Подготовка к ЕГЭ

Об особенностях решения заданий С 2 ЕГЭ

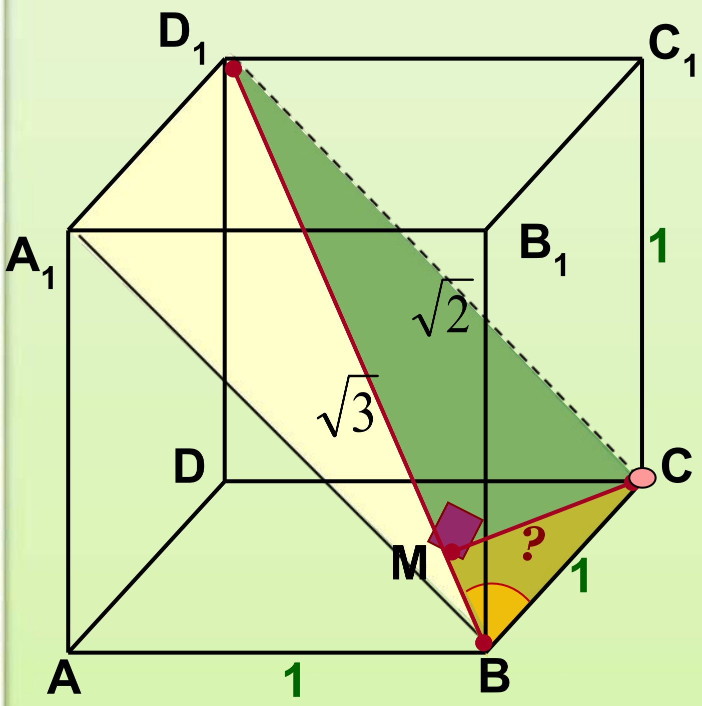
Геометрия 10-11

Е.Ю.Фролова, учитель математики ГБОУ СОШ №2 г.о. Кинель

1. Расстояние от точки до прямой

<u>Задача 1</u>. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки С до прямой BD_1.

Решение.



<u>I способ.</u>

1. Построим плоскость A_1D_1CB.

2. $CM \perp BD_1$; CM – искомое расстояние.

3. $\Delta\, D_1CB$ – прямоугольный.

$CD_1 = \sqrt{2}$, $D_1B = \sqrt{3}$.

$$\sin B = \frac{CD_1}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

4. Δ CMB – прямоугольный.

$$CM = CB \cdot \sin B$$

$$CM = 1 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

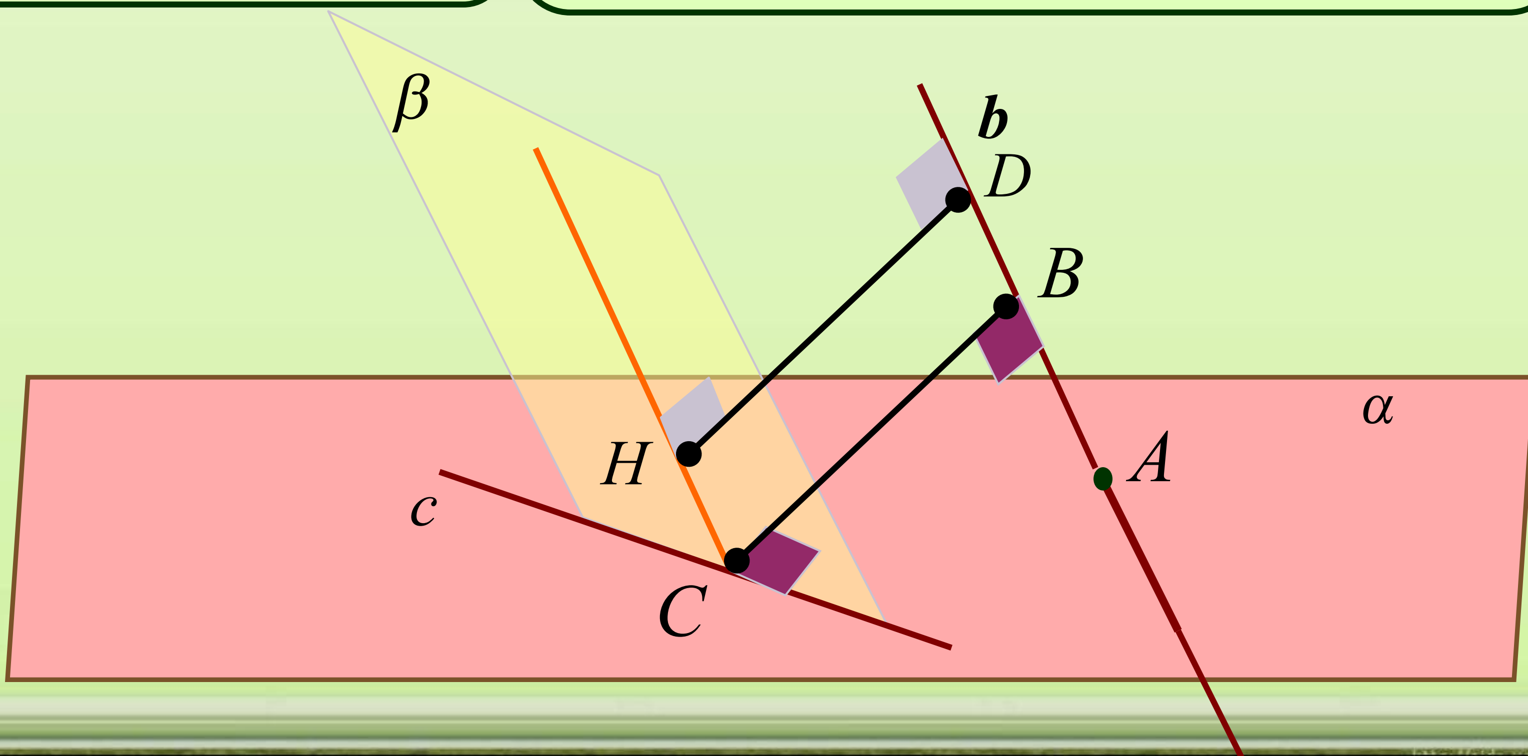
Ответ: $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$.

2. Расстояние между скрещивающимися прямыми

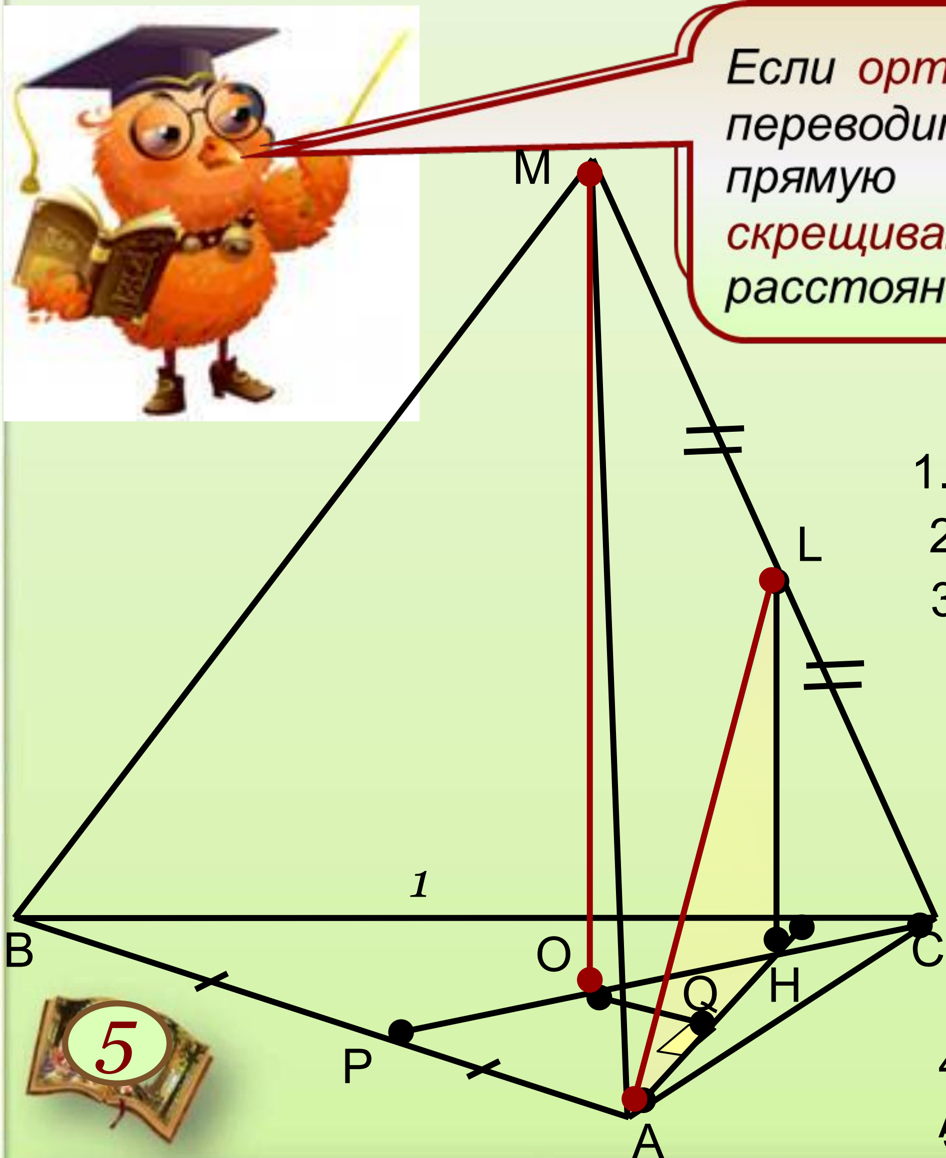
можно <u>определить</u>: как

1) длину отрезка их общего перпендикуляра;

2) расстояние от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.



Задача 2. Дан правильный тетраэдр MABC с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, если L – середина MC, O – центр грани ABC.



Если ортогональная проекция на плоскость α переводит прямую a в точку A, а прямую b в прямую b_1, то расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию от A до прямой b_1.

Решение.

1. LH ⊥(ABC), H ∈ CO.
2. CH = HO.
3. Точка O и прямая AH – ортогональные проекции соответственно прямых MO и AL на (ABC).

Расстояние между скрещивающимися прямыми MO и AL равно расстоянию от точки O до прямой AH.

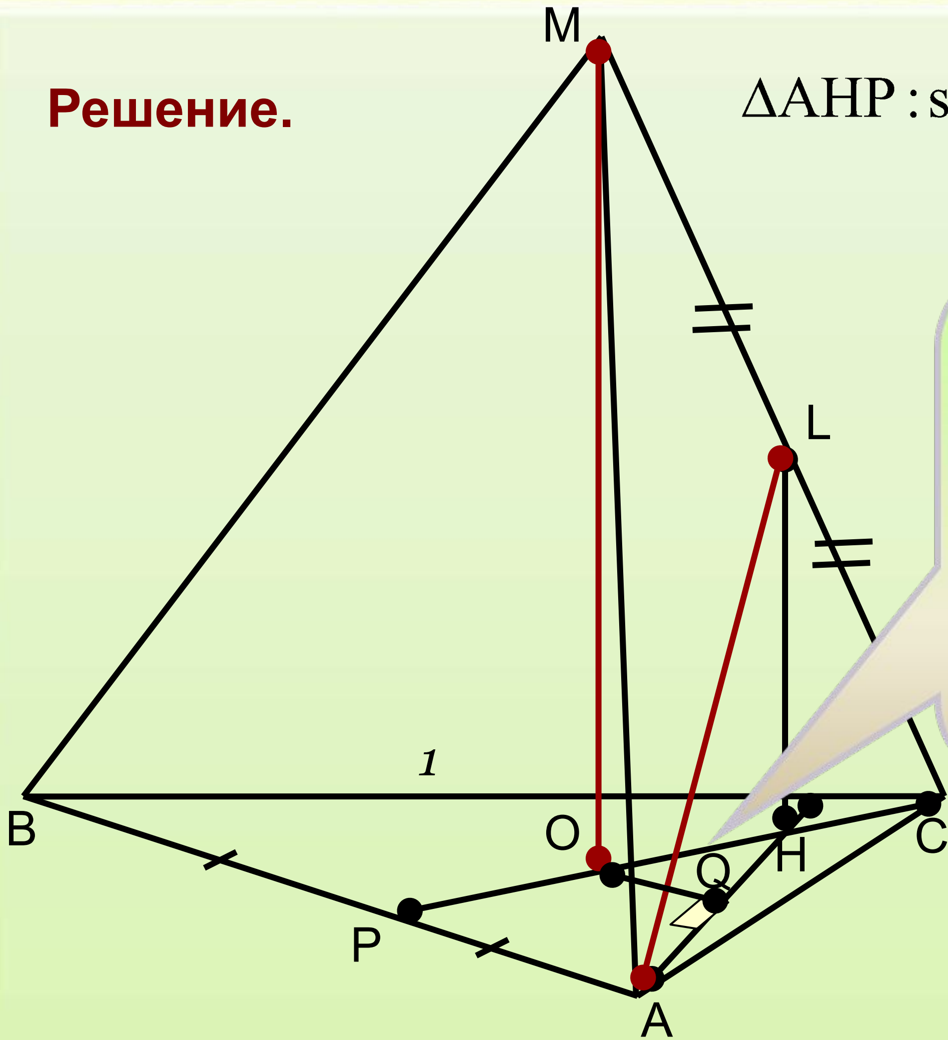
4. OQ ⊥ AH.

OQ- искомое расстояние.

5. Вычислим OQ.

5

Решение.



$$\Delta AHP : \sin \angle AHP = \frac{AP}{AH} = \frac{AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}.$$

$$OH = \frac{1}{3}CP$$

$$PH = \frac{2}{3}CP$$

$$CP = AC \cdot \sin 60^\circ$$

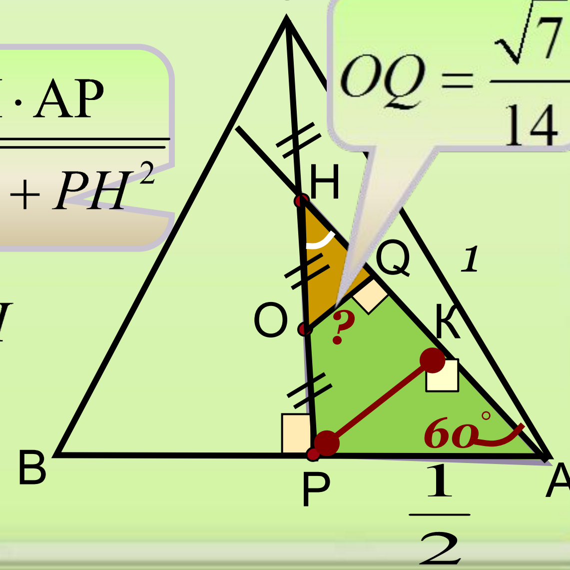
$$CP = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$PH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$OQ = \frac{OH \cdot AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}$$

$$OQ = \frac{\sqrt{7}}{14}$$



$$\Delta OQH : \sin \angle OHQ = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OQ = OH \cdot \sin \angle OQH$$

6

Ответ: $\boxed{\frac{\sqrt{7}}{14}}$.

3. Угол между прямой и плоскостью

можно <u>вычислить</u>:

1) как угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость;

Этот угол включают в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов.

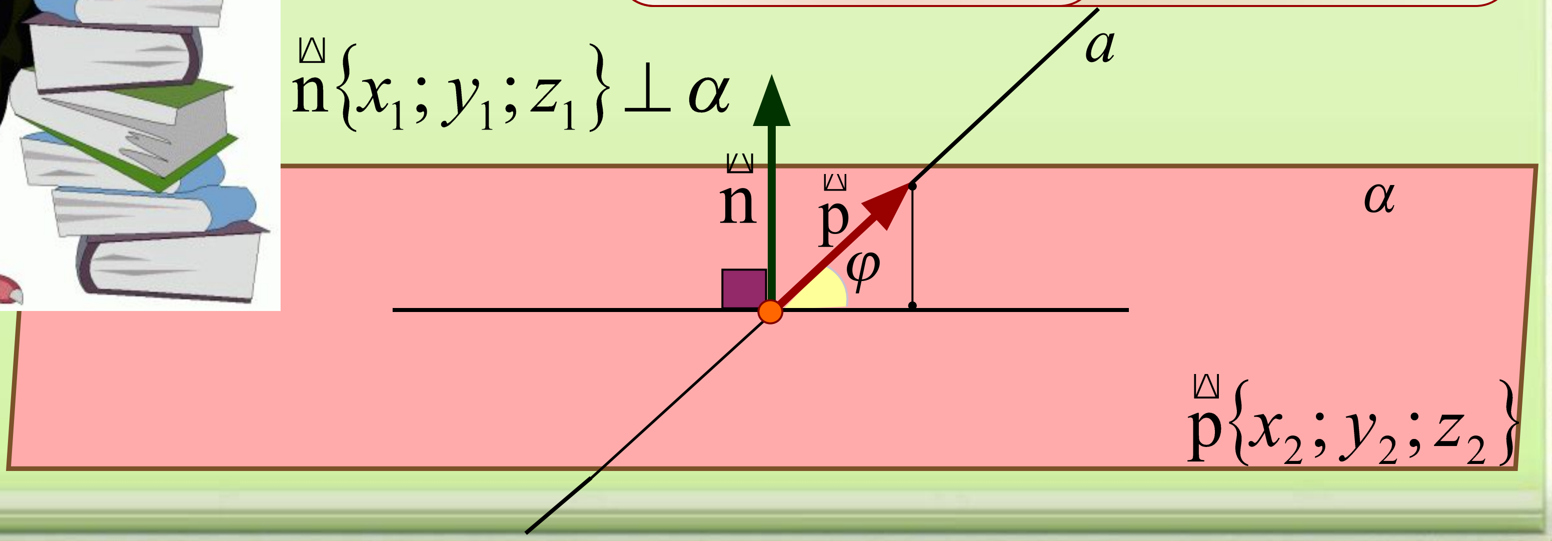
2) используя векторный метод;

3) используя координатно-векторный метод.

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{p}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{p}\right|}$$

$$\sin\varphi = \frac{\left|x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1 z_2\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

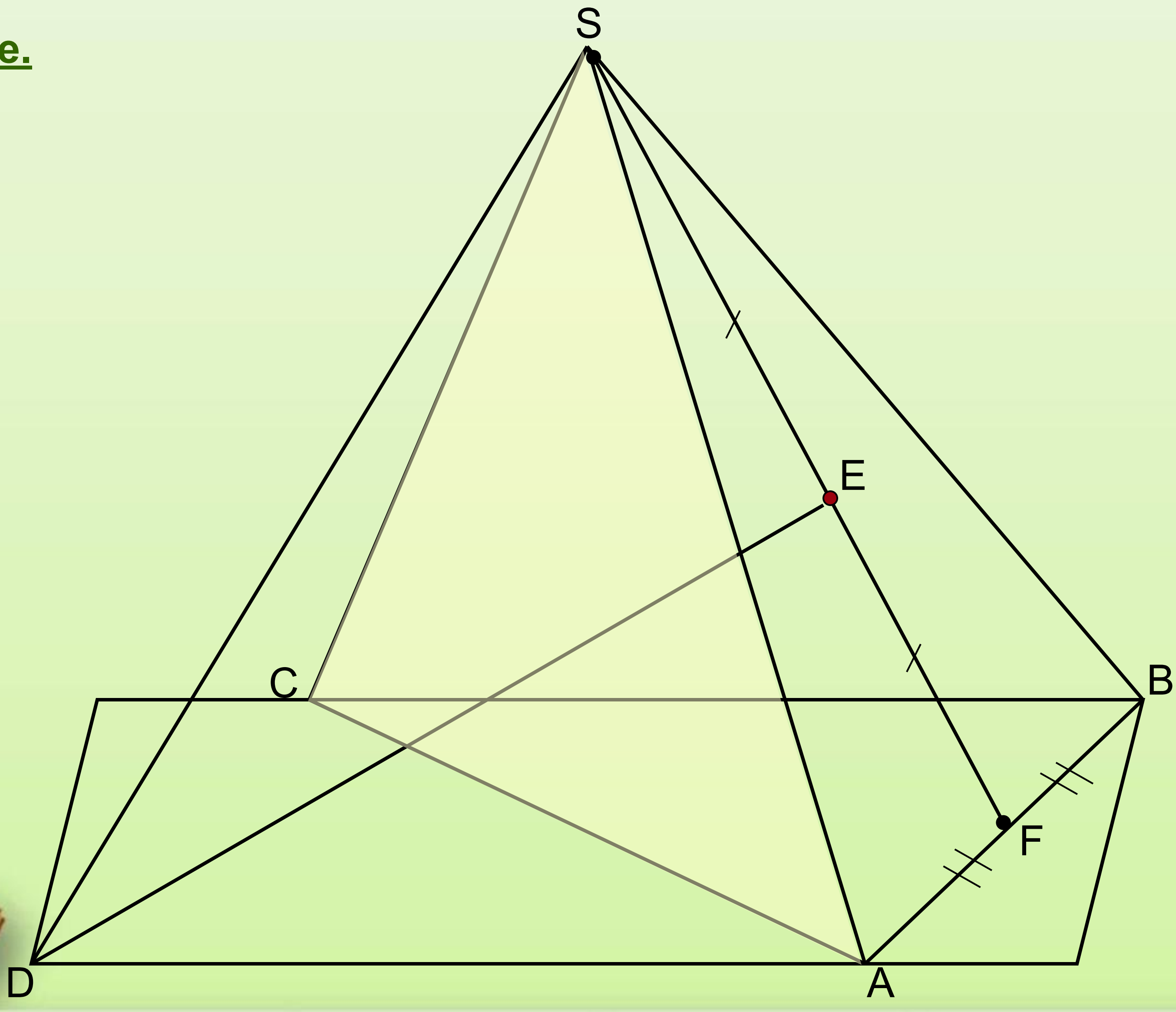
$$\vec{n}\{x_1; y_1; z_1\} \perp \alpha$$



$$\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\}$$

Задача 3. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1. Найдите угол между прямой DE, где E - середина апофемы SF грани ASB, и плоскостью ASC.

Решение.



I способ.

1) OD ⊥ (ASC).

$\overrightarrow{OD}$ – вектор нормали к (ASC).

2) $\overrightarrow{DE}$ – направляющий вектор прямой DE.

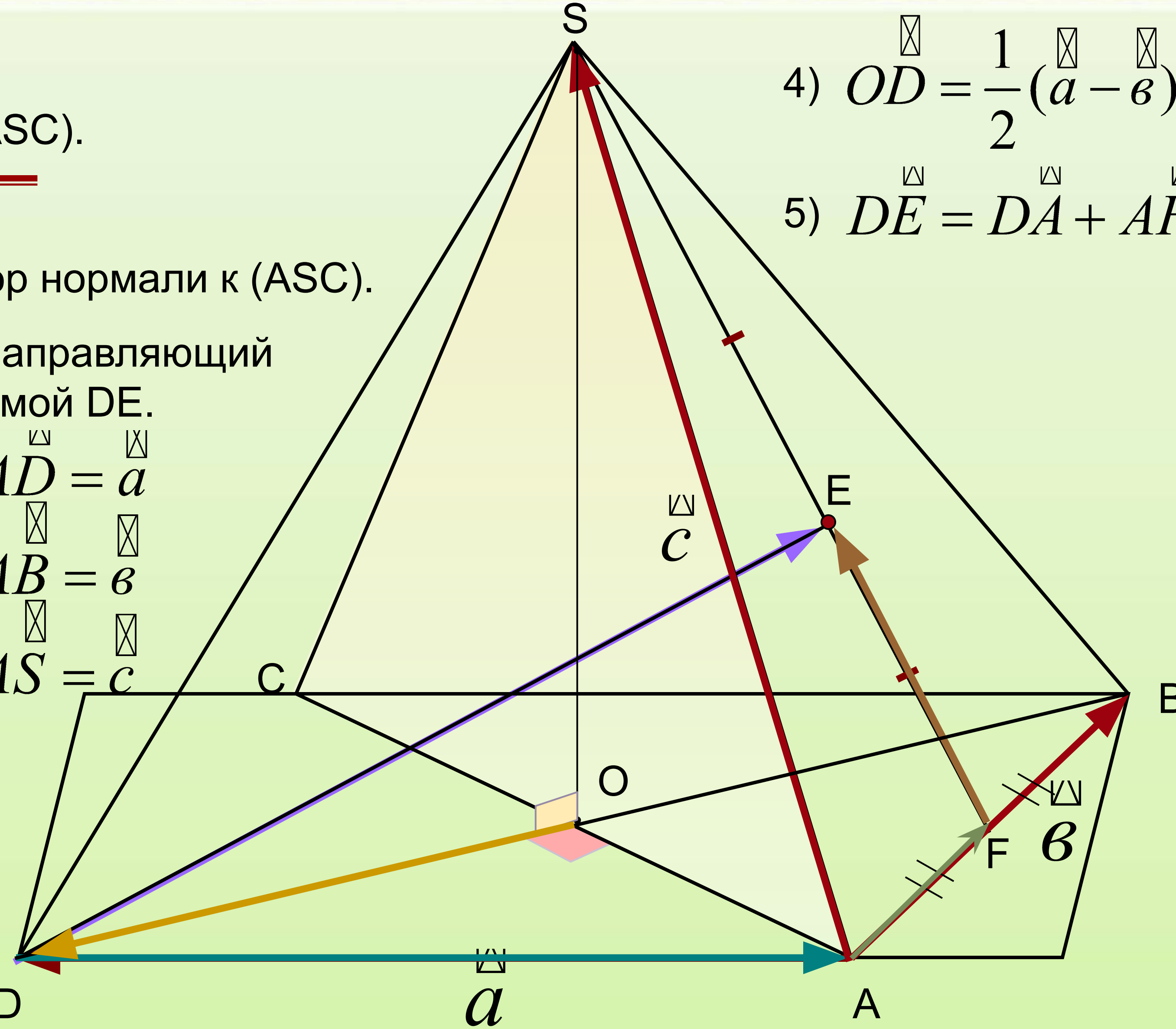
3) Пусть $\vec{AD} = \vec{a}$

$\vec{AB} = \vec{в}$

$\vec{AS} = \vec{c}$

4) $\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{в})$

5) $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AF} + \vec{FE}$



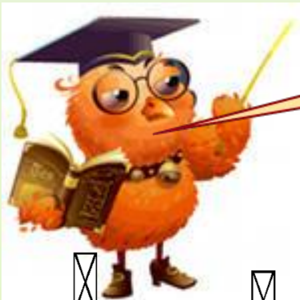
9

$\vec{DE} = \vec{в} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{в}(- \frac{1}{2}\vec{a}) = \vec{в} + \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{2}$

$\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{в})$

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{DE}\cdot\vec{OD}\right|}{\left|\vec{DE}\right|\cdot\left|\vec{OD}\right|}$$

$\overrightarrow{DE} = -\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$



$\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2$

$$\vec{DE}\cdot\vec{OD} = \left(-\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{в} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{в}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a}^{\,2} - \frac{1}{8}\vec{в}^{\,2} + \frac{1}{4}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{в}\vec{c}$$

$$\vec{DE}\cdot\vec{OD} = -\frac{5}{8}$$

$$\left|\vec{DE}\right| = \sqrt{\left(\vec{DE}\right)^2} = \sqrt{\left(-\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\left|\vec{OD}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

Ответ: $\boxed{\arcsin\frac{\sqrt{30}}{6}}$.

<u>II способ.</u> *Координатно-векторный метод*

Введем прямоугольную систему координат.

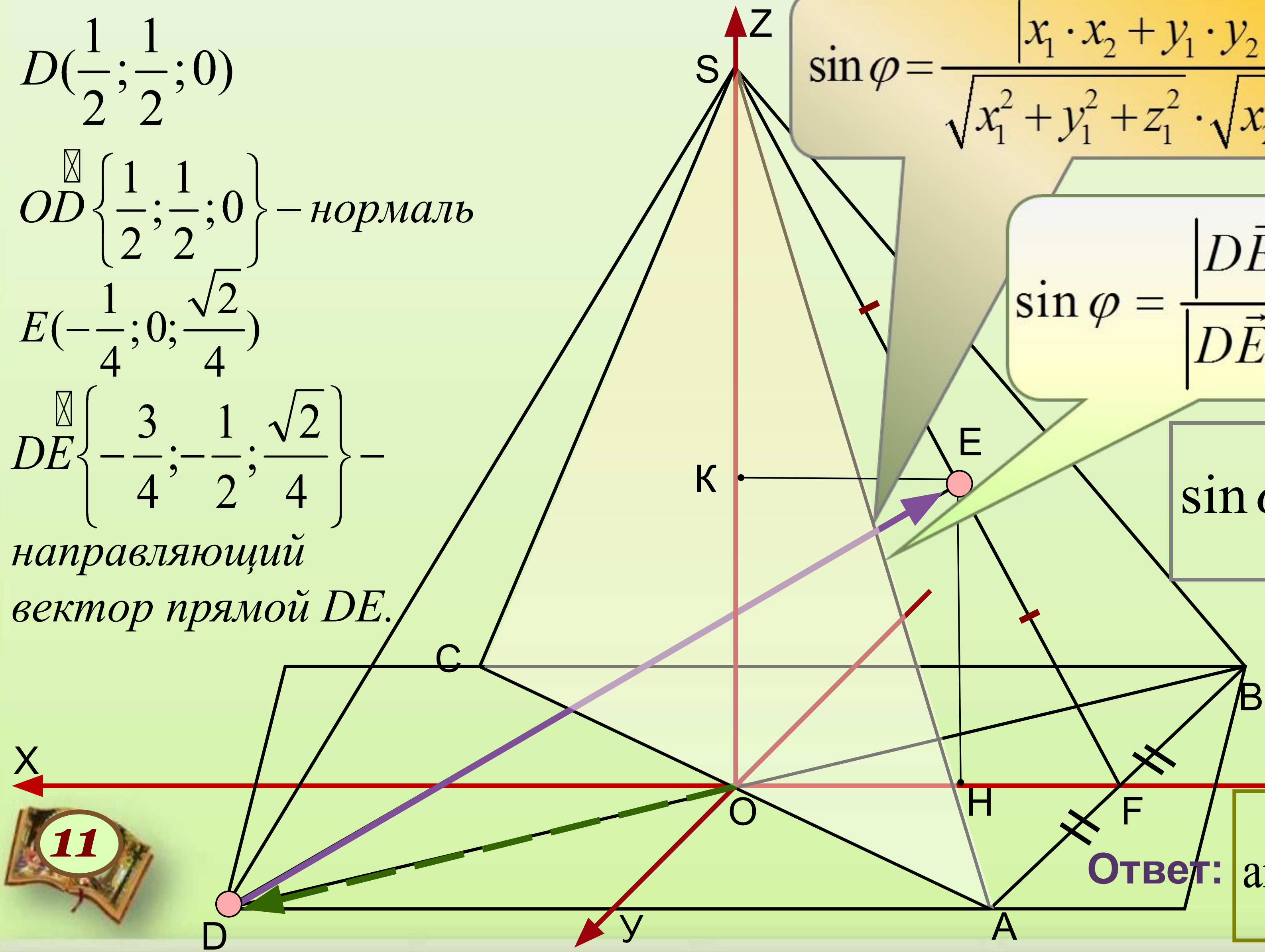
$$D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$\vec{OD}\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\} - \textit{нормаль}$$

$$E\left(-\frac{1}{4};0;\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\vec{DE}\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} -$$

направляющий вектор прямой DE.



$$\sin\varphi = \frac{|x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{DE}\cdot\vec{OD}|}{|\vec{DE}|\cdot|\vec{OD}|}$$

$$\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

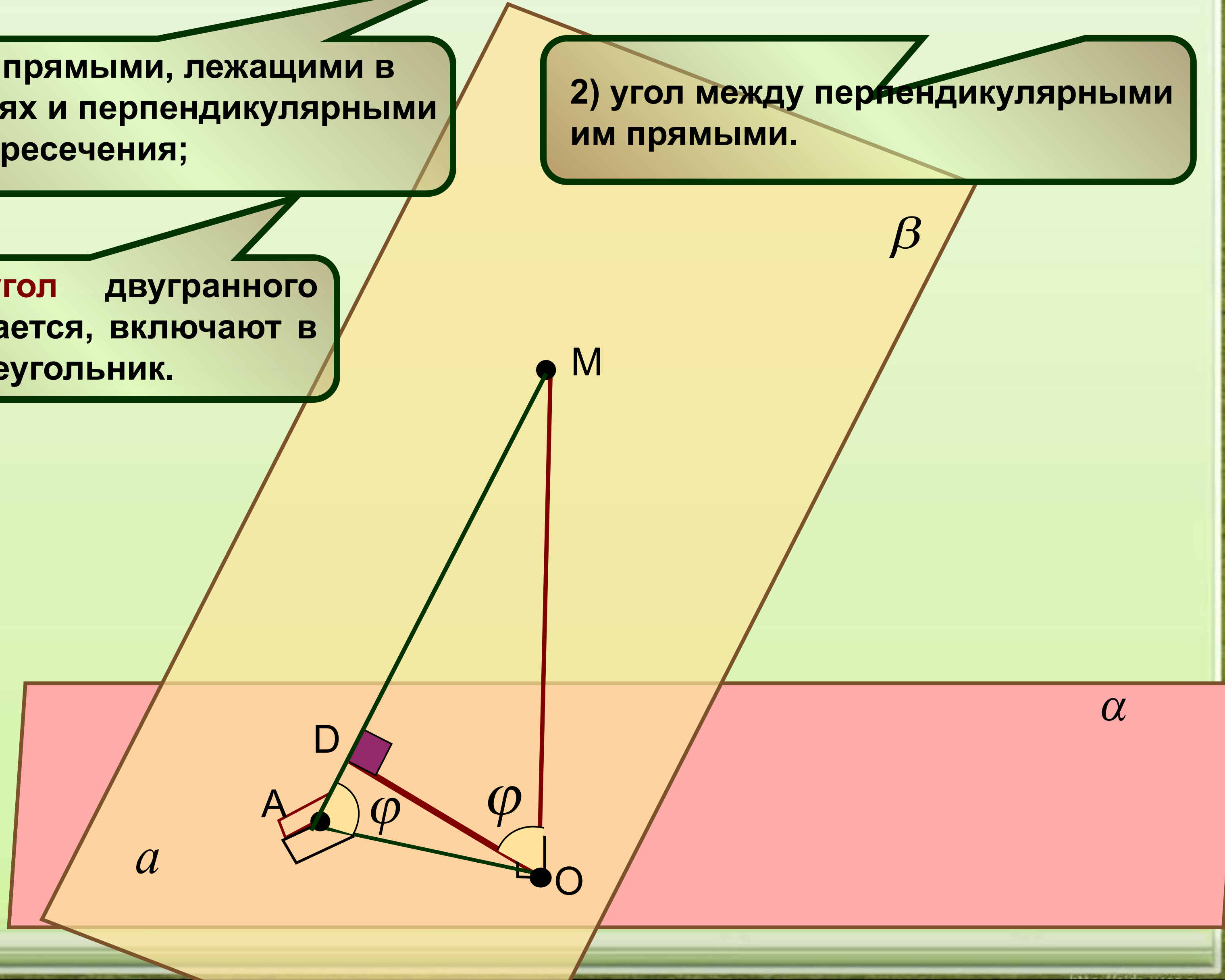
4. Угол между пересекающимися плоскостями

можно **вычислить**: как

1) угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения;

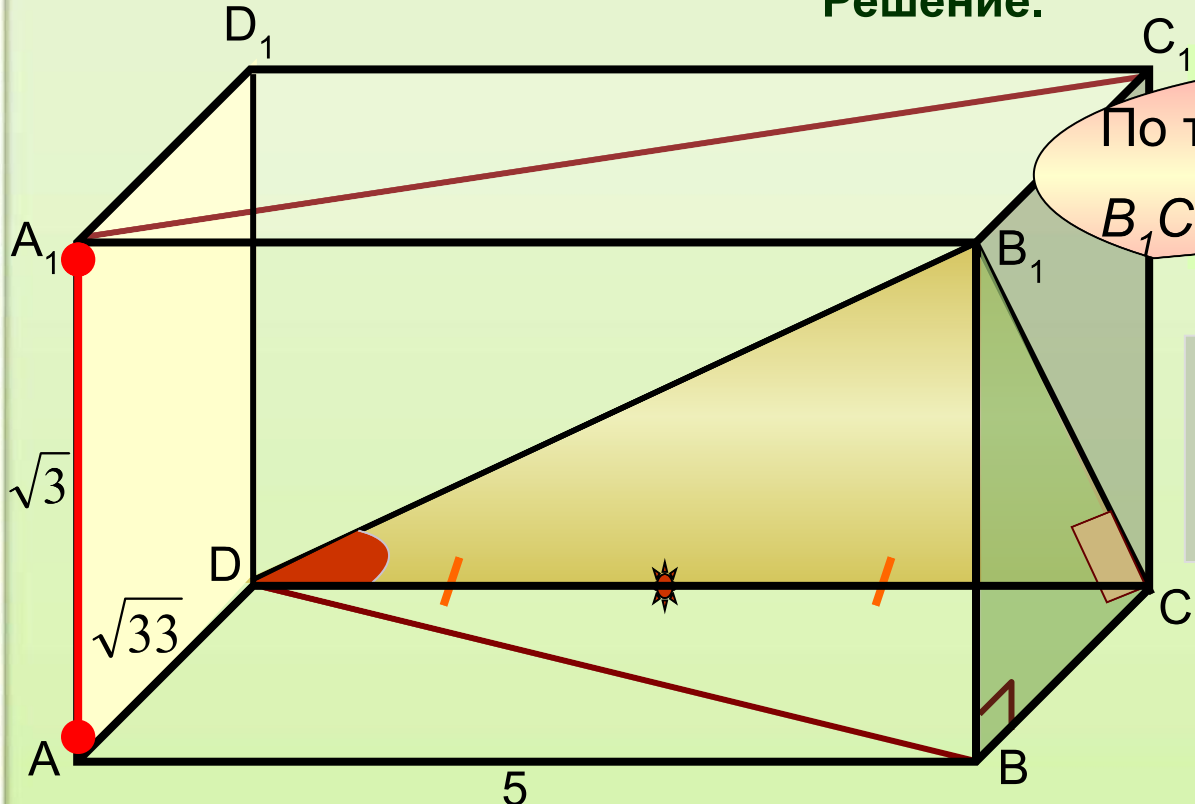
2) угол между перпендикулярными им прямыми.

Линейный угол двугранного угла, если удается, включают в некоторый треугольник.



<u>Задача 4</u>. **Основание прямой четырехугольной призмы прямоугольник ABCD, в котором AB=5, AD=√33. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра CD, перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно√3.**

Решение.



По теореме Пифагора найдем

$B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^{\ 2}} = 6$

Угол между данными плоскостями - угол между перпендикулярными к ним прямыми.

$$tg\angle B_1DC = \frac{B_1C}{DC} = \frac{6}{5}$$

$CD \perp (AA_1D)$

$B_1D \perp \beta$ – по условию

$\angle B_1DC$ – **искомый.**

13

Благодарю за внимание

Е.Ю.Фролова, учитель математики ГБОУ СОШ №2 г.о. Кинель