

Лекция 1.2

***Алгоритмы сортировки и
поиска***

Можно ли еще улучшить алгоритм поиска?

В общем случае – нет, так что в наихудшем случае мы не достигнем лучшего времени, чем $\Theta(n)$.

Улучшение *возможно*, только если мы кое-что знаем о порядке элементов в массиве.

Предположим, что массив отсортирован в неубывающем порядке, т.е. каждый элемент массива меньше или равен элементу, следующему в массиве за ним, согласно некоторому определению отношения "меньше, чем":

- Для чисел очевидно,
- Для строк – лексикографический порядок.

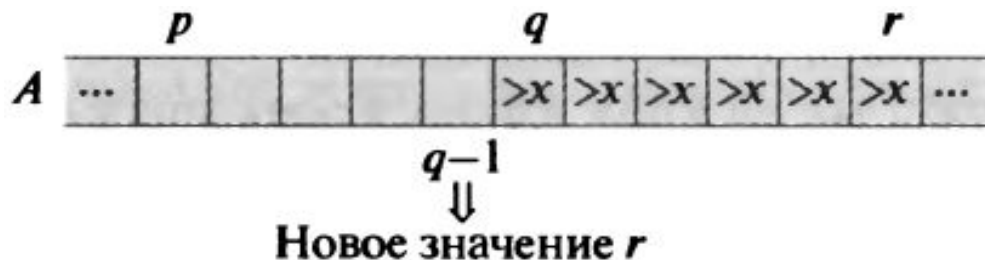
Бинарный поиск

Идея: В любой момент мы рассматриваем только подмассив, т.е. часть массива между двумя индексами (включительно). Назовем их p и r , причем первоначально $p = 1$ и $r = n$. Мы многократно делим подмассив пополам, до тех пор, пока не произойдет одно из двух событий: либо мы найдем искомое значение, либо подмассив окажется пустым ($p > r$).

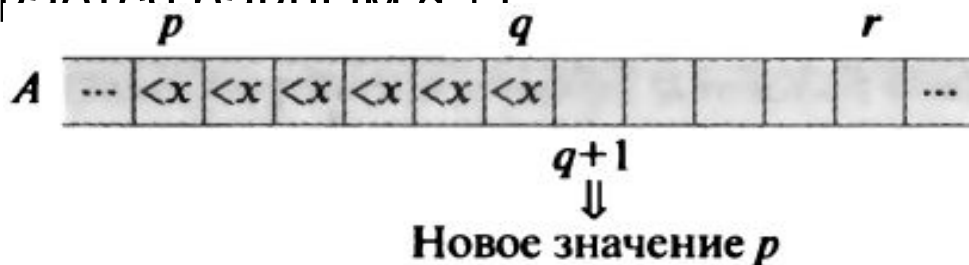
- Пусть мы ищем значение x в массиве A . На каждом шаге мы рассматриваем только подмассив, начинающийся с элемента $A[p]$ и заканчивающийся элементом $A[r]$ – обозначим его $A[p..r]$.
- На каждом шаге вычисляем середину q подмассива, вычисляя среднее как $q = \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$
- Если $A[q] = x$, то искомый элемент найден.
- Если $A[q] \neq x$, то...

Бинарный поиск

1) В случае $A[q] > x$ в силу упорядоченности массива все элементы, расположенные справа от $A[q]$, тоже больше x . На следующем шаге p не изменяется, а r устанавливается равным $q-1$.



2) Если $A[q] < x$, то каждый элемент массива слева от $A[q]$ меньше, чем x , и поэтому можно эти элементы не рассматривать. Поэтому на следующем шаге r не изменяется, а p устанавливается равным $q+1$.



Алгоритм бинарного поиска

Процедура Binary-Search(A,n,x).

Вход и выход: те же, что и в Linear-Search.

Шаги процедуры:

1. Установить p равным 1, а r равным n .
2. Пока $p \leq r$, выполнять следующие действия.
 - A. Установить q равным $q = \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$
 - B. Если $A[q] = x$, вернуть q .
 - C. В противном случае ($A[q] \neq x$), если $A[q] > x$, установить r равным $q-1$.
 - D. В противном случае ($A[q] < x$) установить p равным $q+1$.
3. Вернуть значение not-found.

Инвариант цикла: «В начале каждой итерации цикла на шаге 2, если x находится где-то в массиве A , то это значение находится в одном из элементов подмассива $A[p..r]$ »

Рекурсивный вариант бинарного поиска

Процедура Recursive-Binary-Search(A,p,r,x).

Вход и выход: входные параметры A и x те же, что и у процедуры Linear-Search, также, как и выход. Входные параметры p и r определяют обрабатываемый подмассив A[p..r].

Шаги процедуры:

1. Если $p > r$, вернуть not-found.
2. В противном случае ($p < r$) выполнить следующие действия.

$$q = \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$$

A. Установить

B. Если $A[q] = x$, вернуть q.

C. В противном случае ($A[q] \neq x$), если $A[q] > x$, вернуть Recursive-Binary-Search(A,p,q-1,x).

D. В противном случае ($A[q] < x$) вернуть

Recursive-Binary-Search(A,q+1,r,x).

Время работы бинарного поиска

- *Ключевой факт*: размер $r-p+1$ рассматриваемого подмассива уменьшается примерно вдвое на каждой итерации цикла.
 - *Вопрос*: сколько итераций цикла, вдвое уменьшающих рассматриваемый подмассив, нужно выполнить, чтобы его исходный размер n уменьшился до 1?
 - *Ответ* определяется просто возведением в степень путем многократного умножения на 2. Если n представляет собой точную степень 2, то, ответом является число $\log_2 n$. Если нет, то отличие от $\log_2 n$ не более, чем на 1.
 - *Время работы* составляет $O(\log_2 n)$ в предположении постоянного количества времени, затрачиваемого на каждую итерацию.
 - *Наихудший случай* (значение x в массиве отсутствует): $\Theta(\log_2 n)$.
 - *Наилучший случай* (x обнаруживается на первой итерации): $\Theta(1)$.
- (1) Бинарный поиск работает быстрее, чем линейный [$O(\log_2 n) < O(n)$], однако требует предварительной сортировки массива.

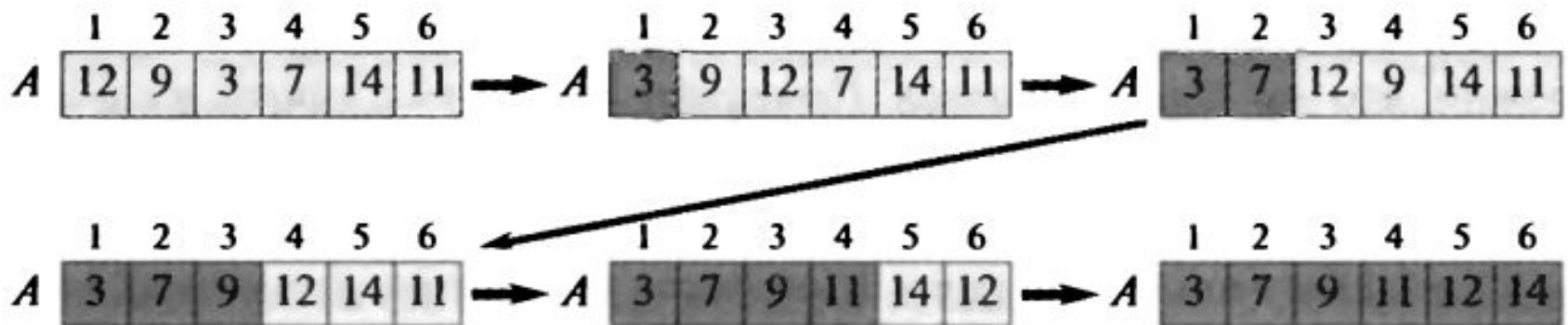
Сортировка

Рассмотрим четыре алгоритма сортировки массива:

- все они имеют время работы в худшем случае либо $\Theta(n^2)$, либо $\Theta(n \log_2 n)$;
- если требуется выполнить лишь один или несколько поисков, то лучше остановиться на линейном поиске;
- если нужно выполнять поиск много раз, то имеет смысл сначала отсортировать массив, а затем применять бинарный поиск;
- сортировка — важная задача и сама по себе;
- ключ сортировки — это информация, которая сопоставляется с сортируемыми элементами и которая определяет порядок расположения элементов;
- **Задача:** разместить элементы в порядке возрастания

Сортировка выбором

- Проходим по всему массиву, находим наименьший элемент и меняем этот элемент местами с первым элементом.
- Вновь проходим по массиву, начиная со второго элемента, находим наименьший элемент среди оставшихся и меняем этот элемент со вторым элементом массива.
- То же самое выполняется для третьего элемента и т.д.
- После того, как нужный элемент поставлен в положение $n-1$, сортировка выполнена.



Алгоритм сортировки выбором

Процедура Selection-Sort(A,n).

Вход:

- A – сортируемый массив.
- n – количество сортируемых элементов в массиве A.

Результат: элементы массива A отсортированы в неубывающем порядке.

Шаги процедуры:

1. Для $i = 1$ до $n-1$:

 A. Установить значение переменной *smallest* равным i .

 B. Для $j = i+1$ до n :

 i. Если $A[j] < A[\textit{smallest}]$ присваиваем переменной *smallest* значение j .

 C. Обменять $A[i] \leftrightarrow A[\textit{smallest}]$.

Алгоритм сортировки выбором

- Поиск наименьшего элемента в подмассиве $A[i..n]$ представляет собой вариант линейного поиска.
- Наличие «вложенного цикла».
- Доказательство корректности можно провести с помощью двух инвариантов (по одному на каждый цикл)
 - а) «В начале каждой итерации цикла на шаге 1 подмассив $A[1..i-1]$ содержит $i-1$ наименьших элементов массива в отсортированном порядке».
 - б) «В начале каждой итерации цикла на шаге 1В элемент $A[\text{smallest}]$ представляет собой наименьший элемент в подмассиве $A[i..j-1]$ ».

Время работы сортировки выбором

- 1) На i -м шаге внешнего цикла внутренний цикл выполняется $n-i$ раз.
- 2) Общее количество итераций внутреннего цикла равно сумме по всем итерациям внешнего цикла:

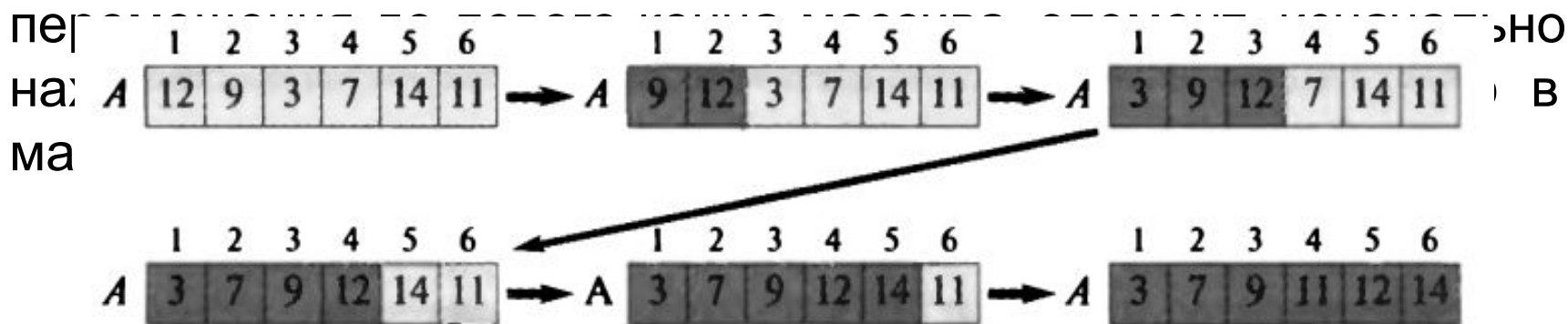
$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

- 3) Следовательно, время работы сортировки выбором равно $\Theta(n^2)$ во всех случаях (если итерации выполняются за постоянное время).

- Это медленный алгоритм.
- Время $\Theta(n^2)$ обусловлено сравнениями элементов на каждой итерации.
- Количество обменов элементов массива равно только $\Theta(n)$.

Сортировка вставкой

- Сортировка ведется так, что элементы в первых i позициях — это те же элементы, которые были изначально в первых i позициях, но теперь отсортированные в правильном порядке (по возрастанию).
- Чтобы определить, куда надо вставить элемент, первоначально находившийся в $A[i]$, сортировка вставкой проходит по подмассиву $A[1..i-1]$ справа налево, начиная с элемента $A[i-1]$, и переносит каждый элемент, больший, чем $A[i]$ на одну позицию вправо.
- При обнаружении элемента, который не превышает $A[i]$, или



Алгоритм сортировки вставкой

Процедура Insertion-Sort(A,n).

Вход и результат: те же, что и в Selection-Sort.

Шаги процедуры:

1. Для $i = 1$ до $n-1$:

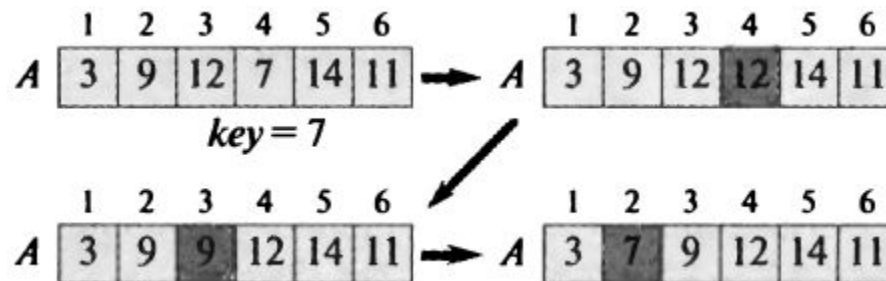
А. Установить переменную key равной $A[i]$, а переменной j присвоить значение $i-1$.

В. Пока $j > 0$ и $A[j] > key$, выполнять следующее:

і. Присвоить $A[j+1]$ значение $A[j]$.

іі. Уменьшить j на единицу (присвоить переменной j значение $j-1$).

С. Присвоить $A[j+1]$ значение key .



Время работы сортировки

вставкой

- Количество итераций внутреннего цикла зависит как от индекса i внешнего цикла, так и от значений элементов массива.
- *Наилучший случай*: массив A уже отсортирован (внутренний цикл выполняет нуль итераций). Тогда итерации внешнего цикла выполняются $n-1$ раз и процедура занимает время $\Theta(n)$ (считаем, что каждая итерация внешнего цикла выполняется за постоянное время).
- *Наихудший случай*: массив A отсортирован в обратном порядке (внутренний цикл делает максимально возможное количество итераций). Тогда внешний цикл каждый раз выполняет итерации внутреннего цикла $i-1$ раз. Итог тот же, как и при сортировке выбором: время работы $\Theta(n^2)$.

Время работы сортировки вставкой

- В *среднем* каждый элемент будет больше около половины предшествующих ему элементов и меньше тоже около половины этих элементов, что сократит время работы по сравнению с наихудшим случаем в два раза, т.е. время работы останется $\Theta(n^2)$.
- Сортировка вставкой может перемещать элементы до $\Theta(n^2)$ раз.
- Сортировка вставкой лучше, если массив почти отсортирован.

Сортировка слиянием

Парадигма «разделяй и

властвуй»

1) *Разделение.* Задача разбивается на несколько подзадач, которые представляют собой меньшие экземпляры той же самой задачи.

2) *Властвование.* Рекурсивно решаются подзадачи. Если они достаточно малы, они решаются как базовый случай.

3) *Объединение.* Решения подзадач объединяются в решение исходной задачи.

Разделяем сортируемый подмассив путем нахождения значения q посередине между p и r :

$$q = \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$$

Рекурсивно сортируем элементы в каждой половине подмассива, созданной на шаге разделения (от p до q и от $q+1$ до r).

Объединение отсортированных элементов в промежутках от p до q и от $q+1$ до r так, чтобы элементы в промежутке от p -го до r -го были отсортированы.

Алгоритм сортировки слиянием

Процедура Merge-Sort(A,p,r).

Вход: A – массив, p, r – начальный и конечный индексы подмассива A.

Результат: элементы подмассива A[p..r] отсортированы в неубывающем порядке.

Шаги процедуры:

1. Если $p \geq r$, подмассив A[p..r] содержит не более одного элемента, так что он автоматически является отсортированным. Выполняем возврат из процедуры без каких-либо действий.

2. В противном случае выполняем следующие действия:

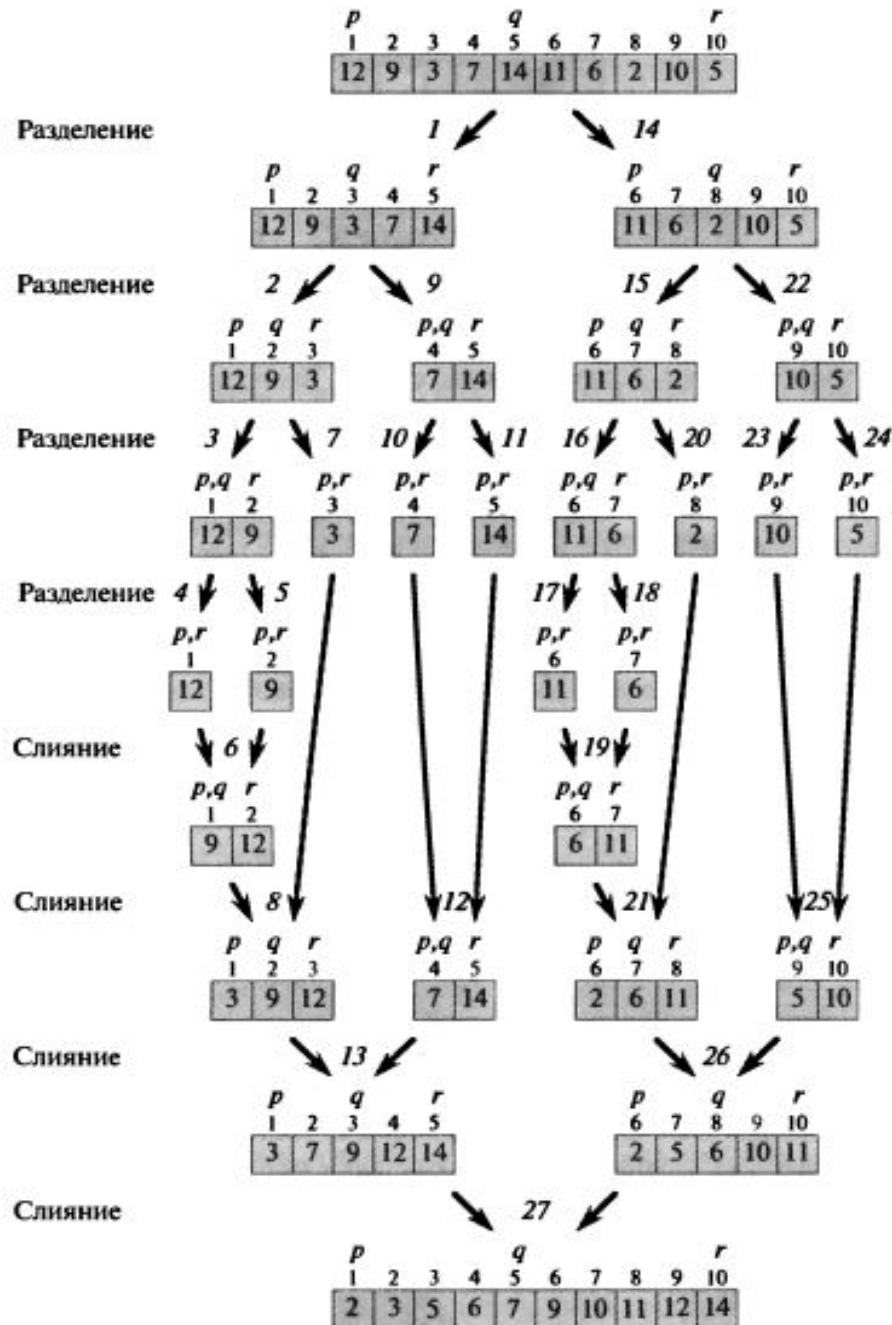
A. Установить

B. Рекурсивно вызвать Merge-Sort(A,p,q).

C. Рекурсивно вызвать Merge-Sort(A,q+1,r).

D. Вызвать Merge(A,p,q,r).
Базовый случай – когда $p \geq r$. Процедура Merge (A,p,q,r) сливает отсортированные подмассивы в единый отсортированный подмассив A[p..q].

Пример: Merge-Sort(A,1,10)



Процедура слияния

Слияние не может осуществляться без привлечения дополнительной памяти.

1) Пусть $n_1 = q - p + 1$ — количество элементов в $A[p..q]$, а $n_2 = r - q$ — количество элементов в $A[q+1..r]$. Создадим временные массивы B с n_1 элементами и C с n_2 элементами и скопируем элементы из $A[p..q]$, не нарушая их порядок, в массив B , а элементы из $A[q+1..r]$ — в массив C .

2) Копируем элементы массивов B и C обратно в подмассив $A[p..r]$, последовательно сравнивая элементы из массивов B и C и копируя минимальный из них.

3) Чтобы не проверять каждый раз, не исчерпался ли полностью один из массивов, разместим в правом конце массивов B и C дополнительный элемент, который заведомо больше любого другого элемента, т.е. что-то типа ограничителя. Когда все элементы из массивов B и C скопированы обратно в исходный массив, в них в качестве наименьших элементов остаются ограничители, которые не попадают в исходный массив.

Алгоритм слияния

$\Theta(n)$

ПОДМАССИВОВ

Процедура Merge(A,p,q,r).

Вход: A – массив, p, q, r – индексы в массиве A. Подмассивы A[p..q] и A[q+1..r] считаются уже отсортированными.

Результат: отсортированный подмассив A[p..r], содержащий все элементы, изначально находившиеся в подмассивах A[p..q] и A[q+1..r].

Шаги процедуры:

1. Установить n_1 равным $q-p+1$, а n_2 – равным $r-q$.
2. B[1.. n_1+1] и C[1.. n_2+1] представляют собой новые массивы.
3. Скопировать A[p..q] в B[1.. n_1], а A[q+1..r] – в C[1.. n_2].
4. Установить B[n_1+1] и C[n_2+1] равными ∞ .
5. Установить i и j равными 1.
6. Для k = p до r:
 - А. Если $B[i] \leq C[j]$, установить A[k] равным B[i] и увеличить i на 1.
 - В. В противном случае ($B[i] > C[j]$) установить A[k] равным C[j] и увеличить j на 1.

Время работы сортировки

СЛИЯНИЕМ

- Для простоты положим, что размер массива n представляет собой степень 2, так что каждый раз, когда мы делим массив пополам, размеры подмассивов равны.
- Время сортировки $T(n)$ состоит из трех компонентов:
 - 1) Разделение занимает константное время, поскольку состоит только в вычислении индекса q .
 - 2) Властвование состоит из двух рекурсивных вызовов для подмассивов, каждый размером $n/2$ элементов, что занимает время $2T(n/2)$.
 - 3) Объединение результатов двух рекурсивных вызовов с помощью слияния отсортированных подмассивов выполняется за время $\Theta(n)$.

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

Результат решения этого рекуррентного уравнения:

$$T(n) \text{ имеет вид } \Theta(n \log_2 n).$$

Сравнение алгоритмов сортировки

Плюсы сортировки слиянием:

-- С точки зрения времени работы сортировка слиянием [$\Theta(n \log_2 n)$] однозначно выгодна по сравнению с наихудшим временем работы $\Theta(n^2)$ у алгоритмов сортировки выбором и сортировки вставкой.

Минусы сортировки слиянием:

-- Требуется дополнительная память: сортировка делает полные копии всего входного массива. Если вопрос использования памяти приоритетен, использовать сортировку слиянием нельзя.

Быстрая сортировка

Как и в сортировке слиянием, используется парадигма "разделяй и властвуй" (а следовательно, и рекурсия).

Существенные отличия:

- а) Быстрая сортировка работает "на месте", без привлечения дополнительной памяти;
- б) Асимптотическое время работы быстрой сортировки для среднего случая отличается от времени работы для наихудшего случая;
- в) Хороший постоянный множитель (лучше, чем у сортировки слиянием), так что на практике чаще всего предпочтение отдается быстрой сортировке.

p										r
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
9	7	5	11	12	2	14	3	10	6	



p			q							r
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
5	2	3	6	12	7	14	9	10	11	



p	q	r
1	2	3
2	3	5



p			q			r
5	6	7	8	9	10	
7	9	10	11	14	12	



p, r	p, r
1	3
2	5



p		q, r
5	6	7
7	9	10



p, q	r
9	10
12	14



p	q, r
5	6
7	9



p, r
10
14



p, r
5
7

Выберем один элемент и назовем его опорным. Поместим все элементы, меньшие опорного, слева, а элементы, большие опорного, справа от этого элемента. Если опорный элемент находится в позиции q , то далее рекурсивно сортируются элементы в положениях с p до $q-1$ и с $q+1$ до r . Эта рекурсия и дает полностью отсортированный массив. На примере в качестве опорного элемента используется последний элемент каждого подмассива.

Самое нижнее значение в каждой позиции массива показывает, какой элемент будет находиться в этой позиции по завершении сортировки.

Процедура быстрой сортировки

Процедура Quicksort(A, p, r).

Вход и результат: те же, что и у процедуры Merge-Sort.

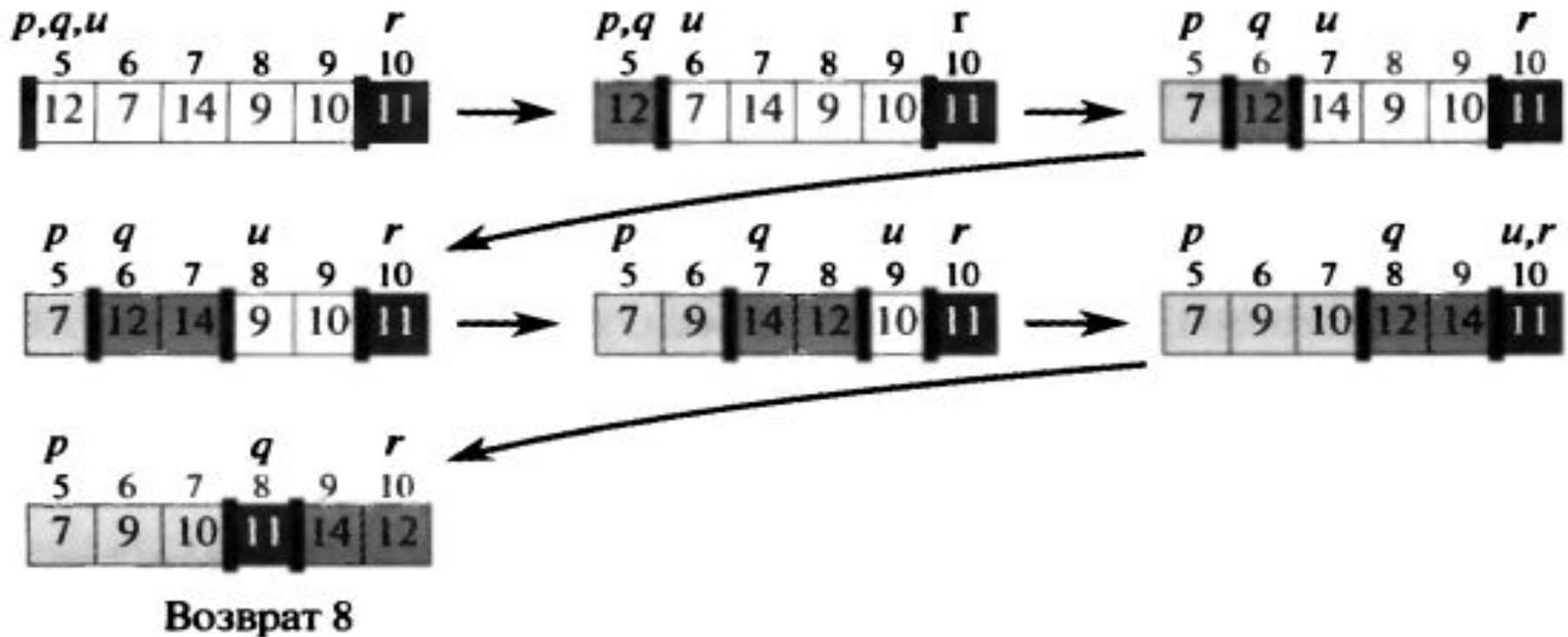
Шаги процедуры:

1. Если $p > r$, просто выйти из процедуры, не выполняя никаких действий.
2. В противном случае выполнить следующее:
 - A. Вызвать Partition(A, p, r) и установить значение q равным результату вызова.
 - B. Рекурсивно вызвать Quicksort($A, p, q-1$).
 - C. Рекурсивно вызвать Quicksort($A, q+1, r$).

* Базовый случай осуществляется, когда сортируемый подмассив содержит менее двух элементов.

* Процедура Partition(A, p, r) разбивает подмассив $A[p..r]$ и возвращает индекс q позиции, в которую помещается опорный элемент.

Процедура разбиения



- Выбираем в подмассиве $A[p..r]$ крайний справа элемент $A[r]$ в качестве опорного.
- Затем мы проходим через подмассив слева направо, сравнивая каждый элемент с опорным.

Процедура разбиения

Процедура Partition(A,p,r).

Вход: тот же, что и для Merge-Sort.

Результат: перестановка элементов $A[p..r]$, такая, что каждый элемент в $A[p..q-1]$ не превышает $A[q]$, а каждый элемент в $A[q+1..r]$ больше $A[q]$. Возвращает значение индекса q .

Шаги процедуры:

1. Установить q равным p .

2. Для $u = p$ до $r-1$:

 А. Если $A[u] \leq A[r]$, обменять $A[q]$ с $A[u]$, а затем увеличить

q на 1.

Выполняется по одному сравнению каждого элемента с опорным и не более одного обмена для каждого элемента, так что время работы процедуры разбиения с n -элементным подмассивом равно $\Theta(n)$.

Время работы быстрой сортировки

- В наихудшем случае размеры разделов являются несбалансированными. Например, если массив изначально отсортирован мы всякий раз будем разбивать массив $A[p..r]$ на подмассивы $A[p..r-1]$ и $A[r]$. Тогда для времени сортировки подмассива из n элементов получаем рекуррентное соотношение $T(n)=T(n-1)+\Theta(n)$. Оказывается, что в этом случае $T(n)$ имеет вид $\Theta(n^2)$.
- В наилучшем случае, если всякий раз каждый из подмассивов будет иметь размер $n/2$, то рекуррентное соотношение для времени работы такое же, как для сортировки слиянием: $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$, а значит, $T(n)$ имеет вид $\Theta(n\log_2 n)$.

Время работы быстрой

сортировки

- Если элементы входного массива располагаются в случайном порядке, то в среднем получаем разделения, достаточно близкие к разбиениям пополам, так что быстрая сортировка имеет при этом время работы $\Theta(n \log_2 n)$.
- Чтобы повысить шансы на получение хороших разбиений, можно выбирать опорные элементы случайным образом.
- Следует также оценить, сколько раз процедура Quicksort обменивает элементы. Наибольшее количество обменов осуществляется, когда n четно и входной массив имеет вид $n, n-2, n-4, \dots, 4, 2, 1, 3, 5, \dots, n-3, n-1$. В этом случае выполняется $n^2/4$ обменов, и асимптотическое время работы алгоритма соответствует наихудшему случаю $\Theta(n^2)$.

Резюме

Алгоритмы поиска

Алгоритм	Время работы в наихудшем случае	Время работы в наилучшем случае	Требует ли отсортированного входного массива
Линейный поиск	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	Нет
Бинарный поиск	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(1)$	Да

Алгоритмы сортировки

Алгоритм сортировки	Время работы в наихудшем случае	Время работы в наилучшем случае	Обменов в наихудшем случае	Выполняется ли сортировка на месте
Выбором	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	Да
Вставкой	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	Да
Слиянием	$\Theta(n \lg n)$	$\Theta(n \lg n)$	$\Theta(n \lg n)$	Нет
Быстрая	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \lg n)$	$\Theta(n^2)$	Да

Можно ли превзойти время сортировки $\Theta(n \log_2 n)$?

НЕТ

Если единственный способ определения порядка размещения элементов – это их сравнение



Сортировка сравнением
(определяет порядок сортировки только путем сравнения пар элементов)

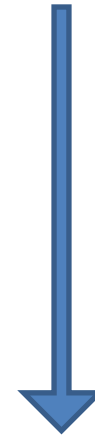


$\Omega(n \log_2 n)$

экзистенциальная нижняя граница
(т.к. существуют такие входные данные)

ДА

Если имеется дополнительная информация о сортируемых элементах



$\Omega(n)$

универсальная нижняя граница
(т.к. применима ко всем входным данным)

Простая сортировка за время $\Theta(n)$

- Предположим, что каждый ключ сортировки является либо единицей, либо двойкой.
- Пройдем по всем элементам и подсчитаем, сколько среди них единиц (k).
- Установим значение 1 в первых k позициях массива и значение 2 в остальных $n-k$ позициях.



- Алгоритм никогда не сравнивает два элемента массива один с другим: он сравнивает каждый элемент массива со значением 1, но не с другим элементом массива.
- Процедура выполняется за время $\Theta(n)$, т.к. первый цикл выполняет n итераций, как и два последних цикла вместе.
- Т.о. если есть дополнительная информация об элементах массива, можно превзойти алгоритмы сортировки сравнением.

Процедура очень простой сортировки

Процедура Really-Simple-Sort(A,n).

Вход:

- A – массив, все элементы которого имеют значения 1 или 2,
- n – количество сортируемых элементов A.

Результат: элементы A отсортированы в неубывающем порядке.

Шаги процедуры:

1. Установить k равным нулю.
2. Для $i = 1$ до n:
 - A. Если $A[i] = 1$, увеличить k на единицу.
3. Для $i = 1$ до k:
 - A. Установить $A[i]$ равным 1.
4. Для $i = k + 1$ до n:
 - A. Установить $A[i]$ равным 2.

Сортировка подсчетом

- Обобщение на случай m различных возможных значений ключей сортировки, которые являются, скажем, целыми числами от 0 до $m-1$.
- *Идея*: если мы знаем, что у k элементов ключи сортировки равны x , а у l элементов ключи сортировки меньше x , то элементы с ключами сортировки, равными x , в отсортированном массиве должны занимать позиции от $l+1$ до $l+k$.
- *Надо*: для каждого возможного значения ключа сортировки вычислить, у какого количества элементов ключи сортировки меньше этого значения (значение l) и сколько имеется элементов с данным значением ключа сортировки (значение k).

Разобьем на подзадачи

1) Вычислим, у какого количества элементов ключи сортировки равны заданному значению

Процедура Count-Keys-Equal(A, n, m).

Вход:

- A – массив целых чисел в диапазоне от 0 до $m-1$,
- n – количество элементов в массиве A ,
- m – определяет диапазон значений в массиве A .

Выход: массив $equal[0..m-1]$, такой, что $equal[j]$ содержит количество элементов массива A , равных j , для $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

Шаги процедуры:

1. Пусть $equal[0..m-1]$ представляет собой новый массив.
2. Установить все значения массива $equal$ равными нулю.
3. Для $i=1$ до n :
 - A. Установить значение переменной key равным $A[i]$.
 - B. Увеличить $equal[key]$ на единицу.

$\Theta(n+m)$

4. Вернуть массив $equal$.

2) Выясним, у какого количества элементов ключи сортировки меньше каждого возможного значения

Процедура **Count-Keys-Less(equal,m)**.

Вход:

- `equal` – массив, возвращаемый вызовом процедуры `Count-Keys-Equal`,
- `m` – определяет диапазон индексов массива `equal` – от 0 до `m-1`.

Выход: массив `less[0..m-1]`, такой, что для $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ элемент `less[j]` содержит сумму `equal[0] + equal[1] + ... + equal[j-1]`.

Шаги процедуры:

1. Пусть `less[0..m-1]` представляет собой новый массив.
2. Установить `less[0]` равным нулю.
3. Для $j = 1$ до $m-1$:

$\Theta(m)$

 А. Установить `less[j]` равным `less[j-1] + equal[j-1]`.

4. Вернуть массив `less`.

3) Создадим отсортированный массив путем перемещения элементов из массива A в массив B так, чтобы они в конечном итоге оказались в массиве B в отсортированном порядке

Процедура $\text{Rearrange}(A, \text{less}, n, m)$.

Вход:

- A – массив целых чисел в диапазоне от 0 до $m-1$,
- less – массив, возвращаемый процедурой Count-Keys-Less,
- n – количество элементов в массиве A ,
- m – определяет диапазон значений элементов в массиве A .

Выход: массив B , содержащий элементы массива A в отсортированном порядке.

Шаги процедуры:

1. Пусть $B[1..n]$ и $\text{next}[0..m-1]$ – новые массивы.
2. Для $j = 0$ до $m-1$:

A . Установить $\text{next}[j]$ равным $\text{less}[j] + 1$.



3. Для $i = 1$ до n :

A. Установить значение key равным $A[i]$.

B. Установить значение $index$ равным $next[key]$.

C. Установить $B[index]$ равным $A[i]$.

D. Увеличить значение $next[key]$ на единицу.

4. Вернуть массив B .

$\Theta(m+n)$

- Вспомогательный массив $next[j]$ указывает индекс элемента в массиве B , в который должен быть помещен очередной элемент массива A с ключом j . Этот индекс первоначально равен $next[j] = less[j] + 1$ и с каждым найденным элементом с ключом j должен быть увеличен на 1.
- Цикл на шаге 2 выполняется за время $\Theta(m)$, а цикл на шаге 3 — за время $\Theta(n)$. Следовательно, процедура `Rearrange` имеет время работы $\Theta(m+n)$.

4) Собираем все три процедуры вместе для создания окончательной процедуры сортировки подсчетом

Процедура Counting-Sort(A, n, m).

Вход:

- A – массив целых чисел в диапазоне от 0 до $m-1$,
- n – количество элементов в массиве A ,
- m – определяет диапазон значений в массиве A .

Выход: массив B , содержащий элементы массива A в отсортированном порядке.

Шаги процедуры:

1. Вызвать процедуру Count-Keys-Equal(A, n, m) и сохранить ее результат как массив $equal$.
2. Вызвать процедуру Count-Keys-Less($equal, m$) и сохранить ее результат как массив $less$.
3. Вызвать процедуру Rearrange($A, less, n, m$) и сохранить ее результат как массив B .
4. Вернуть массив B .

Время работы сортировки

ПОДСЧЕТОМ

- Исходя из времени работы процедур Count-Keys-Equal ($\Theta(m+n)$), Count-Keys-Less ($\Theta(m)$) и Rearrange ($\Theta(m+n)$), получаем, что процедура Counting-Sort выполняется за время $\Theta(m+n)$, или просто $\Theta(n)$, если m представляет собой константу.
- Сортировка подсчетом превосходит нижнюю границу $\Omega(n \log_2 n)$ сортировки сравнением, потому что она никогда не сравнивает ключи сортировки один с другим.
- Ключи сортировки используются для *индексирования массивов*, что вполне реально, когда ключи сортировки являются небольшими целыми значениями.
- Если ключи сортировки представляют собой действительные числа или, например, строки символов, то использовать сортировку подсчетом

Устойчивость сортировки

Сортировка подсчетом имеет еще одно важное свойство. Она является устойчивой: элементы с одним и тем же ключом сортировки оказываются в выходном массиве в том же порядке, что и во входном.

Другими словами, устойчивая сортировка, встречая два элемента с равными ключами, разрешает неоднозначность, помещая в выходной массив первым тот элемент, который появляется первым во входном массиве.

Поразрядная сортировка

- Используется сортировка подсчетом и ее свойство устойчивости.
- Предполагается, что каждый ключ сортировки можно рассматривать как d -значное число, каждая цифра которого находится в диапазоне от 0 до $m-1$.
- Поочередно используется устойчивая сортировка (например, сортировка подсчетом) для каждой цифры *справа налево*. Порядок сортировки цифр или символов действительно важен.

Пример поразрядной сортировки

Нужно отсортировать по алфавиту и по возрастанию двухсимвольные коды <F6, E5, R6, X6, X2, T5, F2, T3>.

1) Сортируем подсчетом по правому символу: <X2, F2, T3, E5, T5, F6, R6, X6>. В силу устойчивости после сортировки X2 продолжает находиться перед F2.

2) Сортируем результат подсчетом по левому символу и получим то, что и требуется: <E5, F2, F6, R6, T3, T5, X2, X6>.

Если начать сортировку слева направо, то после сортировки подсчетом по левому символу получили бы <E5, F6, F2, R6, T5, T3, X6, X2>, а затем после сортировки подсчетом по правому символу получили бы неверный результат <F2, X2, T3, E5, T5, F6, R6, X6>. 44

Время работы поразрядной сортировки

- Если в качестве устойчивой применяется сортировка подсчетом, то время сортировки по одной цифре составляет $\Theta(m+n)$, а время сортировки по всем d цифрам — $\Theta(d(m+n))$.
- Если m является константой, то время работы поразрядной сортировки становится равным $\Theta(dn)$.
- Если d также представляет собой константу, то время работы поразрядной сортировки превращается в просто $\Theta(n)$.
- Причина: поразрядная сортировка никогда не сравнивает два ключа сортировки один с другим, а использует отдельные цифры для индексирования массивов в сортировке