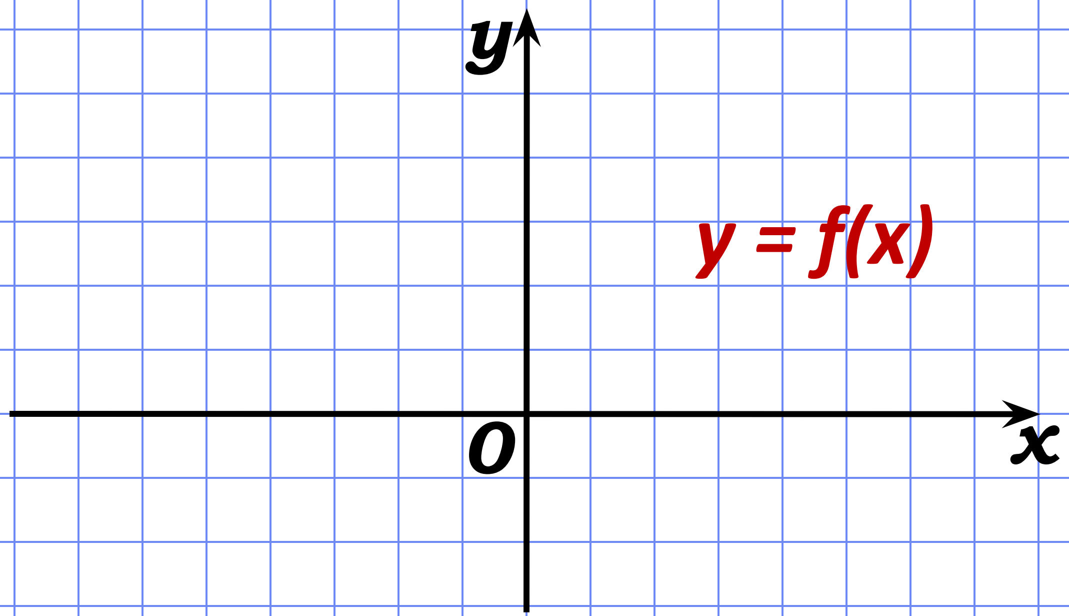
Функции и их свойства



Понятие функции

Если каждому значению ***x*** *из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число* ***y****, то говорят, что на этом множестве задана* ***функция y(x)****.*

При этом ***x*** *называют* ***независимой переменной*** *или* ***аргументом****,*
а ***y*** *–* ***зависимой переменной*** *или* ***функцией****.*

$$y = f(x)$$

Область определения и множество значений функции

Областью определения *функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.*

Обозначается ***D(y)***

Множество значений *(или область значений) функции – это множество всех значений переменной y.*

Обозначается ***E(y)***

Область определения и множество значений функции

Областью определения *функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.*

Обозначается ***D(y)***

Множество значений *(или область значений) функции – это множество всех значений переменной у.*

Обозначается ***E(y)***

Способы задания функции:

- ***аналитический*** *(с помощью формулы);*
- ***графический*** *(с помощью графика);*
- ***табличный*** *(с помощью таблицы значений);*
- ***словесный*** *(правило задания функции описывается словами).*

Свойства функций:

монотонность

*Функцию y = f(x) называют **возрастающей** на множестве X, если для любых двух элементов из этого множества, таких, что* $x_1 < x_2$*, выполняется условие* $f(x_1) < f(x_2)$.

*(Функцию называют **возрастающей,** если **большему** значению аргумента соответствует **большее** значение функции)*

*Функцию y = f(x) называют **убывающей** на множестве X, если для любых двух элементов из этого множества, таких, что* $x_1 < x_2$*, выполняется условие* $f(x_1) > f(x_2)$.

*(Функцию называют **убывающей,** если **большему** значению аргумента соответствует **меньшее** значение функции)*

Свойства функций:

ограниченность

Функцию $y = f(x)$ называют ***ограниченной снизу*** *на множестве X, если существует число* ***m****, такое, что для любого значения $x \in X$, выполняется неравенство*

$$f(x) > m.$$

Функцию $y = f(x)$ называют ***ограниченной сверху*** *на множестве X, если существует число* ***M****, такое, что для любого значения $x \in X$, выполняется неравенство*

$$f(x) < M.$$

Если функция ограничена и снизу и сверху, то ее называют ***ограниченной***

Свойства функций:

наибольшее и наименьшее значения функции

Число ***m*** *называют* ***наименьшим значением функции*** *y = f(x) на множестве X, если:*
существует число $x_o \in X$ *такое, что* $f(x_o) = m$;
для любого значения $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$f(x) \geq f(x_o).$$

Число ***M*** *называют* ***наибольшим значением функции*** *y = f(x) на множестве X, если:*
существует число $x_o \in X$ *такое, что* $f(x_o) = M$;
для любого значения $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$f(x) \leq f(x_o).$$

Свойства функций:

четность или нечетность

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют ***четной****, если для любого значения x из множества X выполняется равенство* $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

График ***четной*** *функции симметричен относительно* ***оси ординат****.*

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют ***нечетной****, если для любого значения x из множества X выполняется равенство* $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

График ***нечетной*** *функции симметричен относительно* ***начала координат****.*

Свойства функций:

точки экстремума

Точку ***x_o*** *называют* ***точкой максимума функции*** *$y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_o) выполняется неравенство*

$$f(x) < f(x_o).$$

Точку ***x_o*** *называют* ***точкой минимума функции*** *$y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_o) выполняется неравенство*

$$f(x) > f(x_o).$$

Точки максимума и минимума объединяют общим названием – ***точки экстремума***

Свойства функций:

периодичность

Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in X$ имеет ***период T****, если для любого $x \in X$ выполняется равенство*

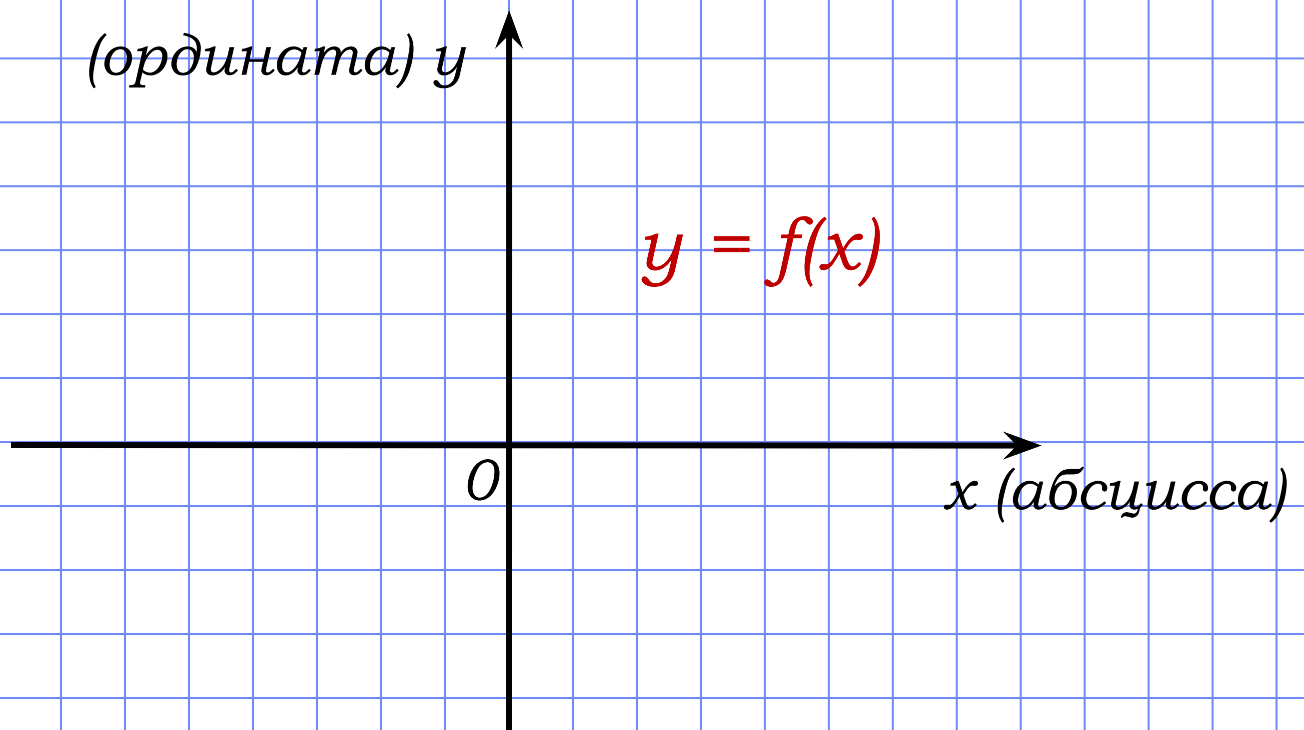
$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Функцию, имеющую отличный от нуля период называют ***периодической****.*

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ имеет период T, то любое число, кратное T (т.е. число вида kT, $k \in Z$), также является ее периодом.

График функции

Графиком функции *называется множество всех точек координатной плоскости **(x; y(x))**, абсциссы которых равны значениям независимой переменной из области определения этой функции, а ординаты – соответствующим значениям функции.*



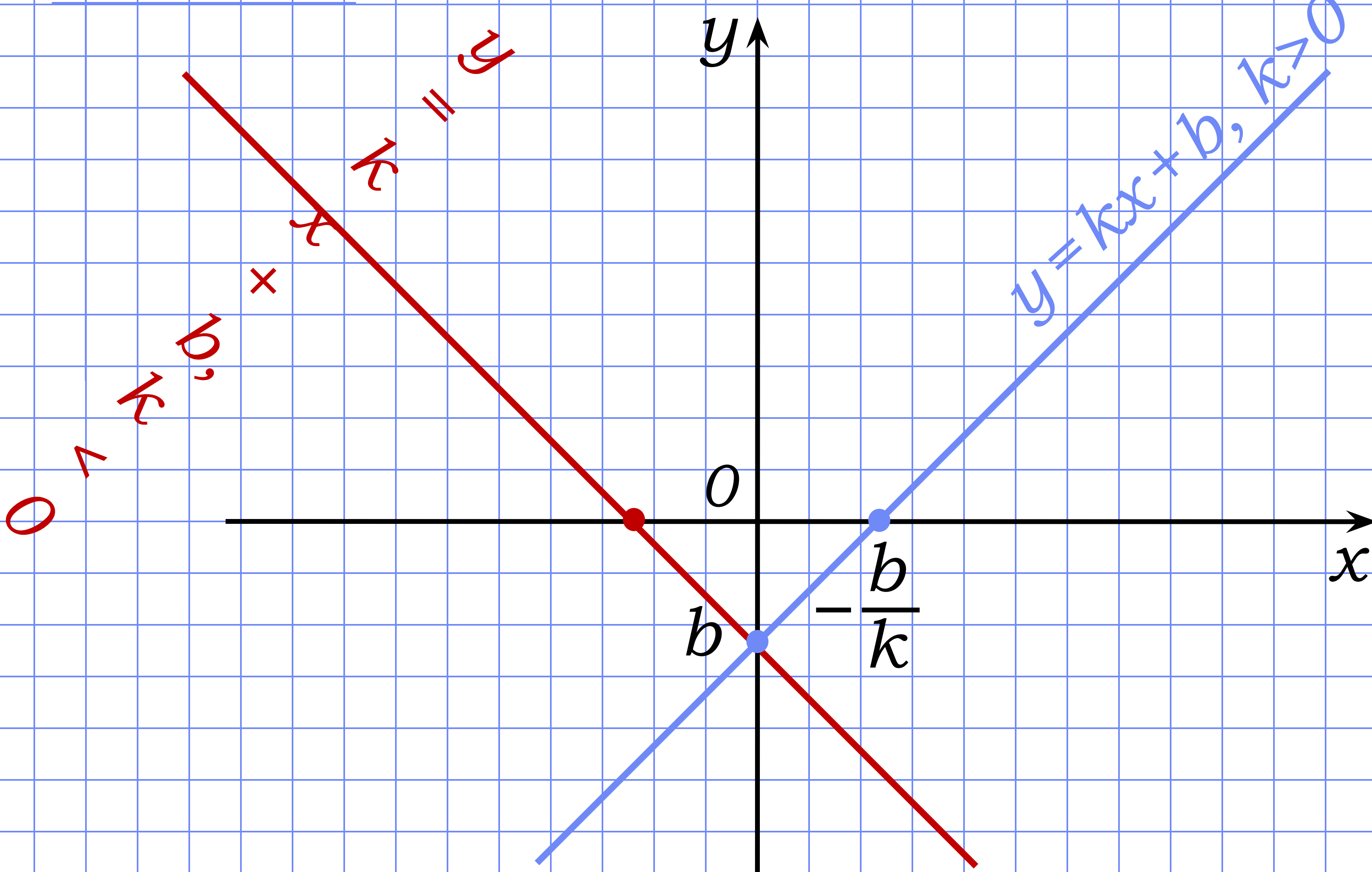
Основные элементарные функции, их свойства и графики

Линейная функция $y=kx+b$

Свойства линейной функции $y = kx + b$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Если $b = 0$, то функция нечетная.
4. а) Нули функции: $(-b/k; 0)$;
   б) точка пересечения с Оу: $(0; b)$.
5. а) возрастает, если $k > 0$;
   б) убывает, если $k < 0$.
6. Не ограничена ни снизу, ни сверху.
7. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
8. Функция непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.

Линейная функция y=kx+b



Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$

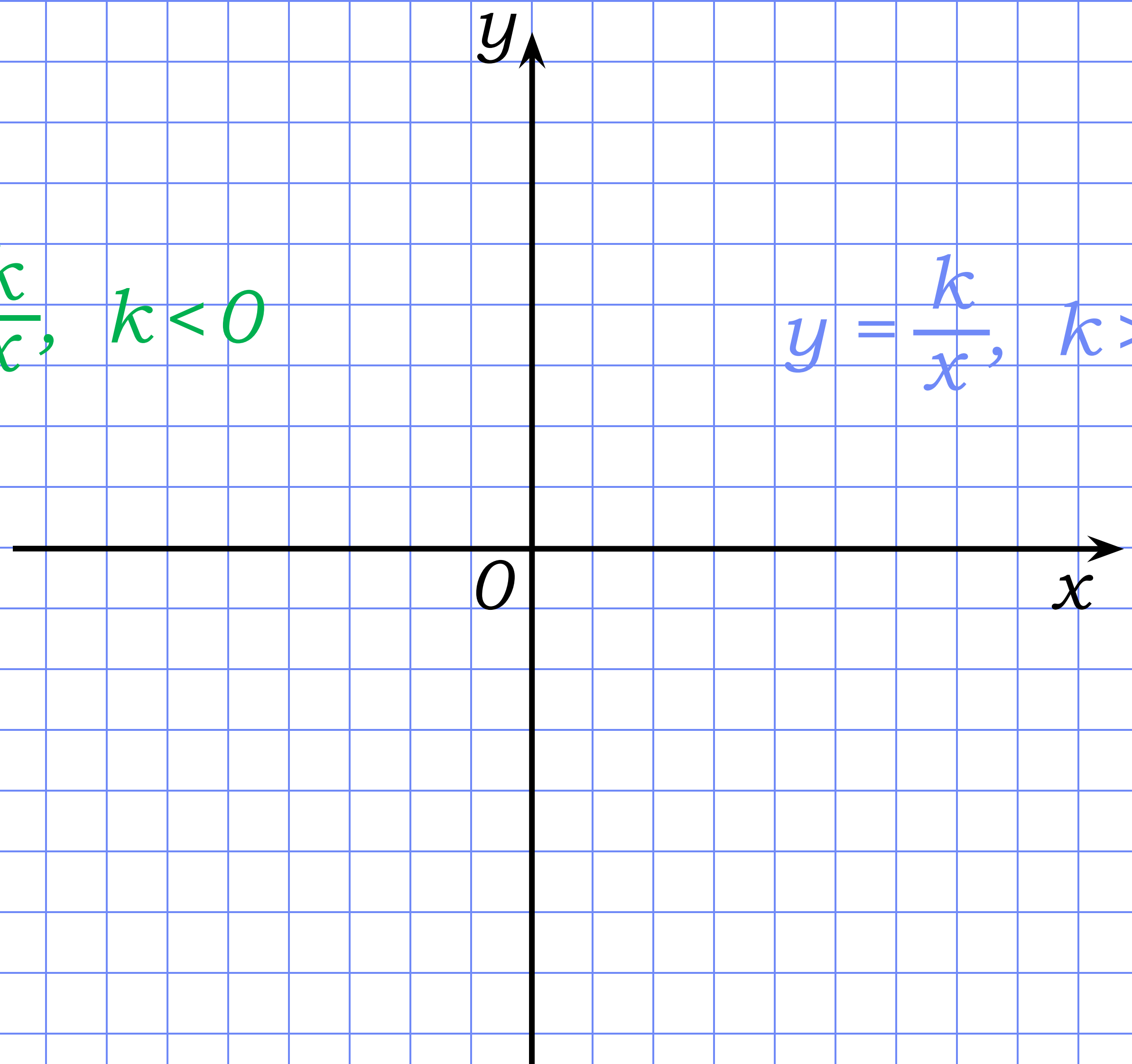
Свойства функции $y = k/x$:

1. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
2. $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
3. Функция нечетная.
4. а) Нули функции: нет;
   б) точка пересечения с Оу: нет.
5. а) если $k < 0$, то $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ – промежутки возрастания функции;
   б) если $k > 0$, то $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ – промежутки убывания функции.
6. Не ограничена ни снизу, ни сверху.
7. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
8. Функция непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

Обратная пропорциональность $y = \dfrac{k}{x}$

$y = \dfrac{k}{x}, \ k < 0$

$y = \dfrac{k}{x}, \ k > 0$



Квадратичная функция $y=kx^2$

Свойства функции $y = kx^2$ при $k > 0$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Функция четная.
4. а) Нули функции: (0; 0);
   б) точка пересечения с Оу: (0; 0).
5. а) $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции;
   б) $(-\infty; 0]$ – промежуток убывания функции.
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{наим.} = 0$;
   б) $y_{наиб.}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.
9. Выпукла вниз.

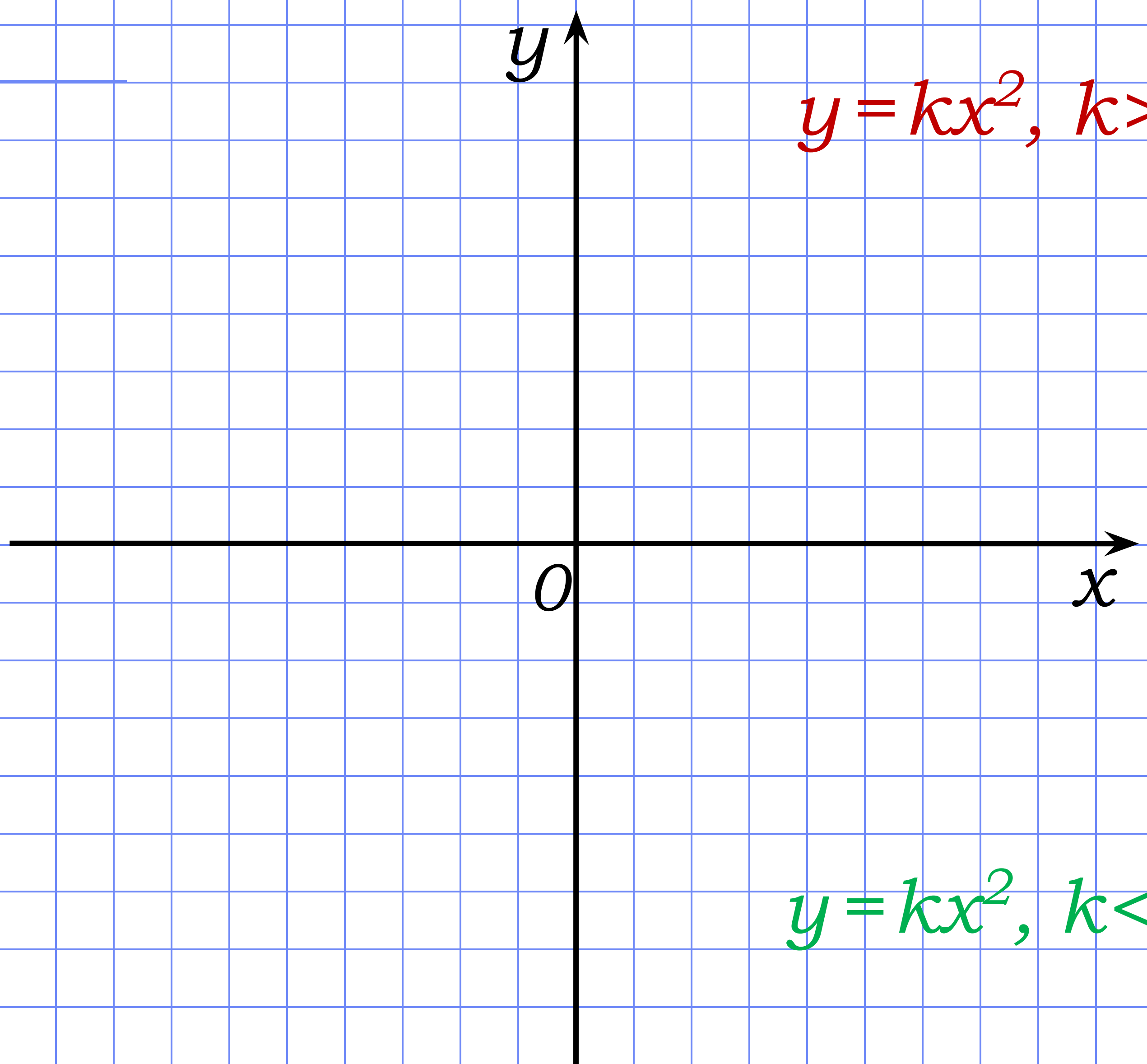
Квадратичная функция $y=kx^2$

Свойства функции $y = kx^2$ при $k < 0$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(f) = (-\infty; 0]$.
3. Функция *четная*.
4. а) Нули функции: $(0; 0)$;
   б) точка пересечения с Оу: $(0; 0)$.
5. а) $[0; +\infty)$ – промежуток *убывания* функции;
   б) $(-\infty; 0]$ – промежуток *возрастания* функции.
6. *Ограничена сверху*, *не ограничена снизу*.
7. а) $y_{наиб.} = 0$;
   б) $y_{наим.}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.
9. Выпукла вверх.

Квадратичная функция $y=kx^2$

$y=kx^2,\ k>0$



$y=kx^2,\ k<0$

Степенная функция $y=\sqrt{x}$

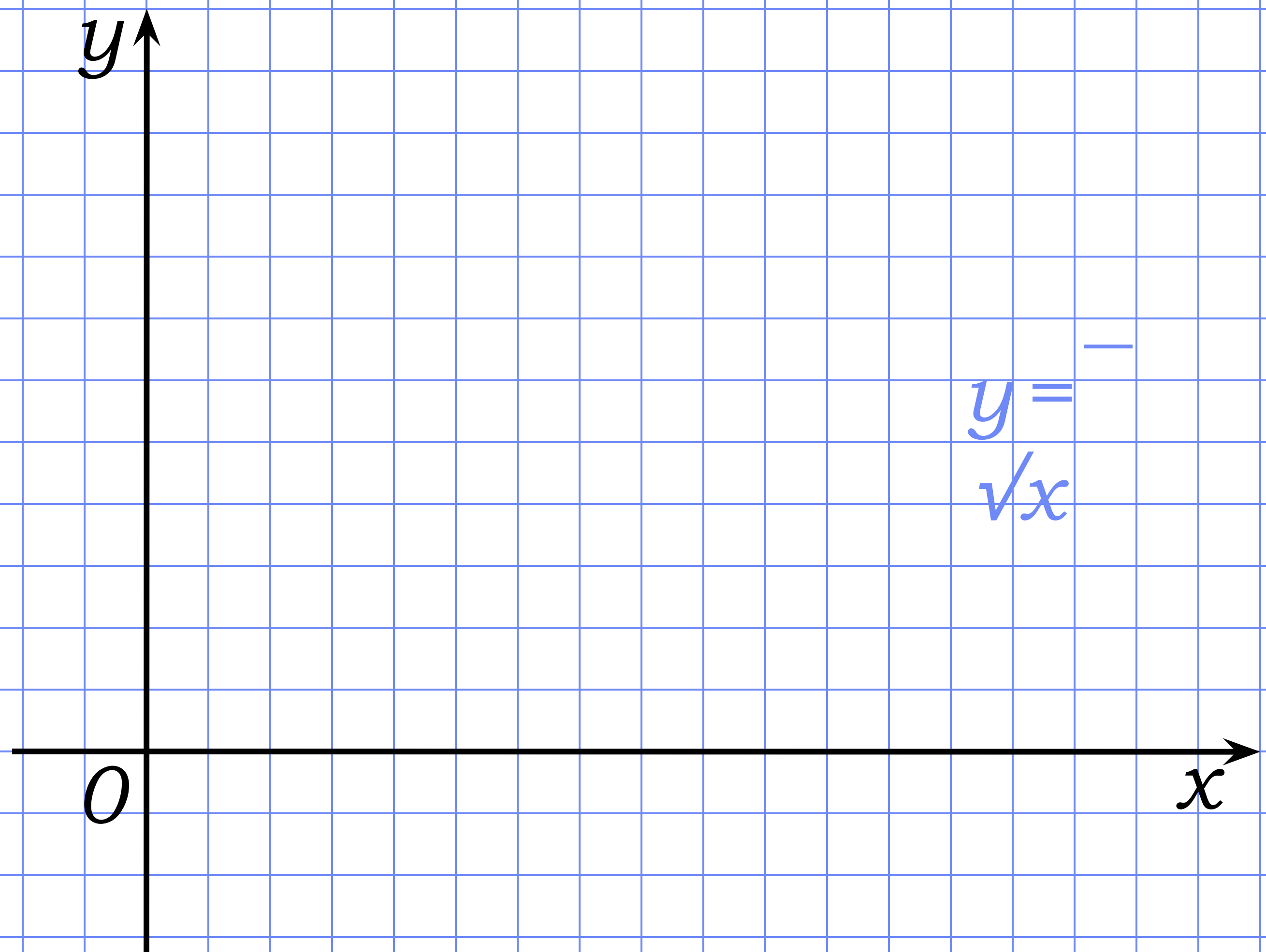
Свойства функции $y = \sqrt{x}$**:**

1. $D(f) = [0; +\infty)$.
2. $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции: (0; 0);

   б) точка пересечения с Оу: (0; 0).
5. $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции.
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{наим.} = 0$;

   б) $y_{наиб.}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вверх.

Степенная функция $y=\sqrt{x}$



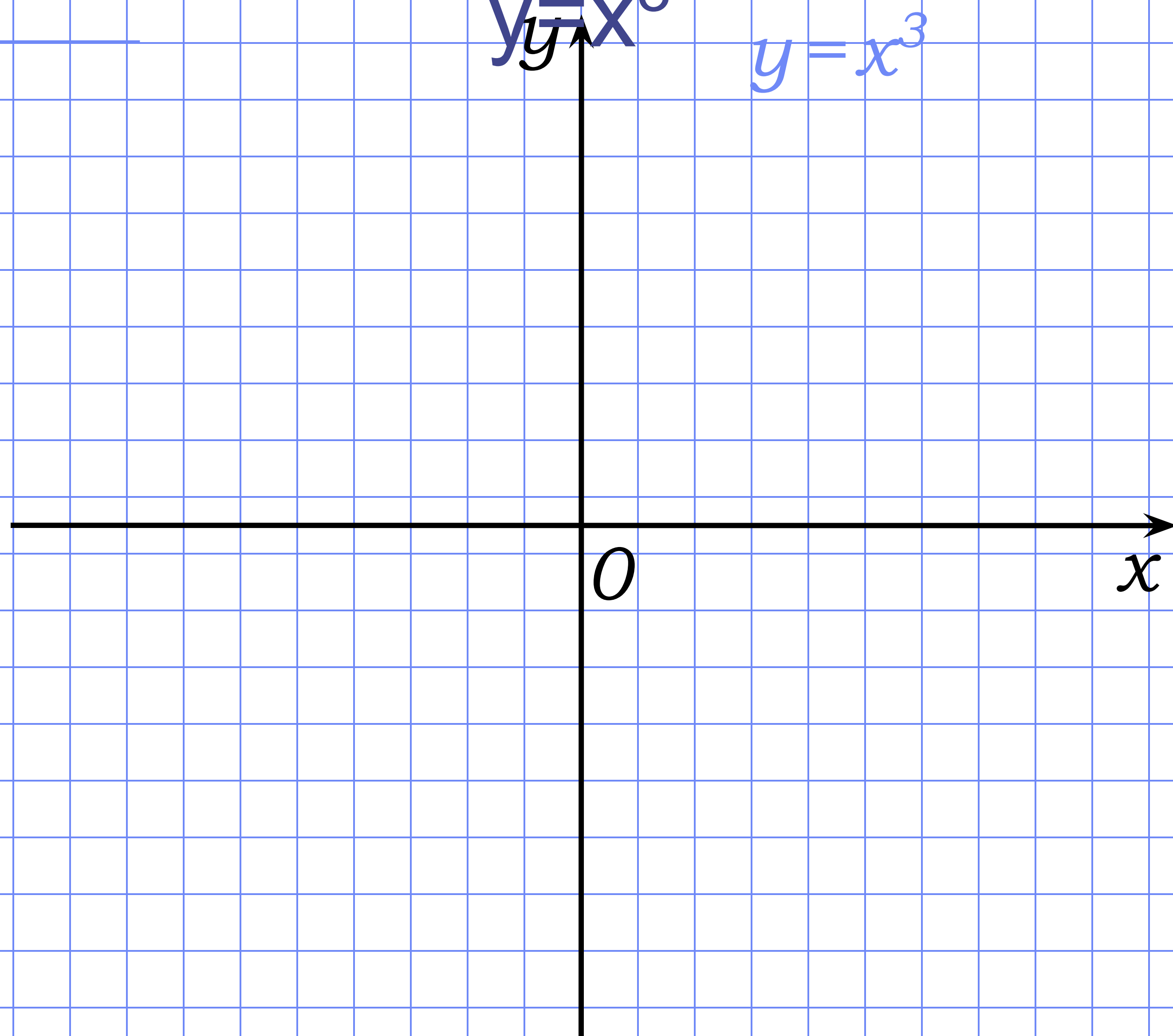
Кубическая функция
$y=x^3$

Свойства кубической функции $y = x^3$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. *Функция нечетная.*
4. *а) Нули функции: (0; 0);*
   б) точка пересечения с Оу: (0; 0).
5. *Возрастает на множестве* $(-\infty; +\infty)$.
6. *Не ограничена ни снизу, ни сверху.*
7. *Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.*
8. *Функция непрерывна на множестве* $(-\infty; +\infty)$.

Кубическая функция

$y=x^3$



Степенная функция $y=\sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$

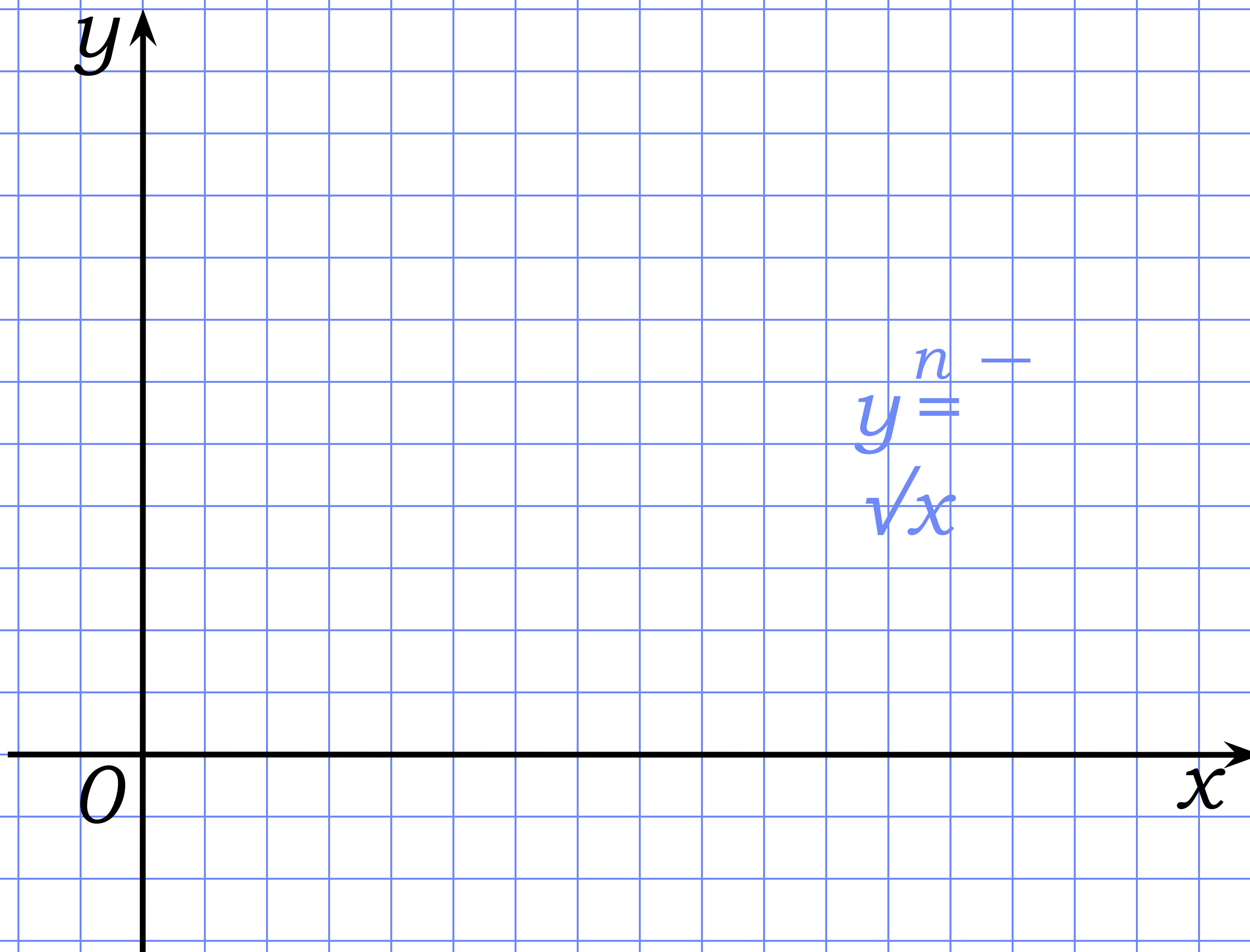
Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$:

1. $D(f) = [0; +\infty)$.
2. $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции: (0; 0);

   б) точка пересечения с Оу: (0; 0).
5. $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции.
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{наим.} = 0$;

   б) $y_{наиб.}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вверх.

Степенная функция $y=\sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$



Степенная функция $y=\sqrt[n]{x}$,

n - нечетное

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $n = 2k+1$:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция нечетная.
4. а) Нули функции: (0; 0);

   б) точка пересечения с Оу: (0; 0).
5. Возрастает на множестве $(-\infty; +\infty)$.
6. Не ограничена ни снизу, ни сверху.
7. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
8. Функция непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.

Степенная функция $y=\sqrt[n]{x}$,

п - нечетное