

**Рациональные,
иррациональные
неравенства.**

**Основные приемы их
решения**

Иррациональные неравенства

Определение. **Иррациональные неравенства** – это неравенства, содержащие переменную под знаком корня.

$$\sqrt{x^3 + 26} > x + 2; \quad \sqrt{5 - y} \leq 3;$$

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0.$$

Подходы к решению иррациональных неравенств

Иррациональные неравенства решаются с помощью перехода к равносильным рациональным неравенствам или их системам.

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
1	$f(x) > g(x)$	$f^{2n+1}(x) > g^{2n+1}(x), n \in N$
2	$f(x) > g(x) \geq 0$	$\left[\begin{array}{l} f^{2n}(x) > g^{2n}(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right.$

Подходы к решению иррациональных неравенств

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
3	$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$
4	$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$
5	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$

Подходы к решению иррациональных неравенств

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
1	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a \geq 0$	$f(x) \geq a^2$
2	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a < 0$	$f(x) \geq 0$
3	$\sqrt{f(x)} \leq a, \quad a \geq 0$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq a^2 \end{cases}$
4	$\sqrt{f(x)} < a, \quad a \leq 0$	Нет решений ($x \in \emptyset$)

Решение иррациональных неравенств

Пример 1. $\sqrt[3]{x^3 + 26} > x + 2$

$$x^3 + 26 > (x + 2)^3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)(x + 3) < 0 \quad \Leftrightarrow x \in (-3; 1).$$

Пример 2. $\sqrt{5 - y} \leq 3$

$$\begin{cases} 5 - y \geq 0 \\ 5 - y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 5 \\ y \geq -4 \end{cases} \quad y \in [-4; 5]$$

Решение иррациональных неравенств методом интервалов

Решим неравенства:

1.

$$\sqrt{x-5} < 1$$

2.

$$\sqrt{x+7} > x+1$$

3.

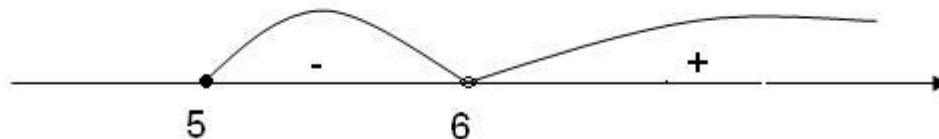
$$(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \leq 0$$

Решение первого неравенства

$$1. \sqrt{x-5} < 1 \quad \text{равносильно} \quad \sqrt{x-5} - 1 < 0$$

Шаг 1. Рассмотрим иррациональную функцию $f(x) = \sqrt{x-5} - 1$
и найдем область определения $x - 5 \geq 0$
 $x \geq 5$ - область определения $\sqrt{x-5} - 1 = 0$

Шаг 2. Вычислим нули функции $\sqrt{x-5} = 1$
 $(\sqrt{x-5})^2 = 1^2$
 $x - 5 = 1$



$x = 6$ - нуль функции

$$f(5.5) = \sqrt{5.5-5} - 1 = \sqrt{0.5} - 1 < 0$$

$$f(7) = \sqrt{7-5} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$$

Ответ $x \in [5; 6)$

2. $\sqrt{x+7} > x+1$ равносильно

$$\sqrt{x+7} - x - 1 > 0$$

Шаг 1. Рассмотрим иррациональную функцию

и найдем область ее определения

$$f(x) = \sqrt{x+7} - x - 1$$

$x \geq -7$ - область определения

$$x+7 \geq 0$$

Шаг 2. Вычислим нули функции

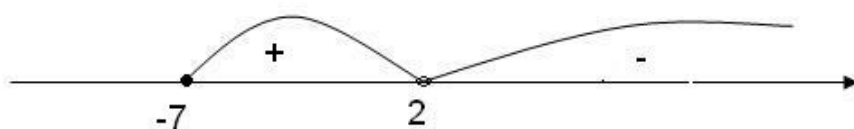
$$\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$$

$$\sqrt{x+7} = x+1$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+7})^2 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+7 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x_1 = -3; x_2 = 2 \end{cases}$$

$x = 2$ - нуль функции

Шаг 3



$$f(-6) = \sqrt{-6+7} - (-6) - 1 = 1 + 6 - 1 = 6 > 0$$

$$f(9) = \sqrt{9+7} - 9 - 1 = 4 - 10 = -6 < 0$$

Ответ $x \in [-7; 2)$

$$(x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \leq 0$$

Шаг1.рассмотрим иррациональную функцию

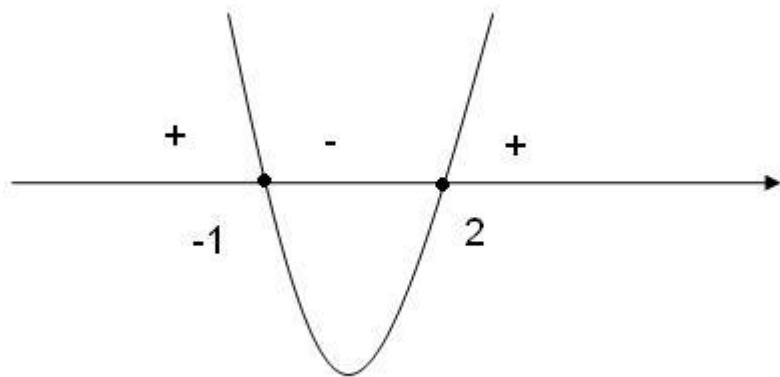
Найдем область определения

$$f(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$



Область определения $x \leq -1$ и $x \geq 2$

Шаг 2. Вычислим нули функции

$$(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

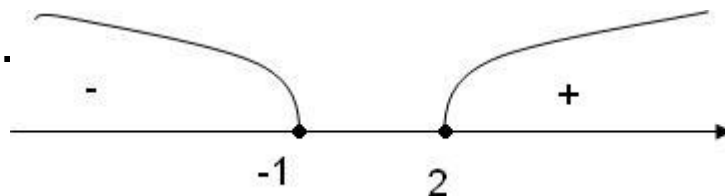
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 2$$

-1; 1; 2.

Шаг 3.



$$f(-3) < 0$$

$$f(3) > 0$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1]$ и $x = 2$

Алгоритм решения иррациональных неравенств:

1. Введение иррациональной функции;
нахождение области определения
функции.
2. Вычисление нулей функции.
3. На координатной прямой:
 - отмечаем нули функции, принадлежащие
области определения;
 - определяем знак функции на каждом
промежутке;
 - с учетом знака неравенства выписываем
ответ.

Решение иррациональных неравенств

Пример 3.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0 \iff \sqrt{x^2 + 4x - 5} > 2x - 3 \\
 & \iff \left[\begin{array}{l} 2x - 3 < 0 \\ x^2 + 4x - 5 \geq 0 \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} x < 1,5 \\ (x - 1)(x + 5) \geq 0 \end{array} \right] \\
 & \iff \left[\begin{array}{l} 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 > (2x + 3)^2 \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} x \geq 1,5 \\ 3x^2 - 16x + 14 < 0 \end{array} \right] \\
 & \iff \left[\begin{array}{l} x < 1,5 \\ (x - 1)(x + 5) \geq 0 \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} x \geq 1,5 \\ \left(x - \frac{8 + \sqrt{22}}{3}\right)\left(x - \frac{8 - \sqrt{22}}{3}\right) < 0 \end{array} \right] \\
 & \iff x \in (-\infty; -5] \cup \left[1; \frac{8 + \sqrt{22}}{3}\right)
 \end{aligned}$$
