ЭЛЛИПСОИД И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД

Подготовили студенты группы КИ17-06“б”: Хлоптунова Ангелина;
Булдаков Максим;
Букатич Алена;
Чижова Ирина.

ЭЛЛИПСОИД

Эллипсоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

$$\begin{cases} x = x_0 + a\sin\theta\cos\phi\,, \\ y = y_0 + b\sin\theta\sin\phi\,, \\ z = z_0 + c\cos\theta, \end{cases} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \theta < 2\pi\right).$$

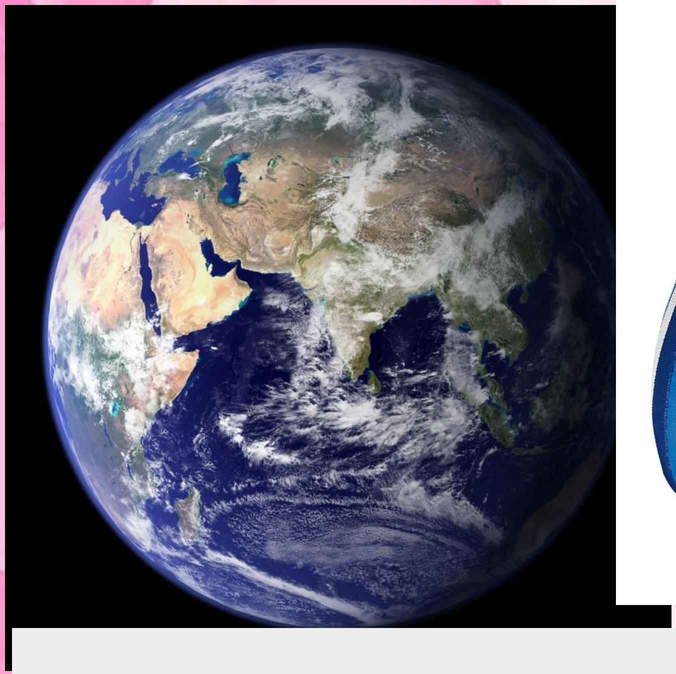
ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

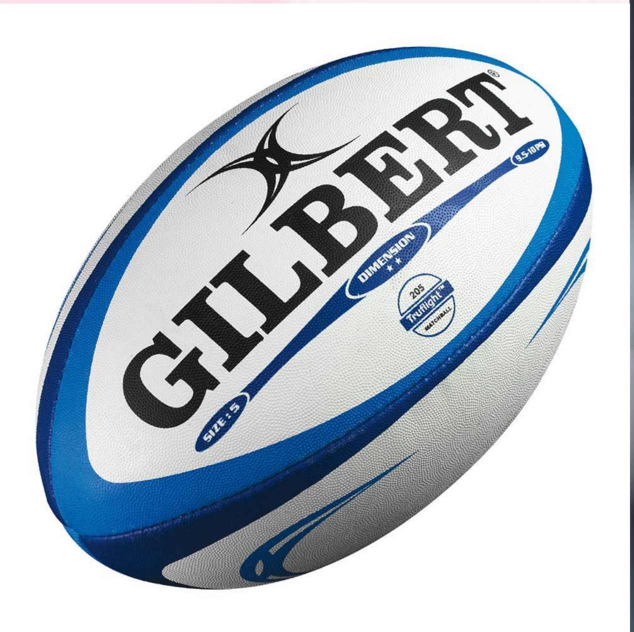
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

ПРИМЕРЫ ИЗ ЖИЗНИ





Исследование методом сечений

Исследуем форму эллипсоида, применив так называемый метод сечений. Суть этого метода состоит в следующем. Рассмотрим сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям (эти плоскости имеют уравнения вида $x=h$, $y=h$ и $z=h$, где h - некоторая константа). В сечениях получаются кривые, вид которых мы распознаем. Проведя достаточно много таких сечений, мы в итоге получим представление о форме поверхности.

Прежде чем начинать исследование формы эллипсоида методом
сечений, договоримся о следующем. Мы будем рассматривать кривые, получающиеся в сечении той или иной поверхности плоскостями с уравнениями вида w=h, где w - одна из букв x , y и z. Для экономии места мы вместо записи общего уравнения полученнной кривой вида

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ w = h, \end{cases}$$

будем писать только уравнение F(x,y) =0 и называть его уравнением полученной кривой внутри плоскости w = h (или просто «плоскостным» уравнением этой кривой).

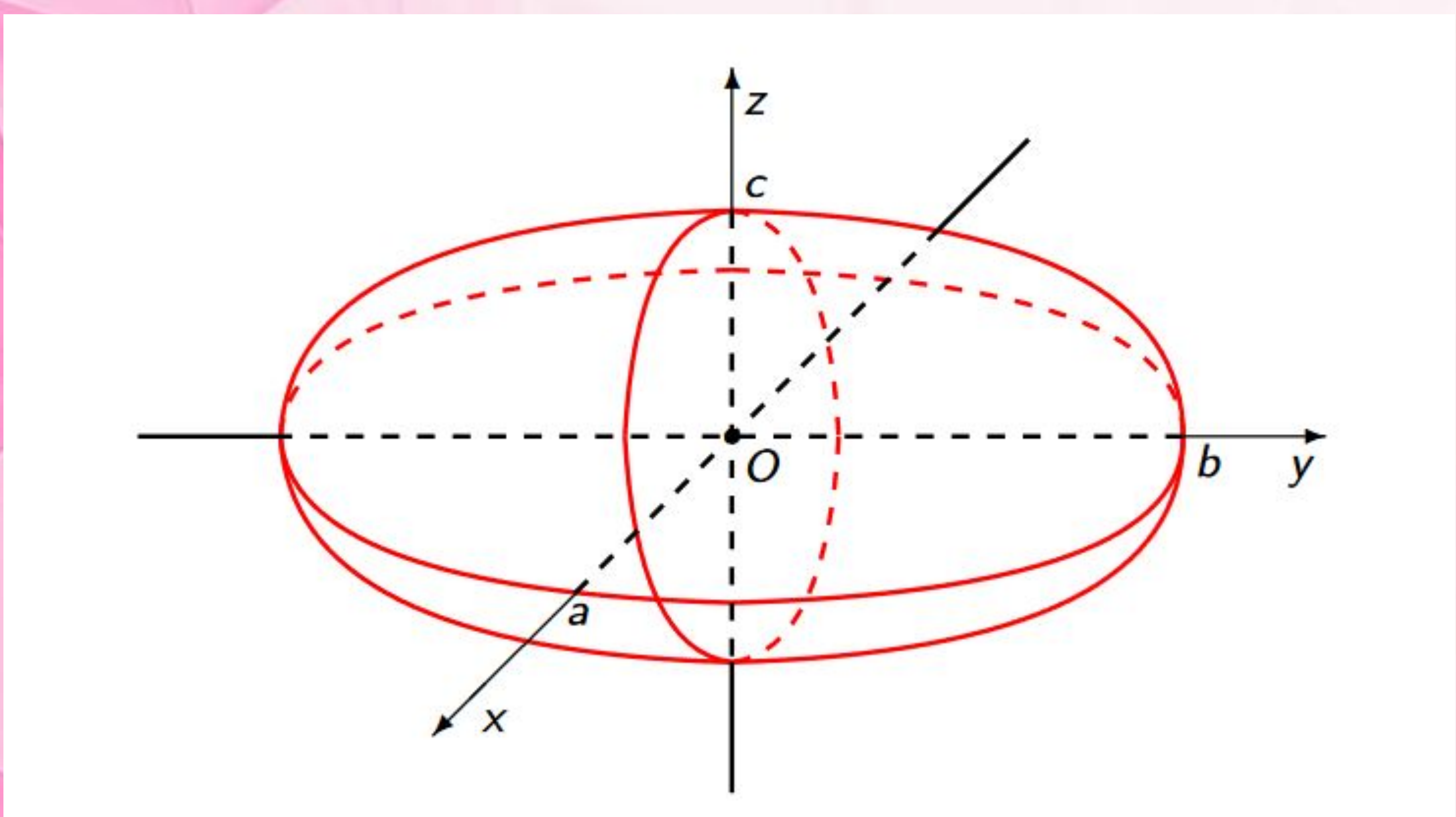
Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостями вида z = h. Получим кривую, которая внутри этой плоскости задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

При |h|>c эта кривая является пустым множеством, при |h|=c - точкой, а при|h|<c- эллипсом с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

При $h=0$ полуоси этого эллипса имеют наибольшие значения (равные a и b), с ростом $|h|$ они уменьшаются и стремятся к 0 при $|h| \to c$. Абсолютно аналогично устроены сечения эллипсоида плоскостями вида $x=h$ и $y=h$ (надо только соответствующим образом заменить неизвестные и параметры a,b,c в уравнении получающегося эллипса).



Таким образом, можно сказать, что эллипсоид - это «вытянутая» (или, наоборот, «сплющенная» - смотря вдоль какой оси смотреть) сфера.
Говоря нематическим языком, можно сказать, что эллипсоид имеет форму яйца.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД

Эллиптическим параболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

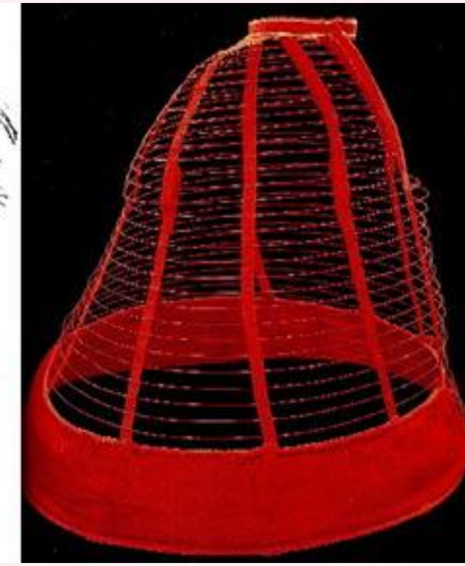
$$z = 2px^2 + 2qy^2,$$

$$z = 2px^2 - 2qy^2,$$

где $pq > 0.$

$$z = 2px^2$$

ПРИМЕРЫ ИЗ ЖИЗНИ



Исследование методом сечений

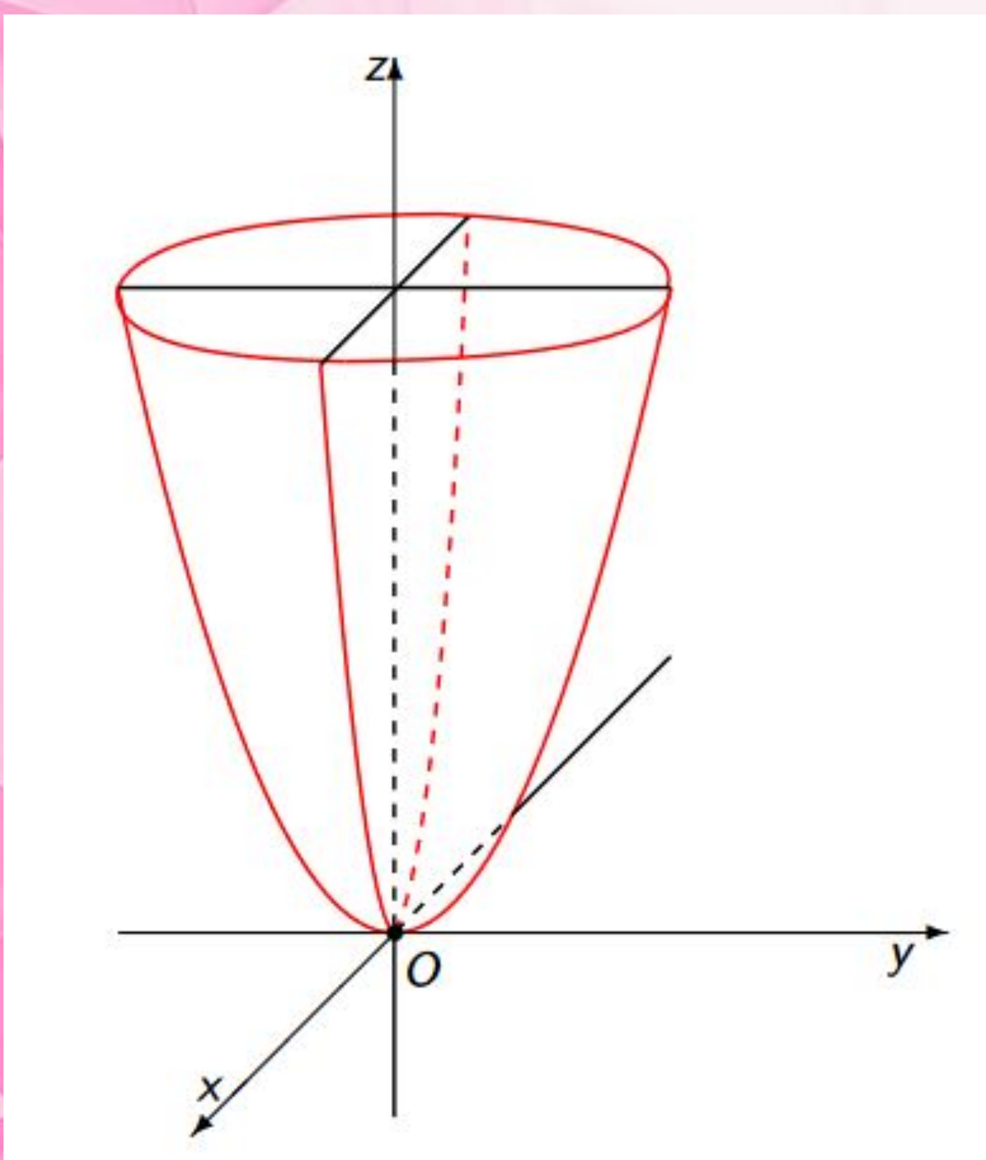
Изучим форму этой поверхности методом сечений. В сечении плоскостью y= h получается кривая с «плоскостным» уравнением

$$x^2 = 2a^2\left(z - \frac{h^2}{2b^2}\right)$$

Это парабола с параметром a^2
, ветви которой направлены вверх, т. е. в положительном направлении оси Oz. При h=0 ее вершина совпадает с началом координат, с увеличением|h|она поднимается вдоль оси Oz. Аналогичным образом устроено сечение плоскостью x = h : это парабола с «плоскостным» уравнением

$$y^2 = 2b^2\left(z - \frac{h^2}{2a^2}\right)$$

параметр которой равен b^2, а вершина совпадает с началом координат при h=0 и поднимается вдоль оси Oz с ростом|h|.



Получившаяся поверхность

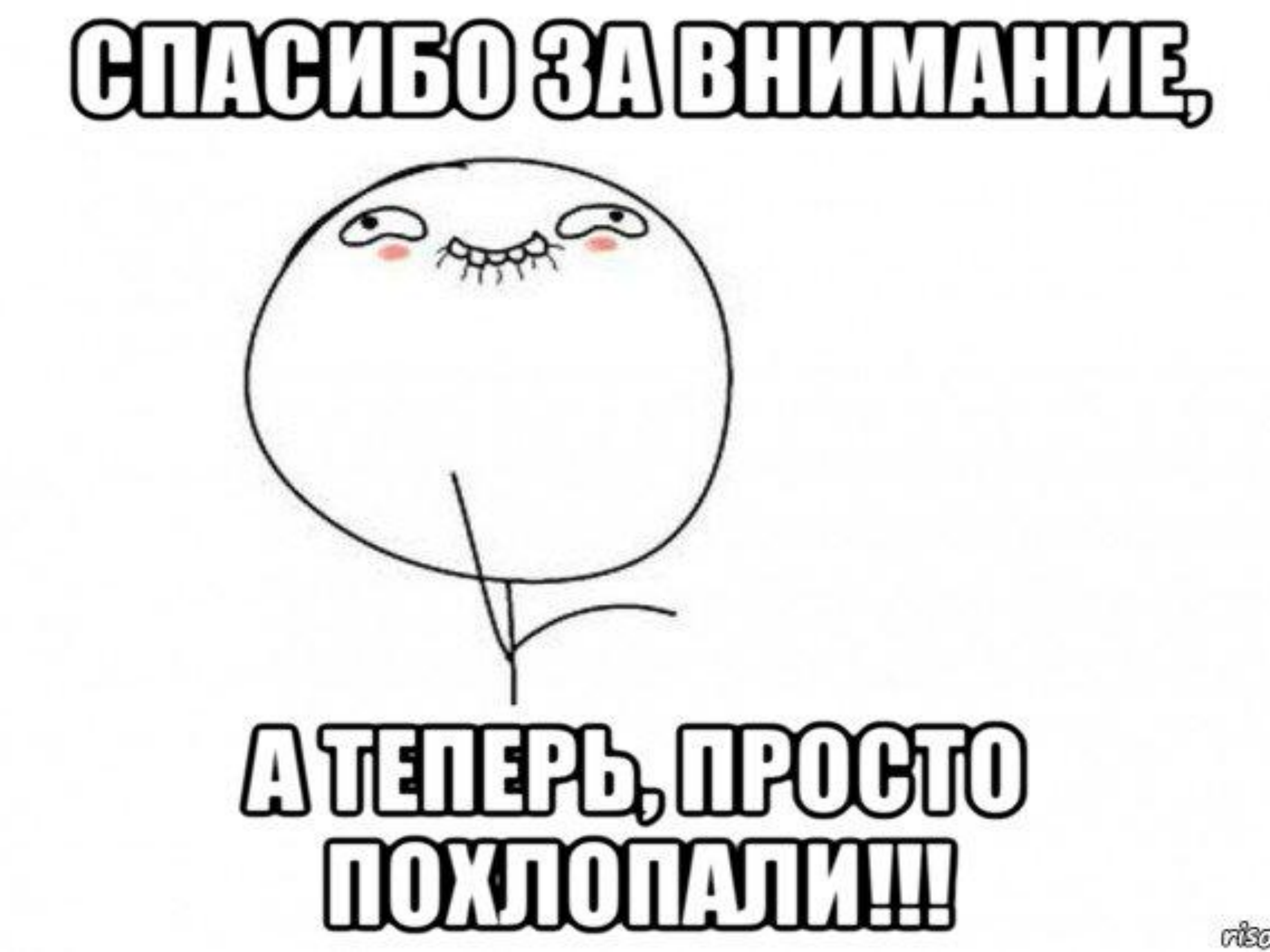
ИНТЕРЕСНЫЕ ФАКТЫ И ОСОБЕННОСТИ

Эллиптический параболоид можно описать как семейство параллельных парабол с ветвями, направленными вверх, вершины которых описывают параболу, с ветвями, также направленными вверх

Часто используется свойство параболоида вращения собирать пучок лучей, параллельный главной оси, в одну точку — фокус, или, наоборот, формировать параллельный пучок излучения от находящегося в фокусе источника. На этом принципе основаны параболические антенны, телескопы-рефлекторы с параболическим зеркалом, прожекторы, автомобильные фары и т. д.

Поверхность жидкости в равномерно вращающемся сосуде является параболоидом вращения

- http://gm.chgpu.edu.ru/ebook/1_EG/Pt_1_Ch_2_High_Geomerty/Soderjanie/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%B0%2010.%20%D0%98%D0%B7%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5%20%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9%20%D0%B2%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B3%D0%BE%20%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D0%B0%20%D0%BF%D0%BE%20%D0%BA%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%BC%20%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%D0%BC/Paragraf%2055.htm
- http://kadm.imkn.urfu.ru/files/angeom15.pdf
- http://matlab.exponenta.ru/gui/book1/new7_3.php
- https://vk.com/doc108597276_455876773?hash=7447b92e95a41ee6b1&dl=a269e2b58788f0a770
- http://www.a-geometry.narod.ru/problems/problems_46.htm
- http://www.km.ru/referats/31BB97756F9E41BA802C6B7660F34988
- http://www.mathematics.ru/courses/stereometry/content/chapter5/section/paragraph7/theory.html#.Wj9Xst9l-01
- http://mathhelpplanet.com/static.php?p=ellipsoid
- http://www.km.ru/referats/31BB97756F9E41BA802C6B7660F34988


СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ,
А ТЕПЕРЬ, ПРОСТО
ПОХЛОПАЛИ!!!