., свойства строго стационарных рядов y_t не зависят от момента t , т. е. закон распределения и его числовые характеристики **не зависят от t** .



Математическое ожидание $a_y(t) = a$, среднее квадратическое отклонение

$\sigma_y(t) = \sigma$ могут быть оценены для y_t ($t = 1, 2, \dots, n$) по формулам:

$$\bar{y}_t = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n}$$

$$s_t^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2}{n}$$

2. Стационарные временные ряды и их характеристики. Автокорреляционная функция.

Простейший **пример** стационарного временного ряда, у которого математическое ожидание равно нулю, а ошибки ε_t некоррелированы, является **«белый шум»**. Следовательно, можно сказать, что возмущения (ошибки) ε_t в классической линейной регрессионной модели образуют белый шум, а в случае их нормального распределения — **нормальный (гауссовский) белый шум**.

Степень тесноты связи между последовательностями наблюдений временного ряда $y_1, y_2, \dots, y_n$ и $y_{1+h}, y_{2+h}, \dots, y_{n+h}$ (сдвинутых относительно друг друга на h единиц, или, как говорят, с лагом h) может быть определена с помощью **коэффициента автокорреляции** ($h = \tau$):

$$\rho(\tau) = \frac{M[(y_t - a)(y_{t+\tau} - a)]}{\sigma_x(t)\sigma_x(t + \tau)} = \frac{M[(y_t - a)(y_{t+\tau} - a)]}{\sigma^2}$$

Зависимость $\rho(\tau)$ - **автокорреляционная функция**

2. Стационарные временные ряды и их характеристики. Автокорреляционная функция.

Статистической оценкой $\rho(\tau)$ является **выборочный коэффициент автокорреляции** $r(\tau)$:

$$r(\tau) = \frac{(n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t y_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}}{\sqrt{(n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \right)^2} \sqrt{(n - \tau) \sum_{t=1+\tau}^n y_{t+\tau}^2 - \left(\sum_{t=1+\tau}^n y_{t+\tau} \right)^2}}$$

Функция $r(\tau)$ - **выборочная автокорреляционная функция**, а ее график - **коррелограмма**.

При расчете $r(\tau)$ обычно принимают $\tau \leq n/4$.

Для стационарного временного ряда с увеличением лага h взаимосвязь членов временного ряда y_t и y_{t+h} ослабевает и автокорреляционная функция

$\rho(\tau)$ **должна убывать (по абсолютной величине)**. Для $r(\tau)$ это свойство может нарушаться.

Также рассматриваются **частная автокорреляционная функция**
выборочная частная автокорреляционная функция

$$r_{\text{част}}(\tau)$$

$$\rho_{\text{част}}(\tau)$$

3. Аналитическое выравнивание (сглаживание) временного ряда (выделение неслучайной компоненты).

Для **выделения неслучайной компоненты** временного ряда наиболее часто используются следующие функции:

линейная	—	$f(t) = b_0 + b_1 t;$
полиномиальная	—	$f(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n;$
экспоненциальная	—	$f(t) = e^{b_0 + b_1 t};$
логистическая	—	$f(t) = \frac{a}{1 + b e^{-ct}};$
Гомперца	—	$\log_c f(t) = a - b r^t, \text{ где } 0 < r < 1.$

При выборе соответствующей функции $f(t)$ используют **содержательный анализ** (который может установить характер динамики процесса), **визуальные наблюдения** (на основе графического изображения временного ряда).

Из двух функций предпочтение обычно отдается той, при которой **меньше сумма квадратов отклонений фактических данных от расчетных** на основе этих функций. Но при прочих равных условиях предпочтение следует отдавать **более простым функциям**.

3. Аналитическое выравнивание (сглаживание) временного ряда (выделение неслучайной компоненты).

Для выявления основной тенденции *чаще всего используется МНК*. Значения временного ряда y_t рассматриваются как *зависимая переменная*, а время t - как *объясняющая*:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t,$$

где ε_t - возмущения, удовлетворяющие *основным предпосылкам регрессионного анализа*: т. е. представляющие *независимые и одинаково распределенные* случайные величины, распределение которых предполагаем *нормальным*.

Если функция $f(t)$ *нелинейная* и не получается применить методы линеаризации модели, то параметры тренда находят *из соответствующих систем нормальных уравнений* для нелинейных функций $f(t)$, либо с помощью *специальных процедур оценивания*.

3. Аналитическое выравнивание (сглаживание) временного ряда (выделение неслучайной компоненты).

Другой метод выравнивания (сглаживания) временного ряда - **метод скользящих средних**: основан на переходе *от начальных значений* членов ряда *к их средним значениям на интервале времени*, длина которого определена заранее.

Ряд скользящих средних ведет себя *более гладко*, чем исходный ряд, из-за *усреднения отклонений ряда*.

Для усреднения могут быть использованы *средняя арифметическая (простая и с некоторыми весами), медиана и др.*

Скользящие средние, рассчитываемые по формуле **средней арифметической**:

$$\tilde{y}_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} y_i}{m},$$

когда **интервал сглаживания** $m=(2p-1)$ - нечетное число

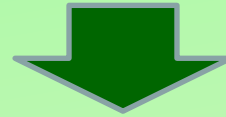
4. Прогнозирование на основе моделей временных рядов.

Если возмущения $\varepsilon_t (t = 1, 2, \dots, n)$ в модели временного ряда y_t удовлетворяют предпосылкам регрессионного анализа, т. е. **условиям нормальной классической регрессионной модели**, то прогнозирование развития изучаемого процесса проводится **аналогично моделям парной и множественной линейной регрессии** (с определением **точечных и интервальных оценок $\hat{Y}$** для значений объясняющих переменных X , расположенных вне пределов обследованного диапазона значений X).

Прогноз развития изучаемого процесса на основе **экстраполяции временных рядов** может оказаться эффективным, в рамках **краткосрочного**, в крайнем случае, **среднесрочного** периода прогнозирования.

5. Понятие об авторегрессионных моделях и моделях скользящей средней.

Не всегда удастся подобрать адекватную модель, для которой ряд возмущений ε_t будет удовлетворять *основным предпосылкам* регрессионного анализа.



$$y_t = f(t) + \varepsilon_t$$

переменные

лаговые

случайными величинами.

модель AR (p)

модель MA (q)

модель ARMA (p, q)

5. Понятие об авторегрессионных моделях и моделях скользящей средней.

Авторегрессионная модель p -го порядка (или модель AR (p)) имеет вид:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, n),$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ - некоторые константы

Модель описывает изучаемый процесс в момент t *в зависимости от его значений в предыдущие моменты $t-1, t-2, \dots, t-p$.*

Авторегрессионная модель 1-го порядка (или модель AR (1) - **марковский случайный процесс**):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (t = 1, 2, \dots, n)$$

Модель AR (p) *удовлетворяет условиям классической модели регрессии*, поэтому коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ могут быть получены *с помощью МНК* и для проведения *прогноза* используются методы классической модели.

5. Понятие об авторегрессионных моделях и моделях скользящей средней.

Модель скользящей средней q -го порядка (или модель МА (q)), имеет вид:

$$y_t = \varepsilon_t + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \gamma_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}$$

В модели МА (q) моделируемая величина задается линейной функцией *от возмущений (ошибок) в предыдущие моменты времени*

Комбинированная **авторегрессионная модель скользящей средней порядков p и q соответственно** (или модель ARMA (p, q)) имеет вид:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}$$

Использование соответствующих авторегрессионных моделей для прогнозирования экономических показателей, т. е. **автопрогноз** может оказаться *весьма эффективным* (как правило, *в краткосрочной перспективе*).

Вопросы изученные в Теме 6:

- 1) Общие сведения о временных рядах и задачах их анализа**
- 2) Стационарные временные ряды и их характеристики.
Автокорреляционная функция**
- 3) Аналитическое выравнивание (сглаживание) временного ряда (выделение неслучайной компоненты)**
- 4) Прогнозирование на основе моделей временных рядов**
- 5) Понятие об авторегрессионных моделях и моделях скользящей средней**