

Эконометрика

Тема 7

Тема 7. Обобщенная линейная модель. Гетероскедастичность и автокорреляция остатков

- 1) Обобщенная линейная модель множественной регрессии. Понятие об обобщенном методе наименьших квадратов.**
- 2) Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.**
- 3) Автокорреляция остатков временного ряда. Положительная и отрицательная автокорреляция.**
- 4) Статистика Дарбина-Уотсона. Тесты на наличие автокорреляции.**
- 5) Устранение автокорреляции. Идентификация временного ряда. Авторегрессионная модель первого порядка.**

1. Обобщенная линейная модель множественной регрессии. Понятие об обобщенном методе наименьших квадратов.

Предпосылки классической
линейной модели
множественной регрессии:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

1. В модели ε - случайный вектор, X - неслучайная (детерминированная) матрица;
2. $M(\varepsilon) = \mathbf{0}_n$;
3. $\sum_{\varepsilon} = M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 E_n$;
4. $r(X) = p+1 < n$ (невырожденность матрицы (независимость столбцов) значений объясняющих переменных).

Предпосылки обобщенной
линейной модели
множественной регрессии:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

1. В модели - случайный вектор, X - неслучайная (детерминированная) матрица;
2. $M(\varepsilon) = \mathbf{0}_n$;
3. $\sum_{\varepsilon} = M(\varepsilon\varepsilon') = \Omega$, где Ω - положительно определенная матрица
4. $r(X) = p+1 < n$ (невырожденность матрицы (независимость столбцов) значений объясняющих переменных).

**Неодинаковая
предпосылка**

1. Обобщенная линейная модель множественной регрессии. Понятие об обобщенном методе наименьших квадратов.

Т.е., в отличие от классической, в обобщенной модели *ковариации и дисперсии объясняющих переменных* могут быть произвольными.

Оценка $b = (X'X)^{-1} X'Y$, полученная для классической модели с помощью классического ММК, *остается справедливой* для обобщенной модели, *несмещенной* и *состоятельной*

Но классический ММК в обобщенной линейной регрессионной модели *дает смещенную оценку ковариационной матрицы* $\sum_b$ вектора оценок b

Оценка b , определенная как $b = (X'X)^{-1} X'Y$, *не будет оптимальной в смысле теоремы Гаусса—Маркова.*

Необходимость использования **обобщенного метода наименьших квадратов.**

**1. Обобщенная линейная модель множественной регрессии.
Понятие об обобщенном методе наименьших квадратов.**

Теорема Айткена. В классе линейных несмещенных оценок вектора β для обобщенной регрессионной модели оценка

$$b^* = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y$$

имеет **наименьшую ковариационную матрицу.**



Решение вопроса об **эффективности** линейной несмещенной оценки вектора β для обобщенной регрессионной модели (**обобщенный МНК**)

При выполнении предпосылки $\sum \varepsilon = \Omega = \sigma^2 E_n$, оценка **обобщенного МНК b^* совпадает** с оценкой **классического МНК b**

1. Обобщенная линейная модель множественной регрессии. Понятие об обобщенном методе наименьших квадратов.

Оценка $b^* = (X_*' X_*)^{-1} X_*' Y_*$ является **точкой минимума по b** остаточной суммы квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^n e_{i*}^2 = e_*' e_* = (Y_* - X_* b)' (Y_* - X_* b)$$

Можно показать, что $S = e' \Omega^{-1} e$, тогда оценка b^* обобщенного МНК может быть определена **как точка минимума обобщенного критерия** $e' \Omega^{-1} e$

Для обобщенной регрессионной модели (в отличие от классической) коэффициент детерминации вычисленный по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{(Y - Xb^*)' (Y - Xb^*)}{(Y - \bar{Y})' (Y - \bar{Y})}$$

не является удовлетворительной мерой качества модели.

Для применения обобщенного МНК необходимо знание ковариационной матрицы вектора возмущений Ω , что встречается **крайне редко**



Для **практической реализации** обобщенного МНК необходимо вводить **дополнительные условия на структуру матрицы Ω**

2. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.

Равенство дисперсий возмущений (ошибок) регрессии ε_i (**гомоскедастичность**) является **существенным условием** линейной классической регрессионной модели множественной регрессии: $\sum \varepsilon = \sigma^2 E_n$

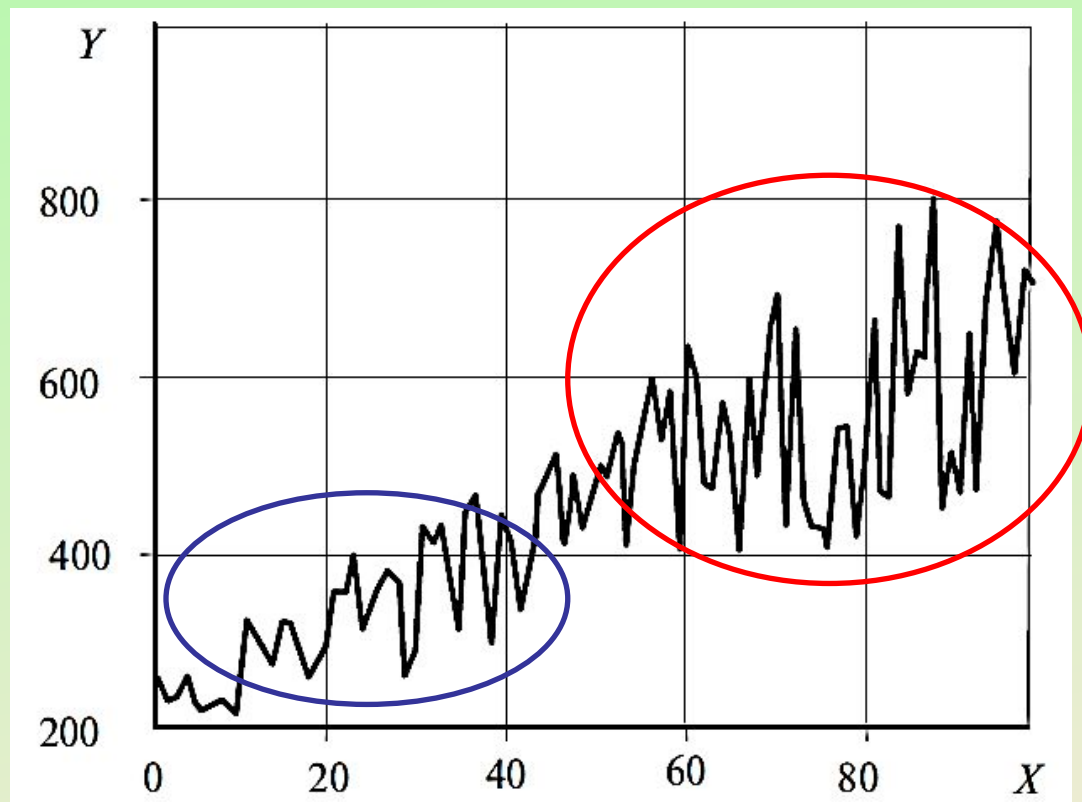
На практике это условие **нередко нарушается**, т.е. существует **гетероскедастичность** модели.

Пример гетероскедастичности в модели:

зависимость размера оплаты труда Y сотрудников фирмы от разряда X - **вариация** размера оплаты труда сотрудников высоких уровней **значительно превосходит** его вариацию для сотрудников низких уровней.

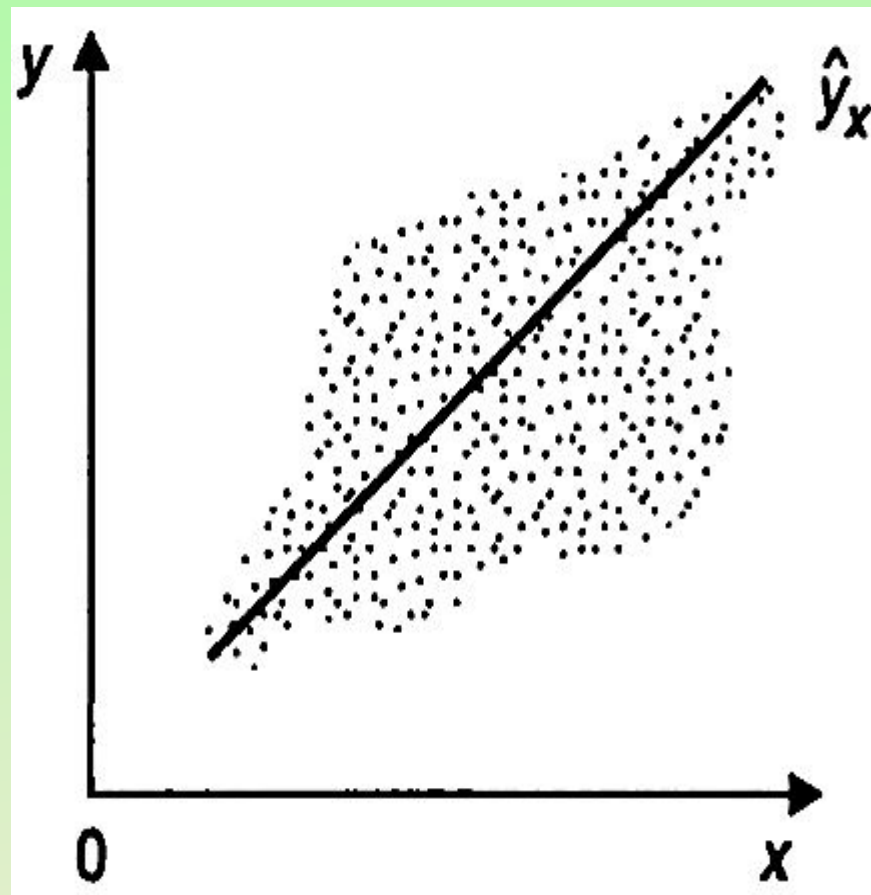
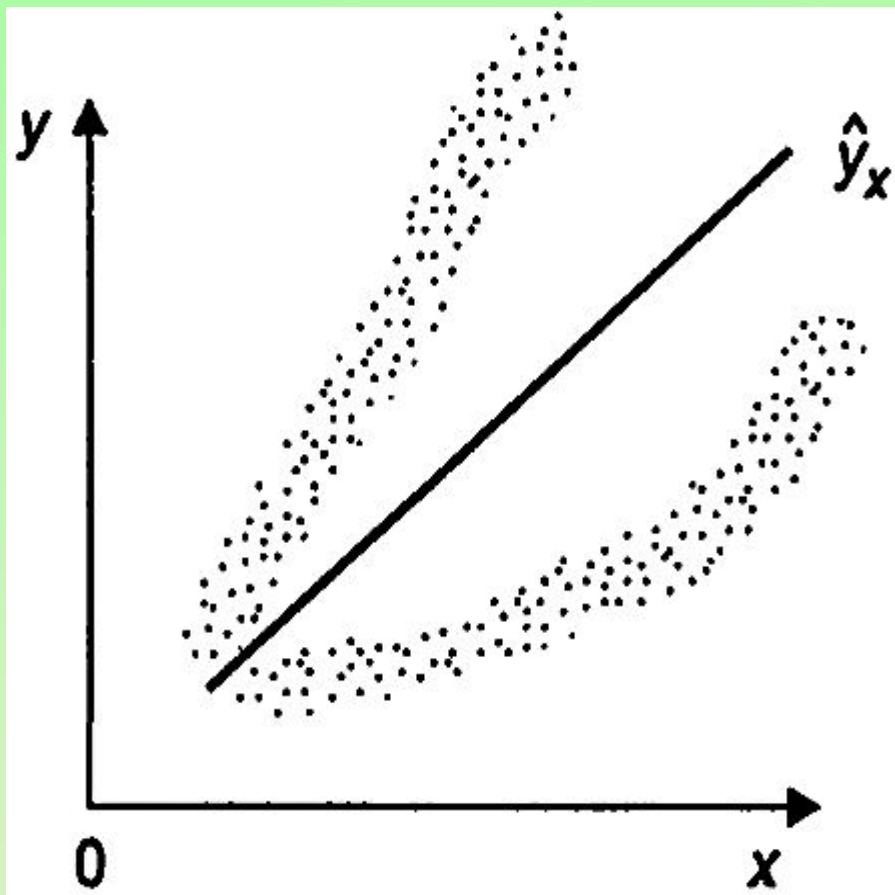


Регрессионная модель получится **гетероскедастичной**



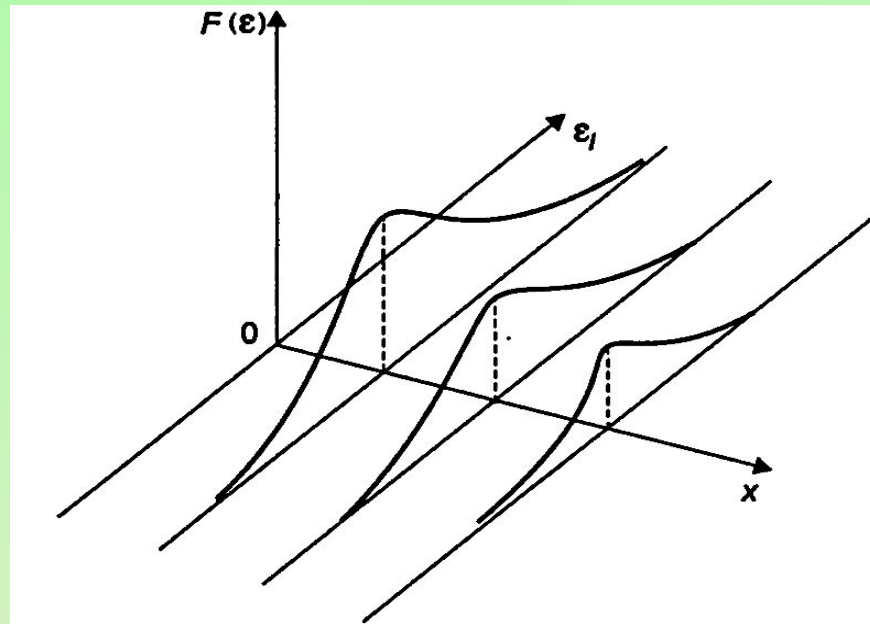
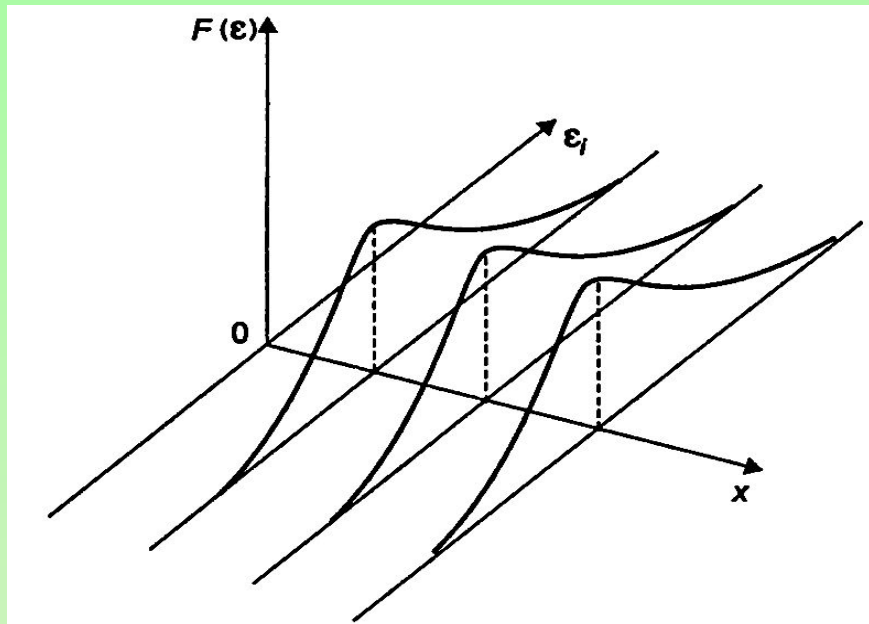
2. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.

Графические примеры гетероскедастичности:



2. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.

Гомоскедастичность остатков (слева) и **гетероскедастичность остатков (справа):**



Последствия гетероскедастичности модели:

Гетероскедастичную модель **можно оценивать классическим МНК**, но результаты, связанные с анализом **точности модели**, оценкой **значимости и построением интервальных оценок ее коэффициентов**, оказываются **непригодными**. Также оценка b **не будет оптимальной** в смысле теоремы Гаусса-Маркова.

2. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.

1. Тест ранговой корреляции Спирмена:

1.1 Ранжировать наблюдения по значениям переменной x_i и остатков e_i и вычислить коэффициент ранговой корреляции по формуле

$$\rho_{x,e} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n}$$

где d_i — разность между рангами значений x_i и e_i .

1.2 Нулевая гипотеза H_0 гипотеза **об отсутствии гетероскедастичности** **отвергается** на уровне значимости α при $n > 10$, если статистика

$$|t| = \frac{|\rho_{x,e}| \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - \rho_{x,e}^2}} > t_{1-\alpha; n-2},$$

где $t_{1-\alpha; n-2}$ табличное значение t-критерия Стьюдента, определенное на уровне значимости α при числе степеней свободы $n-2$.

2. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.

2. Тест Голдфелда-Квандта:

2.1 Тест применяется в том случае, если ошибки регрессии можно считать *нормально распределенными случайными величинами*.

2.2 Нулевая гипотеза H_0 гипотеза **об отсутствии гетероскедастичности** отвергается на уровне значимости α если

$$F = \frac{\sum_{i=1}^m e_i^2}{\sum_{i=n-m+1}^n e_i^2} > F_{\alpha; m-p; m-p},$$

где p - число регрессоров, m выбирается порядка $n/3$, $F_{\alpha; m-p; m-p}$ - критическое (табличное) значение статистики Фишера для уровня значимости α и $m-p$, $m-p$ степеней свободы.

Другие тесты на присутствие гетероскедастичности в модели:

3. **тест Уайта** (рассматривается в лабораторной работе №3, наиболее простой и часто употребляемый тест);

4. **тест Глейзера** (во многом аналогичен тесту Уайта, но используется не квадрат остатков, а их абсолютная величина).

2. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.

Устранение гетероскедастичности: **взвешенный метод наименьших квадратов (1)**

Пусть имеется модель (*): $Y = X\beta + \varepsilon$ или $y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$

Пусть данная модель **гетероскедастична**, т. е. дисперсии ошибок σ_i^2 ($i = 1, \dots, n$) не равны между собой, и сами возмущения ε_i и ε_k ($k = 1, \dots, n$) **не коррелированы**.



Тогда ковариационная матрица вектора возмущений $\Sigma_\varepsilon = \Omega$ **диагональная**:



$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Если дисперсии возмущений σ_i^2 ($i = 1, \dots, n$) **известны**, то гетероскедастичность **легко устраняется**.



2. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.

Устранение гетероскедастичности: взвешенный метод наименьших квадратов (2)

Будем рассматривать в качестве i -го наблюдения зависимой Y и объясняющих переменных $X_j (j = 1, \dots, p)$ нормированные по σ_i переменные, т. е.

$$Z = Y / \sigma_i, \quad V_j = X_j / \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда модель (*) примет вид (**):

$$z_i = \beta'_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j v_{ij} + v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\beta'_0 = \beta_0 / \sigma_i$, $v_i = \varepsilon_i / \sigma_i$.

Очевидно, дисперсия $D(v_i) = 1$, т. е. модель (**) гомоскедастична. При этом ковариационная матрица $\sum_{\varepsilon} \Omega$ становится единичной, а сама модель (**) - классической.



Согласно теореме Айткена наиболее эффективной оценкой вектора β для модели (*) является оценка

$$b^* = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega Y$$

2. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.

Устранение гетероскедастичности: взвешенный метод наименьших квадратов (3)

Применение формулы $b^* = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega Y$ для отыскания параметра β , т. е. обобщенный МНК для модели с гетероскедастичностью, когда ковариационная матрица возмущений $\sum \varepsilon = \Omega$ есть диагональная матрица, называется **взвешенным методом наименьших квадратов**.

Оценки коэффициентов регрессии при применении обобщенного МНК находятся путем **минимизации обобщенного параметра** $e' \Omega^{-1} e$, тогда **в частном случае**, применяя **взвешенный МНК**, коэффициенты регрессии находятся путем **минимизации**

$$S = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma_i} (\hat{y}_i - y_i)^2 \right]$$

2. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.

На практике для применения взвешенного МНК значения дисперсий σ_i заменяют их *состоятельными оценками* $\hat{\sigma}_i$.

Но практически процедура устранения гетероскедастичности может представлять *технические трудности*, т.к.:

- 1) используются не дисперсии σ_i , а их оценки $\hat{\sigma}_i$;
- 2) расчет оценок $\hat{\sigma}_i$ может быть затруднен.

Состоятельная оценка матрицы $\sum b^*$ с помощью взвешенного МНК дает результат:

$$\hat{\sum}_{b^*} = n(X'X)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 x_i^2 \right) (X'X)^{-1}$$



Стандартные отклонения, вычисленные по этой формуле, называются *стандартными ошибками в форме Уайта*. 15

3. Автокорреляция остатков временного ряда. Положительная и отрицательная автокорреляция.

Регрессионные модели называются **моделями с наличием автокорреляции (сериальной корреляции)**, если случайные величины ε_i в регрессионной модели *не оказываются независимыми*, условие $r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ классической регрессионной модели *не выполняется*.

В таких моделях прослеживается механизм **влияния результатов предыдущих наблюдений на результаты последующих** (пример – зависимость текущей цены ценной бумаги на РЦБ от ее цен в прошлом).

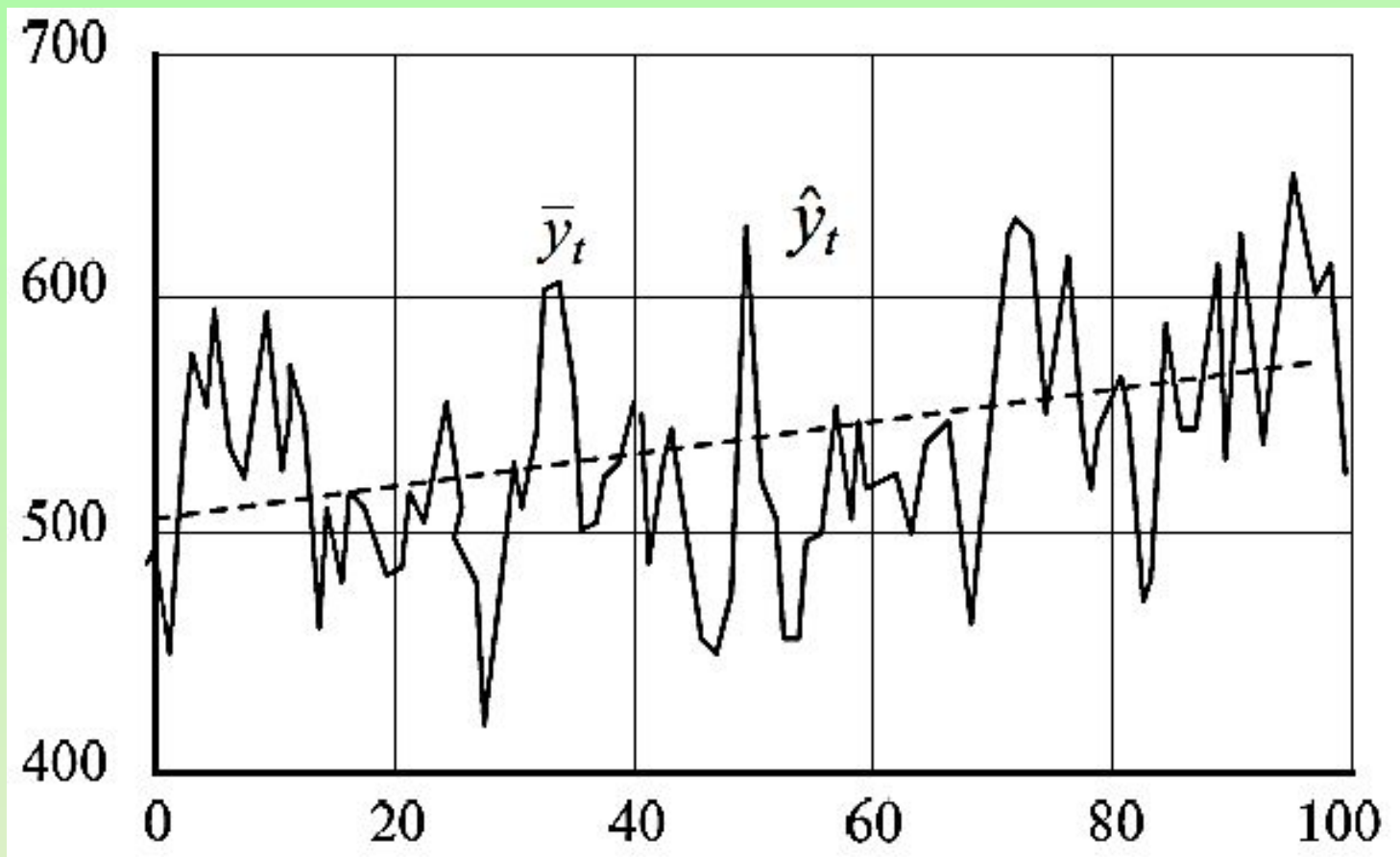
При **положительной автокорреляции** результаты предыдущих торгов ценной бумаги оказывают влияние на результаты последующих: если в какой-то момент курс окажется завышенным по сравнению с реальным, то скорее всего он будет завышен на следующих торгах.

Отрицательная автокорреляция встречается в тех случаях, когда наблюдения действуют друг на друга по принципу «маятника» — завышенные значения в предыдущих наблюдениях приводят к занижению их в наблюдениях последующих.

МНК при наличии коррелированности ошибок регрессии дает *несмещенные и состоятельные* (но *неэффективные*) оценки коэффициентов регрессии, однако, оценки их дисперсий *несостоятельные и смещенные* (как правило, в сторону занижения), т. е. результаты тестирования гипотез оказываются *недоверенными*.

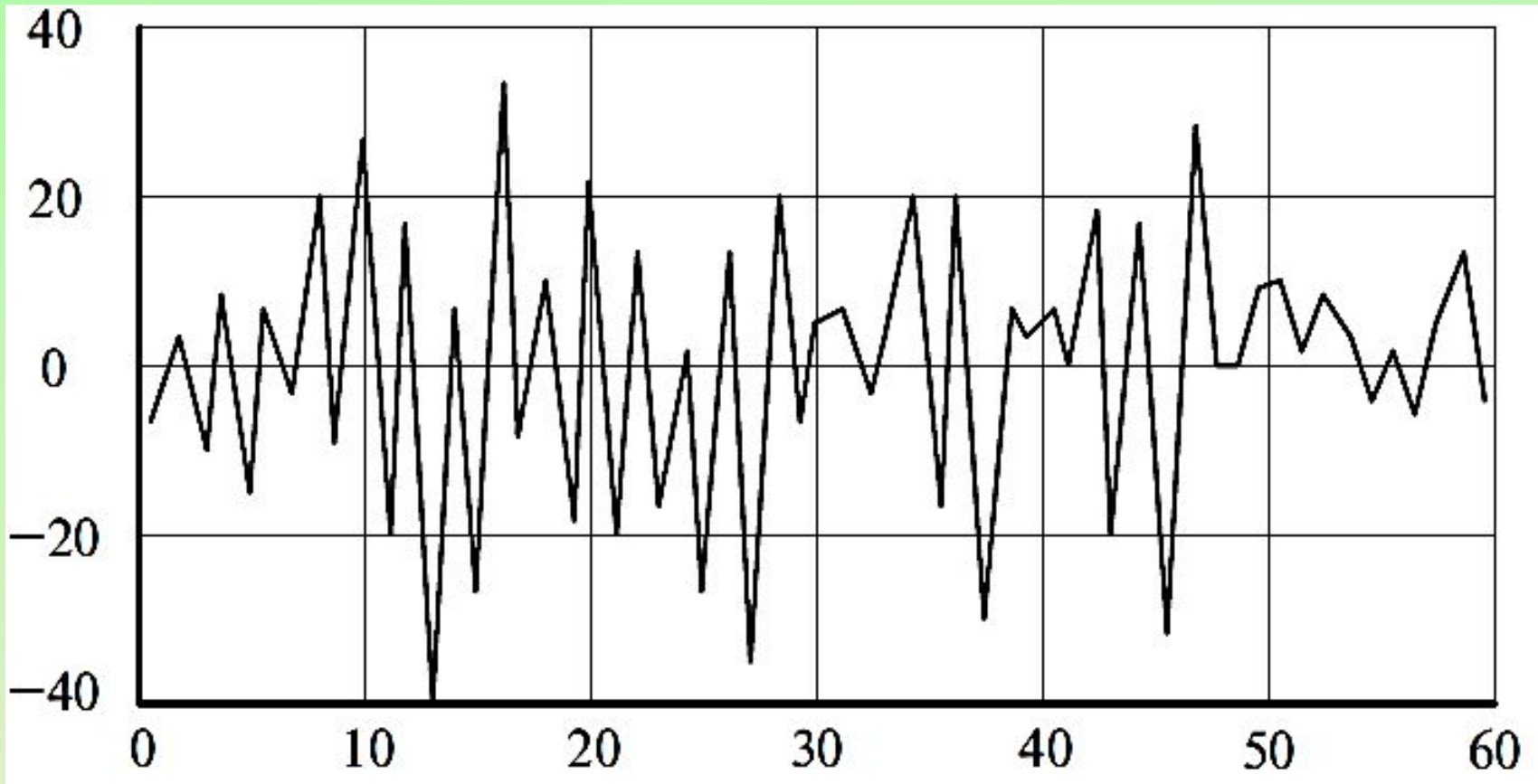
3. Автокорреляция остатков временного ряда. Положительная и отрицательная автокорреляция.

Графически *положительная автокорреляция* выражается в чередовании зон, где наблюдаемые значения оказываются выше объясненных (предсказанных), и зон, где наблюдаемые значения ниже:



3. Автокорреляция остатков временного ряда. Положительная и отрицательная автокорреляция.

Графически **отрицательная автокорреляция** выражается в том, что результаты наблюдений y_t «слишком часто» «перескакивают» через график объясненной части $\hat{y}_t$. Примерное поведение графика наблюдаемых значений временного ряда:



4. Статистика Дарбина-Уотсона. Тесты на наличие автокорреляции.

1) Простой и достаточно надежный критерий определения автокорреляции остатков - **критерий Дарбина-Уотсона d** :

$$d = 2 * \left(1 - \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_t^2} \right)$$

$$0 \leq d \leq 4$$

При отсутствии автокорреляции $d \approx 2$.

При полной **положительной** автокорреляции $d \approx 0$.

При полной **отрицательной** автокорреляции $d \approx 4$.

4. Статистика Дарбина-Уотсона. Тесты на наличие автокорреляции.

Для d -статистики найдены верхняя (upper) d_u и нижняя (low) d_l

критические границы на различных уровнях значимости.

Если фактически наблюдаемое значение d :

а) $d_u < d < 4 - d_u$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции

принимается;

б) $d_l \leq d \leq d_u$ или $4 - d_u \leq d \leq 4 - d_l$, то вопрос об отвержении или

принятии гипотезы остается открытым;

в) $0 < d < d_l$, то принимается альтернативная гипотеза о положительной

автокорреляции;

г) $4 - d_l < d < 4$, то принимается альтернативная гипотеза об

отрицательной автокорреляции.

4. Статистика Дарбина-Уотсона. Тесты на наличие автокорреляции.

2) Тест серий (Бреуша-Годфри):

если имеется корреляция между соседними наблюдениями, то естественно ожидать, что в уравнении

$$e_t = \rho e_{t-1} + v_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (1)$$

(где e_t — остатки регрессии, полученные обычным МНК), коэффициент ρ окажется значимо отличающимся от нуля.

Практическое применение теста Бреуша-Годфри заключается в оценивании МНК регрессии (1).

3) Тест Льюнга-Бокса:

Статистика Льюнга—Бокса имеет вид:

$$Q_p = n(n+2) \sum_{\tau=1}^p \frac{r^2(\tau)}{n-\tau}.$$

Если верна гипотеза H_0 о равенстве нулю всех коэффициентов корреляции $\rho(e_t e_{t-\tau})$, где $\tau = 1, \dots, p$, то статистика Q_p имеет распределение χ^2 с p степенями свободы. Тогда если расчетное Q_p больше критического значения χ^2 с p степенями свободы, то H_0 отвергается (т.е. автокорреляция остатков присутствует).

5. Устранение автокорреляции. Идентификация временного ряда. Авторегрессионная модель первого порядка.

Причины автокорреляции ошибок регрессии

- 1) **Наличие «скрытых» регрессоров**, влияние которых в результате проявляется через случайный член. Наиболее часто «скрытыми» регрессорами оказываются **лаговые объясняемые переменные**
- 2) Случайные возмущения представляют собой **белый шум** ξ_t , но на результат наблюдения y_t влияет не только величина ξ_t , но (хотя обычно и в меньшей степени) **несколько предыдущих величин** $\xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-p}$

5. Устранение автокорреляции. Идентификация временного ряда. Авторегрессионная модель первого порядка.

устранения автокорреляции

1) *Подбор соответствующей модели - авторегрессионной $AR(p)$, скользящей средней $MA(q)$ или авторегрессионной модели скользящей средней $ARMA(p,q)$ для случайных возмущений регрессии.*

2) В число регрессоров в моделях временных рядов могут быть включены *и константа, и временной тренд, и какие-либо другие объясняющие переменные.*

5. Устранение автокорреляции. Идентификация временного ряда. Авторегрессионная модель первого порядка.

Идентификация временного ряда - построение для ряда остатков адекватной ARMA-модели, т. е. такой ARMA-модели, в которой **остатки представляют собой белый шум, а все регрессоры значимы** (выбирается **наиболее простая модель** и используется **метод элементарного подбора** - пробуются различные модели).

Если удастся построить ARMA-модель для ряда остатков, то можно получить **эффективные оценки параметра β** , а также **несмещенные и состоятельные оценки дисперсий β** с помощью **обобщенного МНК**.

5. Устранение автокорреляции. Идентификация временного ряда. Авторегрессионная модель первого порядка.

Оценка параметров модели с остатками, образующими авторегрессионный процесс первого порядка (1):

Пусть имеем модель (*): $Y = X\beta + \varepsilon$ или $y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{tj} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n,$

где y_t, x_{tj} — наблюдения переменных Y, X_j ($j = 1, \dots, p$) в момент t .

Полагаем, что **случайные возмущения коррелированы** и образуют **процесс AR(1)**:

$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t$, (**) где v_t ($t = 1, \dots, n$) - белый шум ρ - к-т авторегрессии.

Тогда **ковариационная матрица вектора возмущений** для модели с автокорреляционными остатками:

$$\sum_{\varepsilon} = \Omega = \frac{\sigma_0^2}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

где
$$\rho(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})}{\sqrt{D(\varepsilon_t)} \sqrt{D(\varepsilon_{t-1})}} = \frac{\rho \sigma^2}{\sigma \cdot \sigma} = \rho$$

5. Устранение автокорреляции. Идентификация временного ряда. Авторегрессионная модель первого порядка.

Оценка параметров модели с остатками, образующими авторегрессионный процесс первого порядка (2):

Для получения наиболее **эффективных оценок** параметра β в модели (*)-(**) (если параметр ρ известен), можно применить **обобщенный МНК**:

исключая $\varepsilon_t (t = 1, \dots, n)$ из равенств (*), (**), получим:

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1 - \rho) + \sum_{j=1}^p \beta_j (x_{tj} - \rho x_{t-1,j}) + v_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (***)$$

модель (***) является **классической**, т.к. теперь случайные возмущения $v_t (t = 1, \dots, n)$ независимы и имеют постоянную дисперсию.

Т.о., при известном значении ρ **автокорреляция легко устраняется**. На практике, однако, значение ρ **не бывает известно**, поэтому в равенстве (***) присутствует не точное значение ρ , а наблюдаемое значение его **оценки** $\hat{\rho}$.

Наиболее простой способ оценить ρ - **применить обычный МНК к регрессионному уравнению (**).**

Вопросы изученные в Теме 7:

- 1) Обобщенная линейная модель множественной регрессии. Понятие об обобщенном методе наименьших квадратов.**
- 2) Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.**
- 3) Автокорреляция остатков временного ряда. Положительная и отрицательная автокорреляция.**
- 4) Статистика Дарбина-Уотсона. Тесты на наличие автокорреляции.**
- 5) Устранение автокорреляции. Идентификация временного ряда. Авторегрессионная модель первого порядка.**