Основы программирования

Рекурсивные алгоритмы

Пример: вычисление факториала

Эквивалентные рекуррентные соотношения для n!:

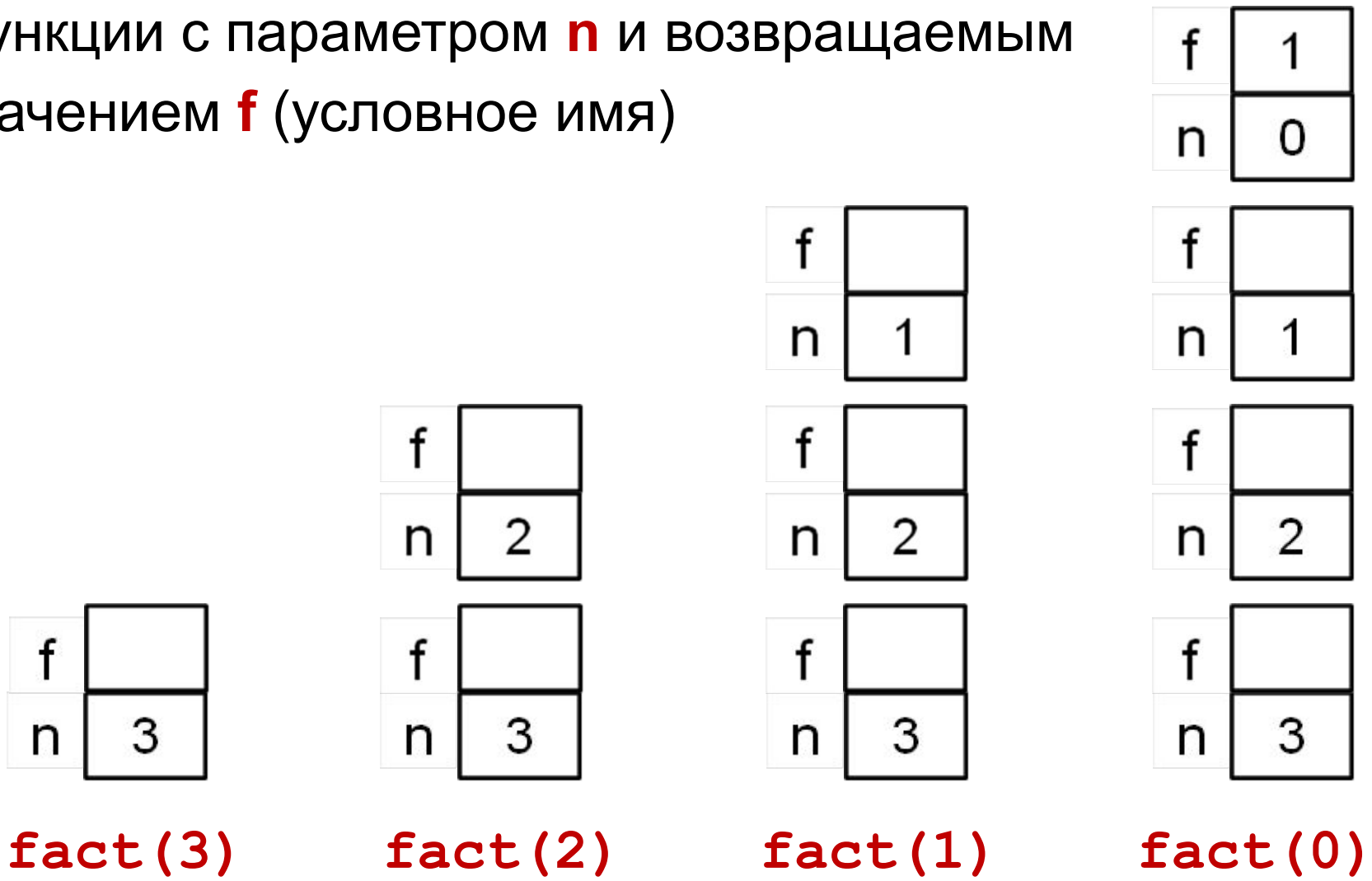
$$\begin{cases} F_0 = 1, \\ F_i = F_{i-1} * i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad \begin{cases} 0! = 1, \\ n! = n \cdot (n-1)! \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

можно использовать для построения не только рекуррентного (на основе цикла), но и рекурсивного алгоритма (вычислить n! через (n-1)! и т.д.).

```
int fact(int n)
{
    if (n <= 0) return 1;
    else return fact(n-1) * n;
}
void main(…)
{
    cout << fact(3);
}
```

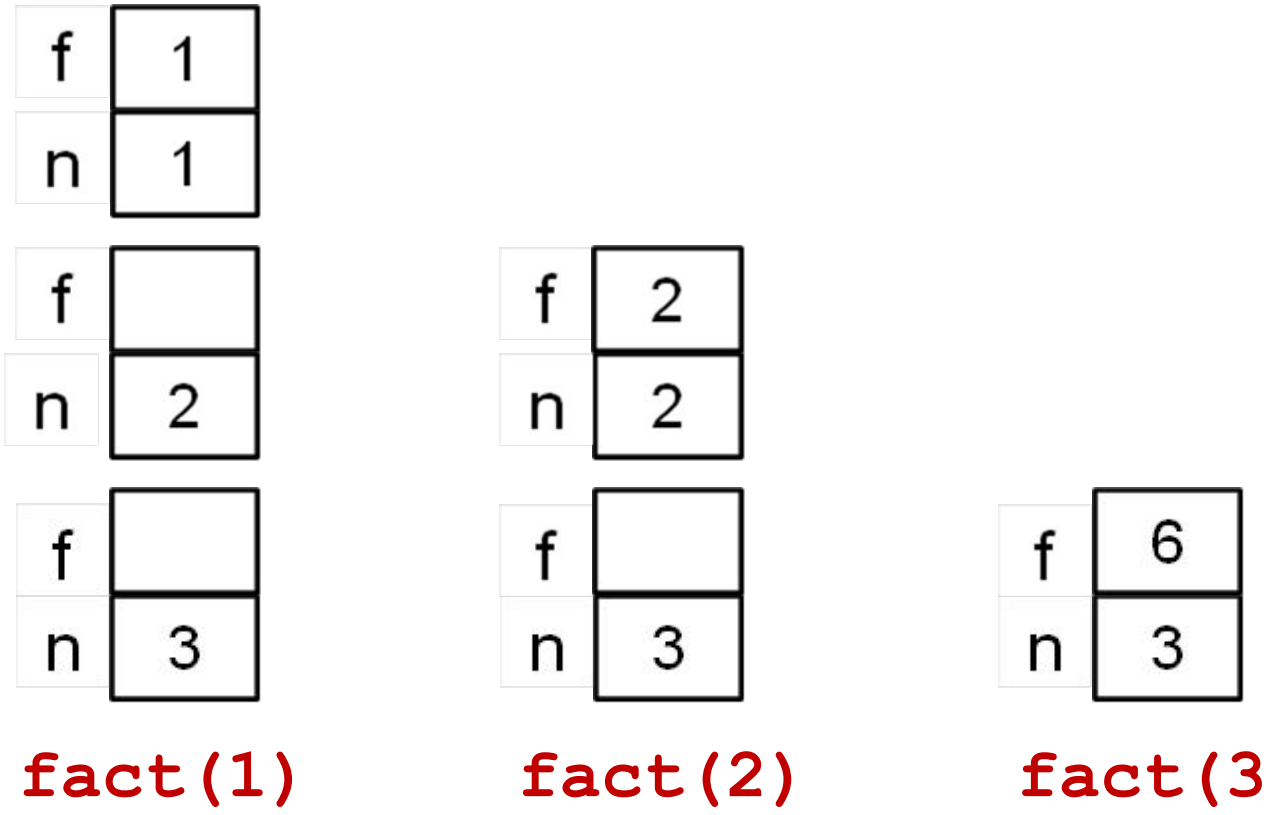
Стек при рекурсивном спуске

Последовательные вызовы рекурсивной функции с параметром **n** и возвращаемым значением **f** (условное имя)



Стек при рекурсивном подъеме

Состояние перед освобождением стека и возвратом в вызывающую функцию с передачей возвращаемого значения **f**



Метод математической индукции

3 основных этапа метода математической индукции:

1) базис, 2) предположение, 3) индуктивный вывод.

На этапе **базиса** проверяют, что доказываемое утверждение $P(n)$ относительно параметра индукции n справедливо при $n = n_0$.

На втором этапе делается **предположение**, что утверждение $P(n)$ *справедливо для всех значений* n, ***не бóльших***, *чем некоторое* k, $k \geq n \geq n_0$.

На этапе **индуктивного вывода** доказывается, что $P(n)$ будет справедливо при $n = k + 1 > n_0$. Из этого следует, что утверждение $P(n)$ справедливо для *любого* $n \geq n_0$.

Задача «Ханойские башни»

Имеется три колышка: **a, b, c**. На колышке **a** расположено ***n*** дисков в виде башни.

Задача: Переложить всю башню на колышек **c**, перекладывая по одному диску так, чтобы любой диск большего размера **не лежал** на меньшем диске.

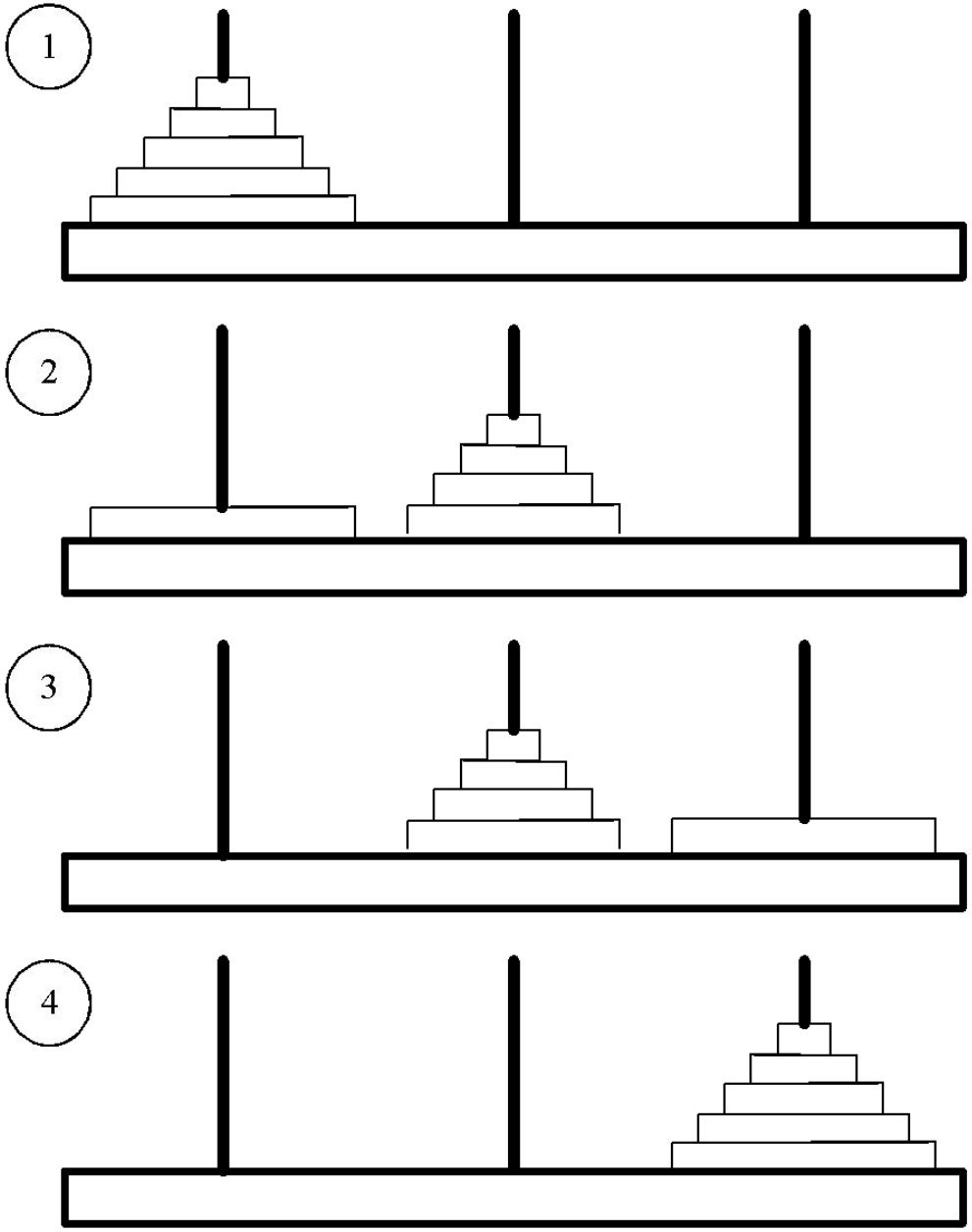
Решение на основе математической индукции:

Базис. Число дисков $n = 1$. Переложить диск с колышка **a** на колышек **c**.

Предположение. Пусть алгоритм умеет перекладывать башни из $n = k \geq 1$.

Индукция. Пусть $n = k+1 \geq 2$. Перекладываем башню из k дисков с колышка **a** на колышек **b**, затем один диск с колышка **a** на колышек **c** и, наконец, башню из k дисков с колышка **b** на колышек **c**.

Иллюстрация для шага индукции



Рекурсивная функция

```
void hanoi(int n, int a, int b, int c)
{
    if (n == 1)
        cout << a << "->" << c << endl;
    else
    {
        hanoi(n-1, a, c, b);
        cout << a << "->" << c << endl;
        hanoi(n-1, b, a, c);
    }
}
void main(…)
{
    hanoi(6, 1, 2, 3);   // 6 дисков с 1 на 3
}
```

Рекуррентное соотношение для трудоемкости

$$H(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 2H(n-1) + 1, & n = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

из которого получаем:

$$H(n) = 2\,H(n-1) + 1 = 2^2 H(n-2) + 2 + 1 =$$
$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^n - 1.$$

Глубина рекурсии: *n*.

Если на перекладывание одного диска тратить 1 секунду, то при *n* = 64 всю работу можно завершить за 2^{64} сек ≈ 580 млрд. лет.

Рекурсивное вычисление чисел Фибоначчи

```
int fib(int n)
{
  if (!n) return 0;
  else if (n == 1) return 1;
  else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

Количество рекурсивных вызовов R_n и их связь с числами Фибоначчи F_n:

$$\begin{cases} R_0 = 1,\ R_1 = 1, \\ R_n = R_{n-1} + R_{n-2} + 1, \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

R_n: 1, 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, 67,...

F_n: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

$$R_n = 2F_{n+1} - 1$$

Рекурсивный алгоритм с массивом

```
int F[50];
int fib(int n)
{
  if (!n) return F[0] = 0;
  else if (n == 1) return F[1] = 1;
  else if (F[n] > 0) return F[n];
  else return F[n] = fib(n-1) + fib(n-2);
}
void main(…)
{
   int i, n; cin >> n;
   for (i = 0; i < n; i++) F[i] = 0;
   cout << fib(n);
}
```