Классическая электродинамика. Введение в классическую электродинамику. Дополнительные главы физики.

Николай Николаевич Ро́занов

февраль-июнь 2016

ВВЕДЕНИЕ

Теория электромагнитного поля как раздел курса «Физические основы квантовой электроники». Основное внимание - электромагнитным волнам и их оптическому диапазону. Связь теории электромагнитного поля с другими разделами физики. Оптические среды.

Роль электромагнитных волн. Сравнение с акустическими и другими волнами (теория волн). Фотоны – элементарные частицы (а не квазичастицы, как фононы). Эфир и вакуум. Линейные и нелинейные волны.

Уравнения Максвелла в сплошной среде

	СГС	СИ	
Закон Гаусса	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Электрический заряд является источником электрической индукции
Закон Гаусса для магнитного поля	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Не существует магнитных зарядов
Закон индукции Фарадея	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле
Теорема о циркуляции магн. поля ----------------	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле

Уравнения Максвелла, интегральная форма

	СГС	СИ	
Закон Гаусса	$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$	$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = Q$	Поток электрической индукции через замкнутую поверхность S пропорционален величине свободного заряда, находящегося внутри поверхности S
Закон Гаусса для магн. поля	$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0$	$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0$	Поток магнитной индукции через замкнутую поверхность S равен нулю
Закон индукции Фарадея	$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$	$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$	Изменение потока магнитной индукции, проходящего через незамкнутую поверхность S, взятое с обратным знаком, пропорционально циркуляции электрического поля на замкнутом контуре *l*, который является границей поверхности S
Теорема о циркуляции магнитного поля	$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}$	$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}$	Полный электрический ток свободных электронов и изменение потока электрической индукции через незамкнутую поверхность S пропорциональны циркуляции магнитного поля на замкнутом контуре *l*, который является границей поверхности S

S – двумерная поверхность, замкнутая для теоремы Гаусса и открытая для законов Фарадея и Ампера (ее границей является замкнутый контур). $Q = \int \rho\, dv$ – электрический заряд внутри объема V, ограниченного поверхностью S.
$I = \int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s}$ – электрический ток, протекающий через поверхность S.

Справочные формулы

В декартовых координатах $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z$ $\nabla S = \operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial S}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial S}{\partial z}\mathbf{e}_z$

$$(\nabla, \mathbf{V}) = \operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad [\nabla \times \mathbf{V}] = \operatorname{rot}\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

В цилиндрических координатах $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z$ $\operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial S}{\partial z}\mathbf{e}_z$

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_z$$

Справочные формулы

В сферических координатах

$$\mathrm{grad}\, S = \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial S}{\partial r}\mathbf{e}_r$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\, V_\theta)}{\partial \theta}$$

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{V} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_\varphi)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta\, V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_r$$

Материальные уравнения

Соотношения между **D**, **B**, **E** и **H**

В вакууме **D** = **E**, **B** = **H**

В среде материальные уравнения могут иметь вид нелокальных по времени и пространству и нелинейных соотношений (будут приведены позже).

Упражнения (векторный анализ)

1. Радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$. $\operatorname{div}\mathbf{r} = ?$ $\operatorname{rot}\mathbf{r} = ?$

2. $S = \ln\left[\frac{1}{w}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right]$. $\operatorname{grad} S = ?$

3. Доказать: $\operatorname{div}(S\mathbf{V}) = S\operatorname{div}\mathbf{V} + (\mathbf{V}, \operatorname{grad} S)$.

4. Доказать: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$. – *дом. задание*

5. Доказать: $\operatorname{rot}\operatorname{grad} S = 0$. – *дом. задание*

Упражнения

Вывести из уравнений Максвелла закон Кулона для точечного заряда в вакууме. Проверить выполнение всех уравнений Максвелла.

Найти напряженность эл. поля шара с равномерной плотностью заряда.

Найти напряженность эл. поля кольцевого слоя с равномерной плотностью заряда. - дом. задание

Найти распределение плотности заряда, если известно распределение напряженности эл. поля $\mathbf{E} = Ar^n\mathbf{r}$,
где A и n – постоянные, $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad r = |\mathbf{r}|$
Пояснить физический смысл результата при n = -3.

Уравнение непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \qquad \boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}\left\{\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\right\} = -\operatorname{div}\mathbf{j}$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0}$$

Закон сохранения электрического заряда

$$Q = \int_V \rho\, dV$$

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int_V \operatorname{div}\mathbf{j}\, dV = -\int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} \to 0 \qquad \boxed{\frac{dQ}{dt} = 0}$$

«Площади» э.-м. поля

Рассматриваем ограниченные в пространстве и времени пакеты поля (с конечной энергией)

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Интегрируем по времени в бесконечных пределах

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{S}_E = 0, \quad \mathbf{S}_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\,dt$$

– «площадь» электрич. поля
– безвихревой вектор

Интегрируем по пространству (объему) в бесконечных пределах

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}_B = 0, \quad \mathbf{S}_B = \int \mathbf{B}\,d^3\mathbf{r}$$

– «площадь» магнитного поля
– сохраняется

Эти общие (для любого вида материальных уравнений) соотношения полезны для контроля точности моделирования динамики поля.

Уравнения Максвелла в вакууме (СГС)

Учебное пособие: Н.Н. Розанов. Специальные разделы мат. физики. Ч.I. Электромагнитные волны в вакууме. 2005.

$$\mathbf{D} = \mathbf{E},\ \ \mathbf{B} = \mathbf{H},\ \ \rho = 0,\ \mathbf{j} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0$$

Условия применимости:

1.Инерциальная система отсчета

2.Гравитационные эффекты

3.Квантовые ограничения для слабых и сильных полей

Квантовые ограничения в слабых полях

Уравнения Максвелла отвечают континуальному (а не дискретному) описанию. Поэтому для их справедливости число фотонов в основных модах N должно быть велико: $N >> 1$. Этот фактор важен при анализе шумов излучения и сжатых состояний электромагнитного поля (*квантовая оптика*).

Квантовые ограничения в сильных полях

В уравнениях Максвелла не учитываются вероятность рождения электрон-позитронных пар и эффекты поляризации вакуума. Необходимое условие пренебрежения этими эффектами: $E << E_{cr} = m^2c^3 / (|e|\hbar)$
(изменение энергии заряда $|e|$ в поле напряженности E на расстоянии равном комптоновской длине волны электрона $R_C = h/(mc)$ = 2.4 10^(-10) см должно быть много меньше mc^2 , m – масса электрона, h – постоянная Планка, $\hbar = h / 2\pi$). В мощных лазерных установках достигаются напряженности полей, близкие к критическим. Последовательная теория дается *квантовой электродинамикой.*
Приближенно электромагнитное поле в электрон-позитронном вакууме описывается уравнениями электродинамики сплошных сред. Комптоновская длина волны электрона описывает его «размазанность», при меньших расстояниях классическая теория неприменима.

Симметрия уравнений Максвелла в вакууме

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E}$$

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}$$

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to -\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to \mathbf{H}$$

Равноправность E и H в вакууме без зарядов.
Равноправность направлений течения времени
(в классическом вакууме нет диссипации энергии)

Векторная структура уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ρ – скаляр (плотность эл. заряда)

E, D, j – полярные трехмерные векторы

H, B – аксиальные трехмерные векторы

При зеркальном отражении направление полярных векторов не меняется, а для аксиальных сменяется противоположным. Ср. с силой Лоренца

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\right)$$

Различие полярных и аксиальных векторов существенно для записи нелинейных восприимчивостей.

Волновое уравнение

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} - \Delta\mathbf{V}}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

Немагнитные среды $\mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}$$

Не все решения волнового уравнения служат решениями уравнений Максвелла, поскольку эти решения могут не удовлетворять уравнению $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho$. Фактически это соотношение накладывает ограничения на поляризационную структуру излучения. Таким образом, при исключении из уравнений Максвелла магнитных величин к волновому уравнению следует добавить уравнение $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho$

Динамика э.-м. поля

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

При заданных материальных соотношениях возможна постановка задачи Коши – по начальным данным $(t \le t_0)$ определяется последующие значения полей. Динамических уравнений два (содержащих временную производную 1-го порядка; частотной дисперсией здесь пренебрегаем). Два «статических» уравнения ограничивают вид начальных условий.

Пример – вакуум без зарядов ($\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \rho = 0, \quad \mathbf{j} = 0$)

Динамика э.-м. поля в вакууме

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0$$

Уравнения Максвелла содержат производные по времени первого порядка. Поэтому задания напряженностей **E** и **H** в начальный момент времени достаточно для определения дальнейшей динамики поля (+ граничные условия).

$$\mathbf{E}\big|_{t=0} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}\big|_{t=0} = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})$$

Метод численного расчета: FDTD – finite-difference time-domain. – *тема для итоговой презентации*

Начальные условия (вакуум)

не произвольны. Они должны подчиняться условиям

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0$$

Если это так, то и в последующие моменты времени значения $\operatorname{div}\mathbf{H}$, $\operatorname{div}\mathbf{E}$ останутся нулевыми, так как {div rot **V** = 0}

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{H} = \ldots = 0$$

Из-за уравнений Максвелла с div произвольно можно задавать только по две компоненты векторов $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$, эти уравнения определяют вид третьих компонент. Например, пусть заданы $H_{0,x}(\mathbf{r}), H_{0,y}(\mathbf{r})$. Тогда ($f$ – произвольная функция своих аргументов)

$$\frac{\partial H_{0,z}}{\partial z} = -\frac{\partial H_{0,x}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0,y}}{\partial y}, \qquad H_{0,z} = -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial H_{0,x}}{\partial x} + \frac{\partial H_{0,y}}{\partial y}\right)dz + f(x,y)$$

Динамика поля (задача Коши)*

$$\mathbf{E}\,|_{t=0} = \mathbf{E}_0(r), \quad \mathbf{H}\,|_{t=0} = \mathbf{H}_0(r).$$

Поскольку уравнения Максвелла – первого порядка по времени, то начальные условия позволяют определить значения напряженностей электрического и магнитного полей в последующие моменты времени.
Разложения Тейлора для малых интервалов времени:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},0) + \left.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\right|_{t=0} t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n}\right|_{t=0} t^n + \ldots,$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(\mathbf{r},0) + \left.\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}\right|_{t=0} t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n \mathbf{H}}{\partial t^n}\right|_{t=0} t^n + \ldots$$

Динамика поля*

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c\,\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c^2\,\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -c^2\,\mathrm{rot}^2\,\mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -c^2\,\mathrm{rot}^2\,\mathbf{H},$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial t^3} = -c^3\,\mathrm{rot}^3\,\mathbf{E}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{H}}{\partial t^3} = c^3\,\mathrm{rot}^3\,\mathbf{H},$$

$$\frac{\partial^4 \mathbf{E}}{\partial t^4} = c^4\,\mathrm{rot}^4\,\mathbf{E}, \quad \frac{\partial^4 \mathbf{H}}{\partial t^4} = c^4\,\mathrm{rot}^4\,\mathbf{H}, \quad \ldots$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}c^{2n}\mathrm{rot}^{2n}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\,t^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}c^{2n-1}\mathrm{rot}^{2n-1}\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\,t^{2n-1},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}c^{2n}\mathrm{rot}^{2n}\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\,t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}c^{2n-1}\mathrm{rot}^{2n-1}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\,t^{2n-1}.$$

Динамика поля*

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} - \Delta\mathbf{V}}$$

$$\mathrm{rot}^2\,\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E}, \quad \mathrm{rot}^2\,\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H}.$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}c^{2n}\,\Delta^{\mathrm{n}}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\,t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}c^{2n-1}\mathrm{rot}\,\Delta^{\mathrm{n-1}}\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\,t^{2n-1},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}c^{2n}\,\Delta^{\mathrm{n}}\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\,t^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}c^{2n-1}\mathrm{rot}\,\Delta^{\mathrm{n-1}}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\,t^{2n-1}.$$

Задания

В начальный момент $t = 0$ заданы $\mathbf{E}\big|_{t=0} = [\mathbf{a}\times\mathbf{r}], \quad \mathbf{H}\big|_{t=0} = [\mathbf{b}\times\mathbf{r}]$. Найти последующие значения напряженностей.

– дом. задание

В некоторый момент времени заданы компоненты $E_x = pyz\,\mathrm{exp}[-(x^2 + y^2 + z^2)/w^2]$, $E_z = qxy\,\mathrm{exp}[-(x^2 + y^2 + z^2)/w^2]$. Найти вид третьей компоненты $\mathbf{E}$ в тот же момент времени.

Эволюционная переменная, пример уравнения Гельмгольца

$$\tilde{\Delta}\mathbf{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^{\tilde{2}}\mathbf{D}}{\partial t^2} = 0$$

Однородная среда (вакуум), монохроматическое излучение с частотой ω

$$\tilde{\Delta}\mathbf{E} + k^{\tilde{2}}\mathbf{E} = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Фиксированная (линейная) поляризация. Одна из компонент поля f *(пример Адамара)*

Задача Коши для уравнения Гельмгольца

$$\Delta f + k^2 f = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \Delta_\perp f + k^2 f = 0, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Рассмотрим пучок монохроматического излучения с преимущественным направлением вдоль оси z

Зададим при $z = 0$ значения f и $\partial f / \partial z$

$$f\big|_{z=0} = \frac{a}{q}\cos(\mathbf{q}_\perp \mathbf{r}_\perp), \quad \mathbf{r}_\perp = (x, y), \quad \mathbf{q}_\perp = (q_x, q_y), \quad q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}, \quad a = const$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

Решение уравнения Гельмгольца (разделение переменных)

$$f(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{a}{q}\operatorname{ch}(\sqrt{q^2 - k^2}\, z)\cos(\mathbf{q}_\perp \mathbf{r}_\perp)$$

Задача Коши для уравнения Гельмгольца

$$f(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{a}{q}\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{q^2 - k^2}\,z\right)\cos(\mathbf{q}_\perp \mathbf{r}_\perp)$$

Предел $\quad q \to \infty$

$$f\big|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

При конечных $z \qquad f \to \infty$

При нулевых (в пределе) начальных данных есть решение, стремящееся при конечных z к бесконечности. Но при таких начальных данных есть и нулевое решение.
Нет непрерывной зависимости решения от начальных данных.
Постановка задачи некорректна.
Физ. смысл – встречные волны.

Ковариантная формулировка уравнений Максвелла в вакууме. Тензоры электромагнитного поля

- Напряженности электрического и магнитного полей не абсолютны и имеют разную величину в различных инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга со скоростью $\mathbf{V}$.
- Задача – показать релятивистскую инвариантность уравнений Максвелла и найти преобразования Лоренца для электромагнитного поля.
- Форма записи уравнения будет релятивистски инвариантной, если оно записано в терминах скаляров, 4-векторов и тензоров, для которых известны преобразования Лоренца.

Ковариантная формулировка …*

Вводим 4-мерное пространство-время с координатами x_k, $k = 0, 1, 2, 3$

$$x_0 = ct, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Другая инерционная система координат $x_k^{'}$

Преобразование Лоренца в частном случае , когда скорость **V** имеет только *x*-компоненту

$$x_0' = \frac{x_0 - \frac{V}{c} x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_1' = \frac{x_1 - \frac{V}{c} x_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3.$$

$$x_0 = \frac{x_0' + \frac{V}{c} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_1 = \frac{x_1' + \frac{V}{c} x_0'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = x_3'.$$

4-векторы

Ковариантный 4-вектор (нижние индексы)

$$A'_i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} A_k, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Контравариантный 4-вектор (верхние индексы)

$$A'^i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} A^k.$$

Напряженности электрического и магнитного полей не составляют 4-вектора.

4-тензоры

ковариантный (нижние индексы)

$$B'_{ik} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} B_{jl}$$

контравариантный (верхние индексы)

$$B'^{ik} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} B^{jl}$$

Тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Антисимметрия $\quad F_{ik} = -F_{ki},\, F^{ik} = -F^{ki}.$

Преобразование Лоренца напряженностей э.-м. поля (спец. случай)

$$E_x = E'_x, \qquad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$H_x = H'_x, \qquad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Ковариантная форма уравнений Максвелла

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Инварианты

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=0}^{3} F_{ik}F^{ik} = inv,$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = inv.$$

Тензор энергии-импульса э.-м. поля

$$U^{00} = U_{00} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2),$$

$$U^{0i} = -U_{0i} = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_i,$$

Симметрия по индексам ?

$$U^{ik} = U_{ik} = -\frac{1}{4\pi}(E_i E_k + H_i H_k) + \frac{1}{8\pi}\delta_{ik}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad i,k = 1,2,3.$$

Символ Кронекера $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и 0 в противном случае.
U^{00} - плотность э.-м. энергии, U^{0i} - плотность потока энергии.

Тензор энергии-импульса (поля и среды) служит источником искривления пространства-времени в уравнениях тяготения Эйнштейна.

Задания

1. Найти напряженности электрического и магнитного полей точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью.
2. Проверить инвариантность величин $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и $(\mathbf{E},\mathbf{H})$.
3. Проверить, что ковариантная запись уравнений Максвелла приводит к стандартной записи при различном выборе индексов.

- это все дом. задания

Уравнение распространения фронта электромагнитной волны

Ранее мы решали задачу Коши, то есть по начальным данным (при $t = 0$) о напряженностях поля определяли последующую динамику поля. Это возможно, так как уравнения Максвелла в вакууме содержат только первые временные производные напряженностей. Более общая постановка задачи динамики:

Уч. пособие, стр. 13-17

Законы сохранения для э.-м. поля в вакууме

Уч. пособие, стр. 17-20

Потенциалы поля и волновое уравнение

Уч. пособие, стр. 20-22

Одномерное волновое уравнение - решение Даламбера

Уч. пособие, стр. 22-24.